

2) Solution de Schwarzschild en coordonnées isotropes

$$\rho = \frac{1}{2}(r - m + \sqrt{r^2 - 2mr})$$

qui est une nouvelle constante radiale.

$$\Rightarrow r = \rho \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2$$

On montre (Exercice):

$$ds^2 = - \frac{(1 - m/2\rho)^2}{(1 + m/2\rho)^2} c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 \sum_{i=1}^3 dx_i^2$$

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos \theta$$

3/ Symétrie sphérique et dépendance temporelle:
le théorème de Birkhoff.

Pb général: on considère la symétrie sphérique et la dépendance par rapport au type de champ gravitationnel

(26)

iii) Il est intéressant de noter que le rayon de Schwarzschild est apparu d'abord dans le travail de Laplace (1798). On considère une particule de masse m qui s'échappe du champ gravitationnel d'un autre objet (planète, étoile) de masse M et de rayon R . En utilisant les arguments Newtoniens, le travail fourni pour s'échapper est alors :

$$\int_R^{\infty} F dr = m M G \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{m M G}{R}$$

Si on suppose que la lumière est constituée de particules de masse m qui se déplacent à la vitesse c alors :

$$W > T$$

$$\Rightarrow \frac{m M G}{R} > \frac{1}{2} m c^2$$

$$\Rightarrow R < \frac{2 G M}{c^2} = r_s$$

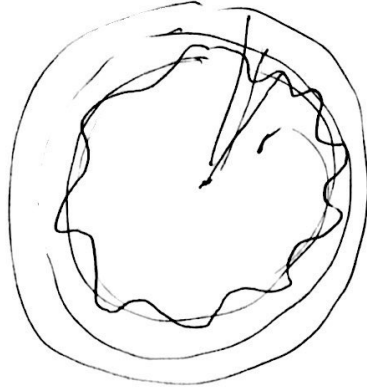
Donc une étoile de rayon $R < r_s$ ne brillera pas. Si on introduit la densité ρ de l'étoile alors :

$$R \gg \frac{5 c^2}{8 \pi G \rho}$$

⊙

$\Rightarrow$ une étoile très grosse se densifie donc, se brille pas.

Par exemple une étoile pulsante radialement



Donc:

$$ds^2 = -P(r, t) c^2 dt^2 + Q(r, t) dr^2 + 2R(r, t) dr dt + S(r, t) r^2 d\Omega^2$$

soit $\hat{r} = r \sqrt{S(r, t)}$

$$\Rightarrow ds^2 = -P(r, t) c^2 dt^2 + Q(r, t) dr^2 + 2R(r, t) dr dt + r^2 d\Omega^2$$

Introduisons une fonction $f(r, t)$ telle que:

$$f(r, t) [P(r, t) c dt - R(r, t) dr]$$

soit une différentielle totale $c dF(r, t)$;

$$f(P c dt - R dr) = c dF$$

(22)

$$c \, dF = c \frac{\partial F}{\partial t} dt + c \frac{\partial F}{\partial r} dr$$

$$\Rightarrow fP = \partial F / \partial t$$

$$- fR = c \partial F / \partial r$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial r} fP = - \frac{\partial}{\partial t} fR}$$

pu'on peut considérer comme l'éq différentiel

$$f: \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} P + f \frac{\partial P}{\partial r} + f \frac{\partial R}{\partial t} \right\}$$

$\Rightarrow$ Si on connaît $f(r, t_0)$ à l'instant t_0
on peut alors trouver $f(r, t_0 + dt)$.

On montre que:

$$- \frac{1}{f^2 P} c^2 dF^2 = - P c^2 dt^2 + 2 R c dt dr - \frac{R^2}{P} dr^2$$

$$\Rightarrow ds^2 = - \frac{1}{f^2 P} c^2 dF^2 + \left(P + \frac{R^2}{P} \right) dt^2 + r^2 d\Omega^2$$

On remarque que le terme en $dr dt$
a disparu.

