

Chap 5: Equation du Champ d'Einstein Solution de Schwarzschild.

1) Limite Newtonienne:

On considère le cas d'un champ gravitationnel statique et faible (comme celui créé par le soleil), et une particule en mouvement lent dans ce champ (c-à-d avec une vitesse v telle que $v \ll c$). On pose:

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$$

qui sont les coordonnées d'un référentiel caractérisé par la forme métrique:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

tel que:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

$$= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

On définit un champ gravitationnel tel que

$$\boxed{1} \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1)$$

avec :

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

C-à-d que chaque $C_p k$ du Champ $g_{\mu\nu}$ est très voisine de sa valeur inertielle $\eta_{\mu\nu}$.

Soit l'équation de la géométrie :

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0 \quad (2)$$

Comme $v \ll c$, on a un intervalle de petit temps, et on va prendre comme paramètre le temps propre :

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 d\tau^2 \\ &= -c^2 dt^2 + dr^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dr^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

$$= 1 - (v/c)^2$$

$$\approx 1$$

$$\Rightarrow \tau \approx t$$

et :

$$\boxed{2}$$

$$\frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} \approx c$$

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} \approx \frac{dx^i}{dt} \approx v^i \ll c.$$

alors pour $\mathcal{L} = c \, ds$ (2):

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^i \dot{x}^0 \dot{x}^0 + \Gamma_{kl}^i \dot{x}^k \dot{x}^l + 2 \Gamma_{0j}^i \dot{x}^0 \dot{x}^j = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + c^2 \Gamma_{00}^i + v^k v^l \Gamma_{kl}^i + 2 \Gamma_{0j}^i c v^j = 0$$

On néglige le 3^{ème} et 4^{ème} termes devant le 2^{ème} qui contient c^2 :

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^i}{dt^2} = a^i = -c^2 \Gamma_{00}^i \quad (3)$$

(3)

on a i est l'accélération de la particule.
 Donc, le 2^{ème} membre représente une
 force gravitationnelle. Au lieu de raisonner
 en temps et force, on dira plutôt que
 la gravité implique un espace-temps
 courbé dans lequel les particules se
 déplacent.

Calculons P^i_{00} :

$$\begin{aligned} P^i_{00} &= \frac{1}{2} g^{i0} (2g_{00,0} - g_{0,0}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{ik} g_{00,0} \\ &\approx -\frac{1}{2} \eta^{ik} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} = -\frac{1}{2} P_i h_{00} \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que le champ est
 statique, et qu'on a négligé le terme
 en $|h_{\mu\nu}|^2$.

On remplace ds (3) :

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{c^2}{2} P_i h_{00}$$

Si on compare avec l'eq. de Newton :

(4)

$$\frac{d^2 \bar{x}'}{dt^2} = \bar{g}' = - \bar{\nabla}' \phi$$

On ϕ est le potentiel gravitationnel, on le suit par :

$$h_{00} = - \frac{2\phi}{c^2}$$

et alors :

$$g_{00} = - \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) \quad (4)$$

On vient de trouver une composante de $g_{\mu\nu}$! Mais comment trouver les autres composantes ?

On sait (Newton) qu'à une distance r d'une masse gravitationnelle M on a :

$$\phi = - \frac{MG}{r}$$

alors :

$$g_{00} = - \left(1 - \frac{2MG}{rc^2} \right) \quad (5)$$

et :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MG}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + \dots \quad (6)$$

5

2 / Equation du Champ d'Einstein:

Question: Etant donné une distribution de matière, comment trouver la g_{μν}!

Pour répondre on a deux conditions à respecter:

a) Les eqs doivent être tensorielles.
Les seuls tenseurs qu'on a sous la main sont $R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, R .

b) La situation pour le moment est résumée dans la table suivante:

	Non-Relativiste	Relativiste
Eq de Mot	Newton: $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi$	Geodesique: $\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma = 0$
Eq du Champ	Laplace (vide): $\nabla^2 \phi = 0$ Poisson (Matière): $\nabla^2 \phi = 4\pi\rho G$	Einstein: ?