(29)

Définition $F(r, t)$ comme étant un scalaire
 $t' = F(r, t)$

$$\Rightarrow ds^2 = -U(r, t) c^2 dt^2 + V(r, t) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

(Compara avec Schwarzschild)

$$\Rightarrow ds^2 = -e^{-2\nu(r, t)} c^2 dt^2 + e^{2\lambda(r, t)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

C'est la forme générale d'un espace-temps dépendant du temps à symétrie sphérique.

On va calculer ν et λ dans le cas :

$$\rho_{tt} = \frac{\dot{\nu}}{c}, \quad \rho_{tr} = \rho_{rt} = \frac{\dot{\lambda}}{c}$$

$$\rho_{rr} = \frac{\ddot{\lambda}}{c} e^{2(\lambda-\nu)} \quad \text{en plus de ceux déjà calculés.}$$

$$R_{tt} = \dots + \frac{1}{c^2} (\dot{\lambda}\dot{\nu} - \ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2)$$

$$R_{rr} = \dots + \frac{1}{c^2} (\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda}\dot{\nu}) e^{2(\lambda-\nu)}$$

$$R_{\theta\theta} = \dots, \quad R_{tr} = \frac{2}{rc} \dot{\lambda}$$

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta} \sin^2\theta, \quad \text{fin}$$

Dans le cas: $R_{\mu\nu} = 0$

$$\Rightarrow R_{tr} = 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \lambda(r)}$$

$\Rightarrow$ les temps en plus dans les $R_{\mu\nu}$ s'annulent.

$\Rightarrow$ on est dans le cas de
Schwarzschild mais avec
 $v = v(r, t)$

Donc: $\lambda' + v' = 0$

$$\Rightarrow \lambda(r) + v(r) = \eta(t)$$

$$\textcircled{B} \Rightarrow e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}$$
$$\lambda = \lambda(r) \Rightarrow m = \text{cte}$$

La solution est alors:

$$ds^2 = - e^{2\eta(t)} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$\text{on} : m = \frac{MG}{c^2}$$

on peut définir un nouveau t_p :

$$dt' = e^{\eta(t)} dt$$

(1)

On utilise donc Schwarzschild.

Donc: toute solution à symétrie
sphérique de vos trous de
champ et électromagnétique
statique. C'A le théorème
de Birkhoff.

Ainsi une étoile pulsante possède le
même champ gravitationnel qu'une
étoile au repos, c-à-d, qu'elle
n'émet pas de radiation gravitationnelle.

32X

Le décalage vers le rouge gravitationnel

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left[- \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right), \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right]$$

ne dépend pas de $x^i = ct \Rightarrow$ on appelle t le temps d'univers.

On considère 2 événements au même pt spatial de l'espace temps de Schwarzschild. La différence dans le temps propre est:

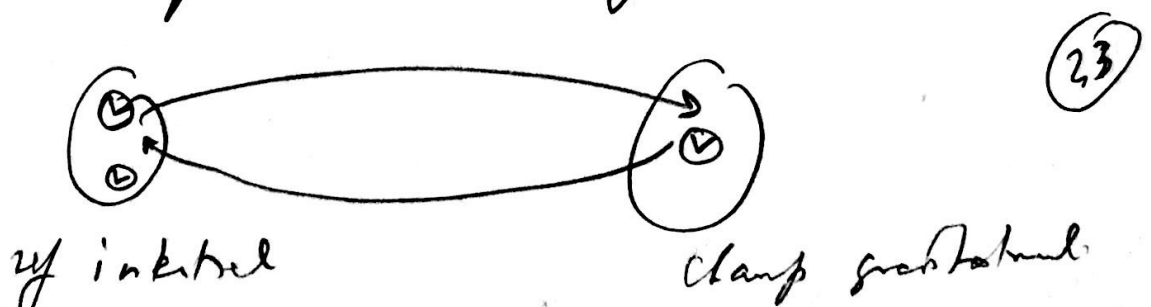
$$d\Delta^2 = -c^2 d\tau^2 = -g_{00} c^2 dt^2$$

$$g_{00}(r) = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)$$

$d\tau$ est mesuré par une horloge en un pt donné
 dt est fixé pour la variété entière.