G

2.1/ Eqs du Champ de la vte:

Ca va être une généralisation de l'eq de Laplace.

On considère:

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0} \quad (7)$$

Ce sont 10 équations avec 10 inconnues $g_{\mu\nu}$. Cette équation n'implique pas $R^{\mu}_{\mu} = 0$ car R^{μ}_{μ} possède 20 eqs indépendantes. En effet les eqs (7) sont les équations d'Einstein dans la vte. La solution générale n'existe pas, mais on peut trouver des solutions particulières, parmi lesquelles la solution de Schwarzschild.

Nous allons montrer que (7) donne à la limite non-relativiste l'eq de Laplace.

2.2/ Tenseur énergie-moment.

(7)

Si on va travailler en présence d'une distribution de matière, il faut alors trouver la forme du tenseur énergie-moment décrivant cette distribution.

Le tenseur énergie-moment est un tenseur de rang 2, noté $T_{\mu\nu}$. Il ne faut pas le confondre avec le 4-vecteur énergie-moment $P^\mu = (P^0, \vec{P})$.

Dans cette section on va déterminer $T_{\mu\nu}$ pour la poussière (DUST), qui est la matière incohérente formée par les particules sans interaction entre elles. Par définition on a:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 U^\mu U^\nu$$

on obtient explicitement:

$$T^{\mu\nu}(x) = \rho_0(x) U^\mu(x) U^\nu(x)$$

Où $\rho_0(x)$ est la densité propre de la matière: c'est la densité qui se déplace avec le flux de particules, et

$\boxed{P}$

1. u^N la vitesse du flux:

$$u^N = \frac{1}{c} \frac{dx^N}{d\tau}$$

On a:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 \\ &= -c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T^{00} &= \int_0 u^0 u^0 \\ &= c^2 \rho_0 \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 \\ &= \gamma^2 \rho_0 \\ &= \rho \end{aligned}$$

On interprète ρ comme la densité de masse dans un référentiel en mouvement. En effet si $v = 0$, on a $\rho = \rho_0$. D'autre part $c^2 T^{00} = c^2 \rho$ est la densité d'énergie relativiste de la matière.

De même on a:

$$T^{0i} = \int_0 u^0 u^i = \int_0 \frac{1}{c^2} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau}$$

$$= \gamma^2 \int_0 \frac{v^i}{c} = \int \frac{v^i}{c}$$

où $v^i = dx^i/dt$.

On a aussi:

$$T^{ij} = \int_0 u^i u^j = \int_0 \frac{1}{c^2} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}$$

$$= \gamma^2 \int_0 \frac{v^i v^j}{c^2} = \int \frac{v^i v^j}{c^2}$$

et donc:

$$T^{\mu\nu} = \int \begin{pmatrix} 1 & \frac{v_x}{c} & \frac{v_y}{c} & \frac{v_z}{c} \\ \frac{v_x}{c} & \frac{v_x^2}{c^2} & \frac{v_x v_y}{c^2} & \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \frac{v_y}{c} & \frac{v_x v_y}{c^2} & \frac{v_y^2}{c^2} & \frac{v_y v_z}{c^2} \\ \frac{v_z}{c} & \frac{v_x v_z}{c^2} & \frac{v_y v_z}{c^2} & \frac{v_z^2}{c^2} \end{pmatrix}$$

A la limite non relativiste:

$$T^{00} = \rho \approx \rho_0$$

On sait que l'énergie et le moment sont des quantités conservées; on s'attend alors que $T^{\mu\nu}$ obéit une loi de conservation. En relativité restreinte cette loi est:

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$$

10

Vérification:

* $\rho = 0$:

$$T^{0\nu}_{, \nu} = T^{00}_{, 0} + T^{0i}_{, i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho v^i) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0} \quad (A)$$

* $\rho = i$:

$$T^{i0}_{, 0} + T^{ij}_{, j} = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \rho v^i \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^j} (\rho v^i v^j) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\rho v^i) + \vec{\nabla} \cdot (\rho v^j \vec{v}) = 0} \quad (B)$$

On a: ρ : densité d'énergie

ρv^i : densité de moment

$\Rightarrow (A) + (B)$ Conservation du tenseur énergie-moment en relation restreinte.