$g_{00} < 1 \Rightarrow d\tau < dt \Rightarrow$ c-a-d que les horloges ralentissent dans un champ gravitationnel, c-a-d le temps lui-même.

On considère deux horloges synchronisées placées au même pt dans un référentiel.



Plaisantant on se place l'une d'elle pour
une certaine durée dans un champ gravitationnel
puis on la ramène à son pt initial. Les
deux horloges n'affichent pas le même ts
passé. Celle qui a passé par le champ
gravitationnel affiche un ts inférieur. Elle
est plus jeune. Exactement comme l'est
l'un des jumeaux dans le paradoxe
des jumeaux. Par le principe
d'équivalence il y a une équivalence
entre les 2 phénomènes :

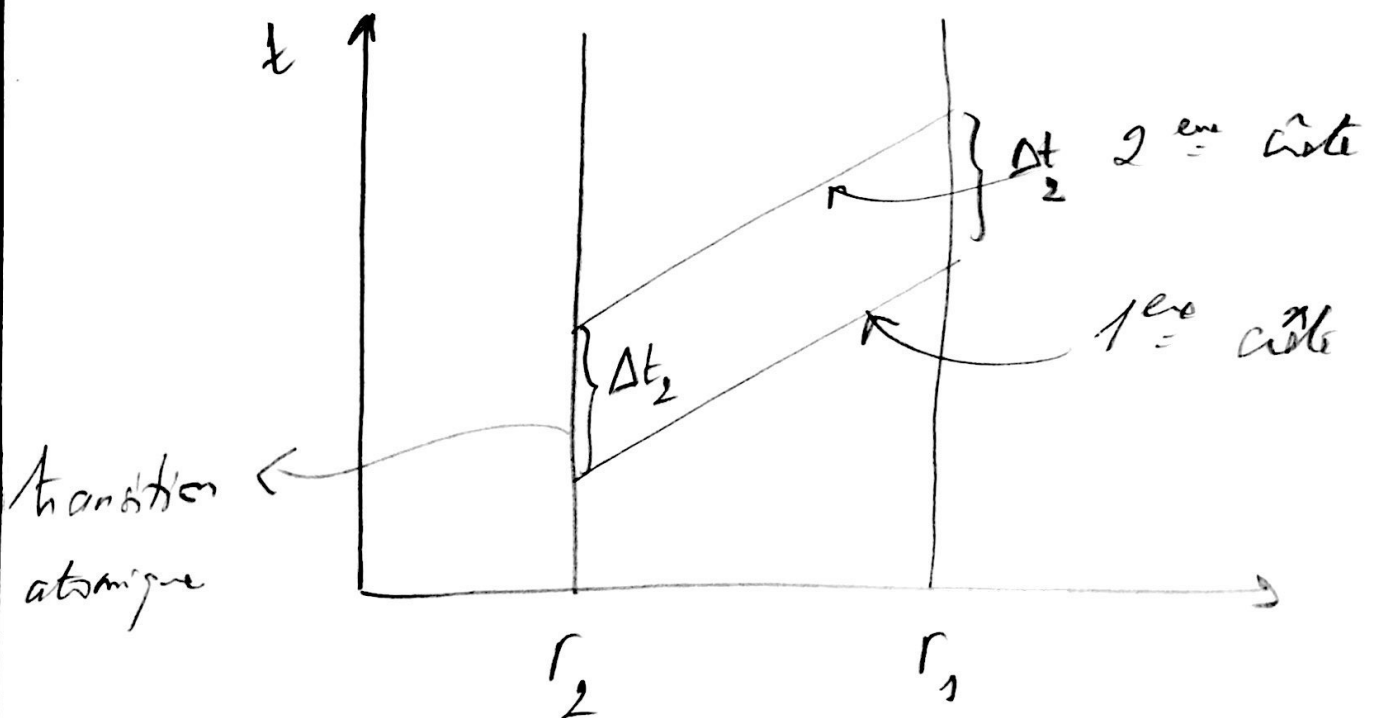
Champ d'accélération (=) Champ gravitationnel.

Comment observe-t-on la distorsion du
ts par un champ gravitationnel ? Supposons
qu'on a un processus physique qui émet
un certain temps après déclenchement (demi-vie
hors d'une désintégration nucléaire, lumière
émise lors d'une transition atomique, ...)

On effectue l'expérience en différents
pts d'un champ gravitationnel et mesure

la différence: On ne pourra rien observer
car le champ gravitationnel
va affecter l'ensemble processus
+ appareillage.

Pour avoir un effet observable on va comparer
la dilatation du temps en 2 pts différents
dans le champ gravitationnel:



Emission de 2 crêtes successives de r_2 vers r_1 .

$\Delta\tau_2$ = intervalle de tps propre entre
2 crêtes successives = période de
la lumière
= (fréquence)⁻¹

(35)

$$d\tau_2 = \frac{1}{\nu_2} = \frac{\lambda_2}{c} = \Delta t_2 \sqrt{g_{00}(r_2)}$$

$$d\tau_1 = \frac{1}{\nu_1} = \frac{\lambda_1}{c} = \Delta t_2 \sqrt{g_{00}(r_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_2)}{g_{00}(r_1)}}$$

ν_1 = fréquence de la lumière émise en r_2
et reçue en r_1 .

ν_2 = " " " " en r_2

et reçue en r_2 .

= " " " " en r_1

et reçue en r_1 .

Supposons que r_2 est la position du Soleil
et r_1 la position de la Terre. Dans
le cas $\frac{2GM}{c^2 r} \ll 1$, alors :

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} \approx 1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

(36)

Comme $r_1 < r_2 \Rightarrow v_1 < v_2 \Rightarrow$ la lumière est décalée vers le rouge. Pour le système téno-solaire.

$$r_2 = R_s = \text{rayon solaire} = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$$

$$r_1 = R = \text{distance - téno - Soleil} \\ = 1,5 \times 10^{11} \text{ m} \gg R_s$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 1 - \frac{GM_s}{R_s c^2} \approx 1 - 2,12 \times 10^{-6}$$

$$\text{Si } v_1 = v_2 + \Delta v \Rightarrow \Delta v = -2,12 \times 10^{-6}$$

On compare le light spectraux du soleil avec celui observé sur terre:

$$\text{Brault } \Delta v|_{\text{obs}} = (1,05 \pm 0,05) \Delta v|_{\text{th.}}$$

(37)

5/ Les géodésiques dans l'espace-temps de Schwarzschild.

Dans sommes intéressés par le mouvement des planètes dans le champ gravitationnel du Soleil, c-à-d le mouvement dans l'espace-temps de Schwarzschild.

Eq des géodésiques.

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0$$

$$\Gamma^t_{tt} = \Gamma^t_{\phi t} = \frac{m}{r(r-2m)}$$

$$\Gamma^r_{rr} = -\frac{m}{r(r-2m)}, \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -(r-2m),$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -(r-2m) \sin^2 \theta, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot \theta,$$

$$ds^2_{\text{ang}} = 0.$$

$$\Rightarrow \ddot{t} + \frac{2m}{r(r-2m)} \dot{t} \dot{r} = 0, \quad \dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \left[\left(1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t} \right] = 0 \quad (58)$$

(58)

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - b = \text{cte}$$

$$N=2: \quad \ddot{\theta} + \int_{-1}^2 x' \dot{x}' \dot{y}' = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \dot{r} \dot{\theta} \ln \theta \dot{\phi} = 0 \quad (6)$$

$$N=3:$$

$$\dot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} + 2 \ln \theta \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \quad (7)$$

$$N=1: \quad \text{on procède autrement:}$$

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = -c^2$$

$$\Rightarrow 1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2}{c^2} \left(\dot{\theta}^2 \ln^2 \theta + \dot{\phi}^2 \right) \quad (8)$$

$$\left[\text{Pour les planètes } ds^2 = 0 \right]$$

Pour simplifier on considère les géodesiques
provenant par un pt L sur l'axe des x.
 $\theta = \pi/2$ et tangente au plan équatorial
 $\dot{\theta} = 0$ (29)

$$\textcircled{1} \rightarrow \ddot{\theta} = 0 \quad \text{et} \quad \textcircled{6} \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \quad \text{façon.}$$

$$\Rightarrow \theta = \pi/2$$

$\Rightarrow$ le mouvement planaire et façon possible.