En relativité générale (RG) on obtient la loi de conservation du tenseur

Énergie-moment en remplacent la dérivée ordinaire par la dérivée covariante.

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$

2.5/ Equations du Champ en présence de matière :

Maintenant on va déterminer la généralisation relativiste de l'eq. de Poisson.

On postule alors :

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \quad (?) \quad (8)$$

($\frac{8\pi G}{c^2}$ est une constante qu'on élucidera après.)

L'eq (8) n'est pas la bonne car :

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \Rightarrow R^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$

Or $R^{\mu\nu}_{;\nu} \neq 0$. On peut le vérifier à partir des identités de Bianchi :

$$R^{\mu}_{\nu\sigma;\lambda} + R^{\mu}_{\nu\lambda;\sigma} + R^{\mu}_{\nu\lambda;\sigma} = 0$$

On pose $\mu = \nu$ et on obtient : 12

$$R_{\nu\sigma;\lambda} + R_{\nu\lambda;\sigma} + R_{\nu\lambda;\sigma} = 0$$

Le signe (-) vient de :

$$R^{\rho}_{\nu\lambda\sigma} = -R^{\rho}_{\nu\sigma\lambda} = -R_{\nu\lambda;\sigma}^{\rho}$$

Multiplions par $g^{\nu\sigma}$:

$$g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma;\lambda} + g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma\lambda;\nu} - g^{\nu\sigma} R_{\nu\lambda;\sigma} = 0$$

$$\Rightarrow R_{;\lambda} - R^{\nu}_{\lambda;\nu} - R^{\sigma}_{\lambda;\sigma} = 0$$

$$\Rightarrow \delta^{\rho}_{\lambda} R_{;\rho} - 2 R^{\sigma}_{\lambda;\sigma} = 0$$

$$\Rightarrow \left(R^{\rho\lambda} - \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} R \right)_{;\rho} = 0$$

on a utilisé $g^{\rho\lambda}_{;\rho} = 0$.

~~Donc~~ on a :

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$

Avec :

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$$

qui est le tenseur d'Einstein.

Finalement on a $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$. Donc $G^{\mu\nu}$ va être proportionnel à $T^{\mu\nu}$.

Finalement à la place de (8) on a:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}}$$

qui sont les eqs. du Champ en présence d'une distribution de Matière. (9)

* En l'absence de Matière $T_{\mu\nu} = 0$:

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

Contractant sur μ et ν :

$$\underbrace{g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}}_R - \frac{1}{2} \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_4 R = 0$$

$$R - 2R = -R = 0$$

$\Rightarrow$

$$R = 0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0}$$

$\Rightarrow$

144

Auto E cature de (9):

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow R - 2R = \frac{8\pi G}{c^2} T$$

$$\Rightarrow \boxed{R = - \frac{8\pi G}{c^2} T}$$

On remplace ds (9):

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)}$$

(10)

Limite non relativiste: $v \ll c$

On revient à l'expression de $T_{\mu\nu}$ et on néglige les termes en $(\frac{v}{c})^2$ et $\rho(\frac{v}{c})$:

$$T^{\mu\nu} = \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(15)

Dans l'approximation du champ faible.

On a :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1)$$

$$\Rightarrow g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

(Pour le vérifier il suffit de calculer $g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu}$).

$$\text{On a : } T^{00} = \rho.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T &= g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \\ &= g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = (4\rho + h_{00}) T^{00} \\ &= -\rho \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T = T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) T$$

$$\Rightarrow \boxed{T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T = \frac{\rho}{2} \delta^{\mu\nu}}$$

$$\text{et } \boxed{T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T = \frac{\rho}{2} \delta_{\mu\nu}}$$

16

Calcul de $R_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\kappa,\nu} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\kappa} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\nu} \Gamma^{\rho}_{\mu\kappa}$$

A l'ordre le plus bas en $R_{\mu\nu}$ on a:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\kappa\sigma} (h_{\sigma\mu,\nu} + h_{\sigma\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) \end{aligned}$$

Il est facile de voir que les 3^e et 4^e termes $R_{\mu\nu}$ vont être en $\mathcal{H}^2$, et donc négligeables. Il reste:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\kappa\sigma} (h_{\sigma\nu,\mu\kappa} + h_{\mu\kappa,\sigma\nu} - h_{\mu\nu,\sigma\kappa} - h_{\sigma\kappa,\mu\nu})$$

Dans l'approximation statique:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}$$

On sait que $h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2} \Rightarrow$

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \phi. \quad \text{Alors en posant } \mu = \nu = 0$$

(17)

dans (10) on obtient:

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho}$$

qui est l'éq. de Poisson.

3/ Solution de Schwarzschild:

On va chercher les solutions de Eqs du
Champ dans le vide $\Leftrightarrow R_{\mu\nu} = 0$.

Cette solution est une bonne approximation
du Champ gravitationnel régnant au
voisinage du Soleil, qui peut être
considérée comme une distribution de
Matière statique et de symétrie sphérique.

* Statique: $g_{\mu\nu}$ ne dépend pas de
 $x^0 = ct$.

* En plus ds^2 est invariant dans le
renversement du temps $x^0 \rightarrow -x^0$, et
donc pas de terme $dx^0 dx^i$ dans
 $ds^2 \Rightarrow g_{0i} = g_{i0} = 0$.

18

* En ajoutant la symétrie sphérique,
on écrit alors la forme la plus
générale de l'élément de ligne
spatio-temporelle comme :

$$ds^2 = -U(r) c^2 dt^2 + V(r) dr^2 + W(r) r^2 d\Omega^2$$

où $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$

On a seulement 3 inconnues U, V et W .
Comme r est un simple paramètre radial
on introduit le nouveau paramètre :

$$\hat{r}^2 = W \cdot r^2 \Rightarrow \hat{r} = \sqrt{W} r$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{r}}{dr} = \sqrt{W} \left(1 + \frac{r}{2W} \frac{dW}{dr} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V dr^2 &= \frac{V}{W} \left(1 + \frac{r}{2W} \frac{dW}{dr} \right)^2 d\hat{r}^2 \\ &= \hat{V} d\hat{r}^2 \end{aligned}$$

avec : $\hat{V} = \frac{V}{W} \left(1 + \frac{r}{2W} \frac{dW}{dr} \right)^2$

19

on écrit aussi: $U(r) = \hat{U}(\hat{r})$

et donc dS^2 devient:

$$dS^2 = - \hat{U}(\hat{r}) c^2 dt^2 + \hat{V}(\hat{r}) d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\Omega^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{il reste que 2} \\ \text{inconnues } \hat{U} \\ \text{et } \hat{V} \end{array} \right)$$

On enlève le chapeau:

$$dS^2 = - U c^2 dt^2 + V dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$= - e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(r^2 \sin^2\theta) \end{pmatrix}$$

23

If you 2 functions $\bar{a}$ to solve $\nabla^2 \psi$.

On a les résultats suivants:

$$\Gamma^1_{00} = \nu' e^{2\nu-2\lambda}$$

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \nu'$$

$$\Gamma^1_{11} = \lambda', \quad \Gamma^1_{22} = -r \bar{e}^{-2\lambda}, \quad \Gamma^1_{33} = -r h^2 \bar{e}^{-2\lambda}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^2_{33} = -h^2 \partial \omega \partial$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \omega + \partial, \quad L_g \text{ antis} = 0.$$

On remplace dans:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\kappa,\nu} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\kappa} \Gamma^{\rho}_{\nu\rho} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\rho} \Gamma^{\rho}_{\nu\kappa} = 0$$

On trouve:

$$\textcircled{a} \quad R_{00} = e^{2(\nu-\lambda)} \left(\nu'' + \nu'^2 - \nu' \lambda' + \frac{2\nu'}{r} \right) = 0$$

$$\textcircled{b} \quad R_{11} = -\nu'' + \nu' \lambda' + \frac{2\lambda'}{r} - \nu'^2 = 0$$

$$\textcircled{c} \quad R_{22} = (-1 - r\nu' + r\lambda') \bar{e}^{-2\lambda} + 1 = 0$$

[21]

$$\textcircled{d} \quad R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta$$

$$R_{\nu\nu} = 0 \quad (\nu \neq r)$$

On a 3 eqs indep. pour 2 inconnues.