$$\textcircled{2} \Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 \dot{\phi} = a = \text{cte} \quad \textcircled{e}$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow a \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} \dot{\phi} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{a}{r^2}$$

$$\textcircled{5} \Rightarrow 1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} b^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} a^2$$

$$\times \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{0}{c^2 r^2}$$

$$\Rightarrow 2 \frac{dr}{dt} \left(\frac{1}{r}\right) \frac{dr}{dt} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{(2m c^2)}{a^2} \frac{dr}{dt} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{2m}{r^2} \frac{dr}{dt} \left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dr}{dt} \left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad \text{Car le}$$

$$\frac{1}{2} \frac{dr}{dt} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{m c^2}{a^2} + \frac{3m}{r^2}$$

on a : $\frac{1}{r^4} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 = \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2$

et on multiplie (d') par $(1 - \frac{2m}{r}) / a^2$

$$(1 - 2m/r) \frac{1}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{c^2} * \left(\cancel{1 - \frac{2m}{r}} \right) \frac{1}{a^2} \left(\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \right)^2$$

$$- (1 - 2\frac{m}{r}) \frac{1}{c^2 r^2}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{c^2(b^2 - 1)}{a^2} + \frac{2mc^2}{ra^2} + \frac{2m}{r^3}$$

on dérive par rapport à ϕ :

$$2 \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{2}{r} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{2mc^2}{a^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$+ \frac{6m}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right)$$

on a une première solution :

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \Rightarrow r(\phi) = \text{cte}$$

$\Rightarrow$ le cercle.

L'autre solution est pour laquelle $\frac{d}{d\phi} (1/r) \neq 0$,

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{mc^2}{a^2} + \frac{3m}{r^2} \right]$$

pour un objet massif.

Et $\left[\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3m}{r^2} \right]$
 pour la lumière

Dans ce cas on a $m = \frac{GM}{c^2}$
 où M est la masse du corps gravitant.

Précision des orbites planétaires :

* théorie Newtonienne :

$$u = 1/r, \quad p = \frac{a^2}{m c^2} = \frac{a^2}{GM}$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p} \quad (N1)$$

La quantité p s'appelle

$$p = a_0(1 - e^2)$$

où a_0 est le demi axe majeur et e l'excentricité de l'orbite. La solution générale de (N1) est :

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\phi - \alpha)]$$

où p et α sont deux constantes d'intégration

On peut toujours choisir $\alpha = 0$:

$$\left[\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \phi) \\ e &\geq 0 \end{aligned} \right] \quad (N2)$$

C'est une ellipse d'excentricité e . Si $e = 0$, on a un cercle.

Si $\phi = 0$, on a le pt le plus proche du centre. C'est la périhélie si M est le soleil, et le périée si M est la terre.

• Périgé (peri: autour et gé: terre): pt de l'orbite d'un astre ou d'un satellite artificiel le plus proche de la terre.

• Périhélie (peri: autour, helios: soleil): pt de l'orbite d'une planète le plus proche du soleil.

On observe par l'équation relativiste générale une correction par rapport au résultat Newtonien.
Pour Mercure, $r \approx 6 \times 10^7 \text{ Km}$.

$$\frac{3m}{r^2} / \frac{1}{r} = \frac{3m}{r} = \frac{3GM_0}{c^2 r} \sim 10^{-7}$$