Comme $e^{2\nu-2\lambda} \neq 0$, on a à partir de

$$\textcircled{a} \text{ et } \textcircled{b}, \quad \lambda' + \nu' = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{\lambda(r) + \nu(r) = \text{cte}}$$

Pour $r \rightarrow \infty$, $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$
et $\nu \rightarrow 0$. Alors:

$$\lambda + \nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda(r) = -\nu(r)}$$

L'eq $\textcircled{c}$ donne:

$$(1 + 2r\nu') e^{2\nu} = 1 \Rightarrow r e^{2\nu} = r - C$$

où C est une constante: $C = 2m$.

$$\Rightarrow e^{2\nu} = 1 - \frac{2m}{r}$$

$$\Rightarrow g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}$$

Dans la limite du champ faible on veut
faire:

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

22

$$=, \quad \boxed{m = \frac{GM}{c^2}}$$

Finalement la solution de Schwarzschild est:

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 \\ &\quad + r^2 d\Omega^2 \\ &= - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 \\ &\quad + r^2 d\Omega^2 \end{aligned}$$

C'est une solution exacte. Elle est valable à l'extérieur d'un corps de masse M . Quand $r \rightarrow \infty$, on remarque que l'espace-temps de Schwarzschild approche celui de Minkowski. Nous allons voir que la solution de Schwarzschild donne les petites corrections aux prédictions Newtoniennes pour le mouvement de la lumière et des planètes. Bien entendu, M est la masse du corps gravitationnel. 23

Singularité apparente en $r = 2m$

En examinant $g_{rr} = g_{\theta\theta} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}$

on remarque qu'il est singulier pour $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \frac{2GM}{c^2}$. Quelles sont les conséquences de ce résultat? Est-ce qu'on doit se soucier?

a) Étudions cette singularité pour le Soleil:

$$\begin{cases} M = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg} \\ G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{ kg}^{-2} \\ c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2GM}{c^2} = 2,95 \text{ km. (rayon de Schwarzschild } r_s)$$

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} = 2m = 2,95 \text{ km}$$

$$\Rightarrow d\Lambda^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\Omega^2$$

Question: Est-ce qu'on se soucie plus avec la limite $r \rightarrow r_s$?

Réponse: Non, car la surface de Schwarzschild, qui est sphérique et située à $r = r_s$, est à l'intérieur du Soleil qui a un rayon $R_s = 6,96 \times 10^5 \text{ km}$. Donc, la

(24)

solution de Schwarzschild pour $r = r_s$ n'est
 pas valide du moment qu'elle est une
 solution de l'éq d'Einstein dans le vide.
 Pour tester la RG dans le système planétaire
 il faut $r \gg R$, alors $\frac{r_s}{r} < 4,2 \times 10^{-6}$.
 Ainsi, la solution de Schwarzschild n'est
 pas très différentes de l'espace-temps de
 Minkowski.

ii) Pour les étoiles qui s'effondrent
 par gravitation, on a $r/r_s < 1$ et
 dans ce cas la surface sphérique $r = r_s$
 est sous le vide, qui est en de hors de
 l'étoile. En plus on remarque que $r = 2a$
 est une singularité de courbure qui
 n'affecte pas la géométrie, exactement
 comme le cas du pôle Nord et Sud
 d'une sphère.

$$g_{\theta\theta} = r^2 \sin^2 \theta, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0, \pi} \infty$$

mais rien de particulier n'arrive aux
 deux pôles. La sphère est toujours un
 espace homogène.