Dans ce cas on utilise (N2) et on

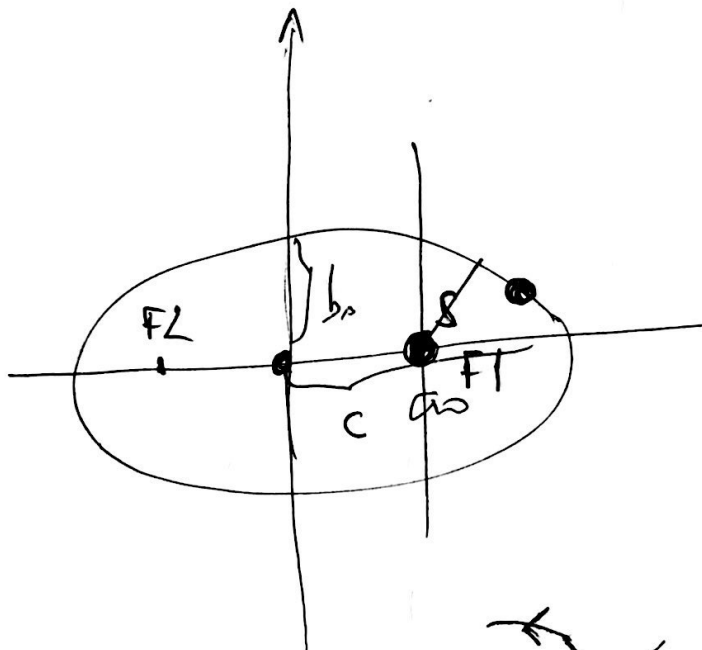
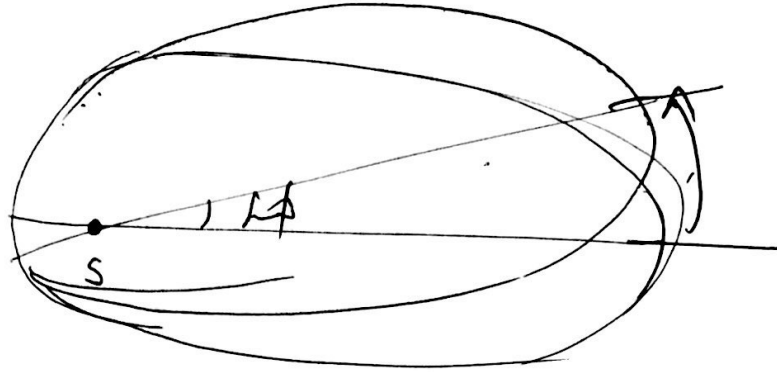
néglige le terme en e^2

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{m c^2}{a^2} + \frac{3m^3 c^4}{a^4} (1 + e \cos \phi)$$

$$\text{(43)} \quad \approx \frac{m c^2}{a^2} + \frac{6m^3 c^4 e}{a^4} \cos \phi$$

$\Delta\phi$ est petit. Mais c'est un effet cumulé. En
un arc de ϕ on a :

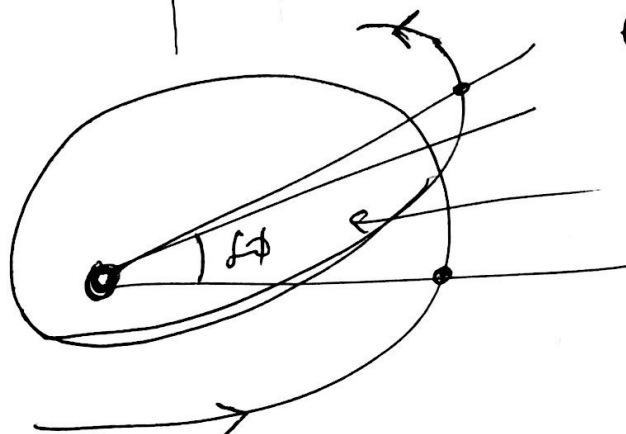
$$\Delta\phi_{100} = 43,03''$$



$$e = \frac{b_0}{a_0}$$

$$e_{\text{moyenne}} \approx 0,205$$

$$e_{\text{max}} \approx 0,216$$



$$43,11'' \pm 0,4$$

44

La solution A le même de (12) plus la solution de

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{6 m^3 c^4}{a^4} e \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{r} &= \frac{m c^2}{a^2} (1 + e \cos \phi) + \frac{6 e m^3 c^4}{a^4} \phi \sin \phi \\ &= \frac{m c^2}{a^2} \left(1 + e \cos \phi + \frac{3 e m^2 c^2}{a^2} \phi \sin \phi \right) \\ &= \frac{m c^2}{a^2} \left(1 + e \cos \left\{ \phi \left(1 - \frac{3 m^2 c^2}{a^2} \right) \right\} \right) + O\left(\frac{m}{r}\right)^2 \end{aligned}$$

Le périhélie survient qd $\frac{1}{r}$ est maximum $\Rightarrow$

$$\cos \left\{ \phi \left(1 - \frac{3 m^2 c^2}{a^2} \right) \right\} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi &= 0, \frac{2\pi}{1 - \frac{3 m^2 c^2}{a^2}}, \frac{4\pi}{1 - \frac{3 m^2 c^2}{a^2}}, \dots \\ &\approx 0, 2\pi \left(1 + \frac{3 m^2 c^2}{a^2} \right), \dots \\ &\approx 0, 2\pi + \delta\phi, \dots \end{aligned}$$

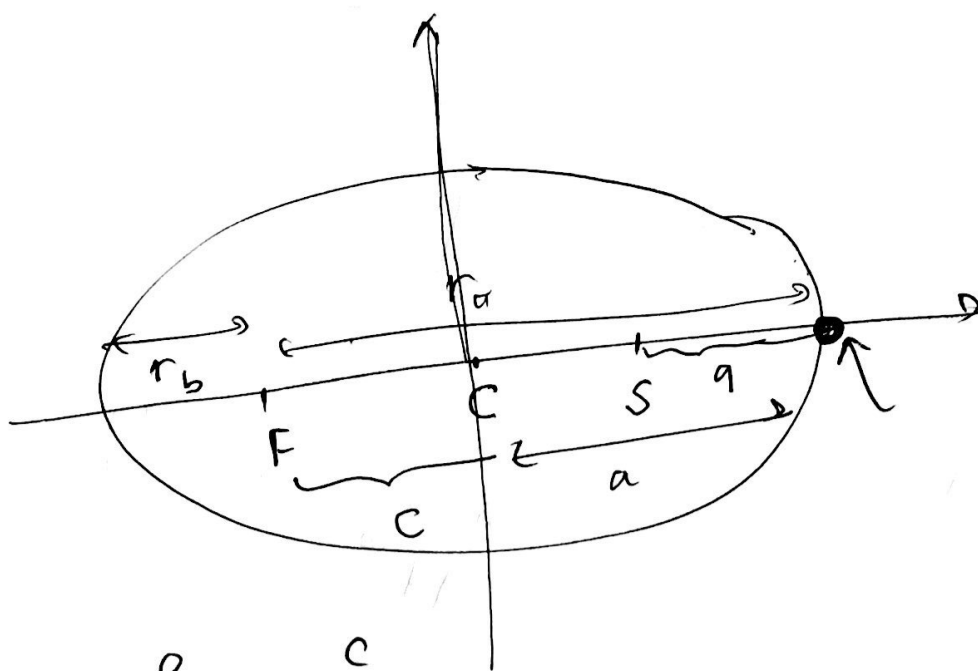
$$\delta\phi = \frac{6\pi m^2 c^2}{a^2} = \frac{6\pi m}{p} = \frac{6\pi M G}{c^2 a_0 (1 - e^2)} \approx 0,1''$$

où : $M = M_{\odot}$

$a_0 =$ demi-axe majeur pour Mercure
 $= 5,79 \times 10^{10}$

$e = 0,21$

(44)



$$e = \frac{c}{a}$$

r_a : rayon à l'apogée: distance maximale
 r_b : " au périapsis: " minimale

(46)

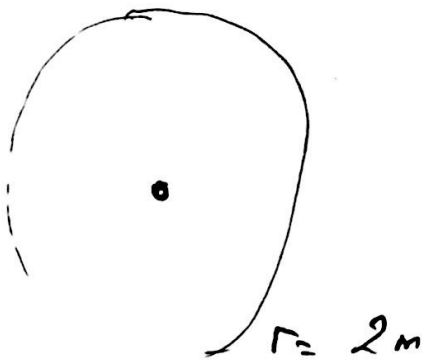
Le mouvement radial dans le champ de Schwarzschild: Trous noirs - Charles Godel.

La forme de la métrique de Schwarzschild suggère que certains phénomènes sont à fait remarquables survenant sur la surface $r = 2GM/c^2 = 2m$.

Considérons le mouvement d'une particule en chute libre radiale dans le champ de Schwarzschild (d'une étoile par exemple.)

On suppose que le pt initial est tel que:

$$r = R, \quad \frac{dr}{dt} = 0$$



A horizontal line with an arrow pointing left towards the black hole. At the right end of the line is a dot representing a particle. Next to the dot is the text $r = R, \frac{dr}{dt} = 0$.

Pour un mouvement radial on a:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2$$
$$= - c^2 d\tau^2$$

et $\dot{t} = dt/d\tau, \quad \dot{r} = dr/d\tau$

(46)

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2$$

$$\text{et } \dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \dot{t}$$

$$\Rightarrow \left[c^2 \left(\frac{r-2m}{r} \right) - \left(\frac{r}{r-2m} \right) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \dot{t}^2 = c^2 \quad (A)$$

$$\text{on a : } r = R, \quad \frac{dr}{dt} \Big|_{r=R} = 0 :$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dt}{d\tau} \right)_{r=R} = \left(\frac{R}{R-2m} \right)^{1/2} \quad (B)$$

$$\text{et } \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = b = \text{cte}$$

$$\Rightarrow b = \left(1 - \frac{2m}{R}\right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)_R = \left(\frac{R-2m}{R} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \left(\frac{r}{r-2m} \right) b = \left(\frac{r}{r-2m} \right) \left(\frac{R-2m}{R} \right)^{1/2}$$

(C)

On remplace (C) dans (A),

$$\frac{dr}{d\tau} = (-) c \frac{(r-2m) \sqrt{2m} \sqrt{R-r}}{r^{3/2} \sqrt{R-2m}} \quad (D)$$

Ce choix est dicté par la chute libre de la particule
en l'absence ($r \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow \infty$).

(47)

Donc:

$$t = -\frac{1}{c} \left(\frac{R-2m}{2m} \right)^{1/2} \int_R^r \frac{p^{3/2} dp}{(p-2m)(R-p)^{1/2}}$$

Cette relation donne le temps que met la particule pour aller de $r = R$ à $r = r_0$ dans le syst de coord de Schwarzschild où t est le paramètre temps, puis si le temps mesuré par une horloge placée à l'infini (c-à-d à t même par un observateur distant).

On a une divergence p.d $p \rightarrow 2m$.

Poseons: $p = 2m + \varepsilon$, $\varepsilon \ll c$

$$\Rightarrow ct = - \left(\frac{R-2m}{2m} \right)^{1/2} \int_{R-2m}^{r-2m} \frac{(2m+\varepsilon)^{3/2}}{\varepsilon (R-2m)^{1/2}} d\varepsilon$$

$$= - 2m \int_{R-2m}^{r-2m} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$= - 2m \ln \left(\frac{r-2m}{R-2m} \right)$$

ou bien:

$$r-2m = (R-2m) e^{-ct/2m}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} \dot{t} = -c \left(\frac{2m}{R} \right)^{1/2} \left(\frac{R-r}{r} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{R}{2m}} \int_R^r \frac{dr'}{\left(\frac{R}{r'} - 1 \right)^{1/2}}$$

On pose $f = r/R \Rightarrow$

$$\tau = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{R^3}{2m}} \int_1^f \frac{df'}{\left(\frac{1}{f'} - 1 \right)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{R^3}{2m}} \left[\sqrt{f(1-f)} \cos^{-1} \sqrt{f} \right] \quad (F)$$

C'est le temps propre de l'effondrement entre $f = \frac{r}{R} = 1$ à $f < 1$. Il est clair que τ est fini $\forall f$, même pour $f = 0$ ($r=0$):

$$\tau_0 = \frac{\pi}{2c} \sqrt{\frac{R^3}{2m}} \quad (G)$$

Finalement rien d'étrange se a par à $r = 2m$. La relation (G) montre que l'objet met un temps propre τ_0 pour tomber dans le centre de l'étoile en ligne avec densité infinie. (F)