Chapter 1

Diffusion d'une particule sans spin par un potentiel central $V(r)$

1.1 Diffusion d'une particule incidente de masse m par un potentiel $V(r)$ ayant son origine fixée au point O

1. $V(r)$ est un potentiel central et local.
2. $V(r)$ vérifie les conditions suivantes:

i) $|V(r)| \leq \frac{C}{r^{1+\epsilon}}$ quand $r \to \infty$.

ii) $|V(r)| \leq \frac{C}{r^{3/2-\epsilon}}$ quand $r \to \infty$.

- $V(r)$ est continu pour $0 < r < \infty$
La condition (1) signifie que lorsque $r \to \infty$, $V(r) \to 0$ plus vite que $\frac{1}{r}$. Le potentiel est un potentiel de courte portée, cette condition exclut le potentiel coulombien (i.e., de longue portée).
La condition (2) exclut les potentiels nucléaires.

1.2 Description d'un phénomène de collision

On considère un système composé d'un faisceau incident et une cible.

1.2.1 Caractéristiques du faisceau incident:

$*$ La nature des particules et leurs masses m.
$*$ La quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ des particules incidentes.

$*$ L'intensité I_0 du faisceau est le nombre de particules qui traversent par unité de temps et par unité d'aire normale à la direction du faisceau, I_0 est suffisamment faible de manière à ce que les interactions entre particules incidentes soient négligeables.

1.2.2 Caractéristiques de la cible:

$*$ La nature des atomes qui constituent la cible
$*$ Le nombre X de centres diffuseurs contenus dans le volume de la cible irradiée par le faisceau.

1.3 Définition de la section efficace

Le détecteur D définit un angle solide $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. On compte le nombre dn de particules diffusées qui traversent par unité de temps le détecteur : $dn \propto d\Omega$, dn dépend des angles θ et φ. Le nombre de particules diffusées dn est également proportionnel à l'intensité et au nombre de centres diffuseurs contenus dans le volume de la cible irradiée par le faisceau, i.e. $dn \propto I_0$ et X. On peut écrire donc,

$$dn = \sigma(\theta, \varphi) I_0 X d\Omega$$

On définit la section efficace différentielle $d\sigma$ comme

$$d\sigma = \frac{dn}{I_0 X} = \sigma(\theta, \varphi) d\Omega$$

1.3.1 Définition

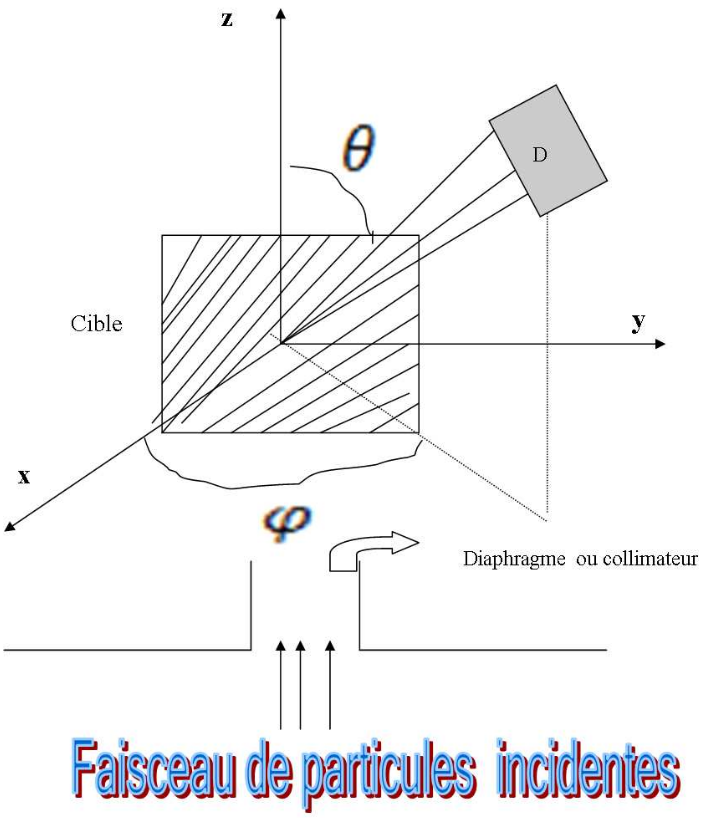
La section efficace différentielle est le nombre de particules qui traversent le détecteur par unité de temps, pour une particule incidente par unité d'aire et par unité de temps et pour une particule cible.

1.3.2 Dimensions de $d\sigma$

$$[d\sigma] = \frac{[dn]}{[I_0]\,[X]} = \frac{[T]^{-1}}{[L]^2[T]^{-1}} = [L]^2$$

$d\sigma$ est une surface, l'unité de mesure de la section efficace est le barn.

$$1barn = 10^{-24} cm^2$$


z
θ
D
Cible
y
x
φ
Diaphragme ou collimateur
Faisceau de particules incidentes

$$1mbarn = 10^{-27}cm^2$$
$$1\mu barn = 10^{-30}cm^2$$

$d\Omega$ en *stradian*, on utilise également le *Fermi*

$$1fm = 10^{-13}cm$$
$$1fm =^2= 10^{-26}cm^2$$

1.4 Principe de calcul de la section efficace différentielle de diffusion d'une particule par un potentiel central $V(r)$ dans le formalisme des états stationnaires

a) L'état stationnaire de collision

1. Calcul de la fonction d'onde

2. Calcul de $\sigma(\theta, \varphi)$ à partir de la fonction d'onde.

Soit $\Psi(\vec{r}, t)$ une fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger

$$H\psi(\vec{r}, t) = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

avec

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)$$

Lorsque $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \implies H = \frac{P^2}{2m} + V(r)$ est indépendant du temps, autrement dit, l'énergie totale E se conserve, on dit que le système est conservatif. La fonction d'onde s'écrit , $\forall t$

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}Et}{\hbar}}$$

Donc, l'équation de Schrödinger s'écrit,

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \qquad (1)$$

où E est l'énergie des particules incidentes.

b) Forme asymptotique de la fonction d'onde de l'état stationnaire de collision

Pour calculer $\psi(\vec{r})$, il faut résoudre l'équation

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

lorsque $r \to \infty$, $V(r)$ est négligeable, donc l'hamiltonien

$$(H \to -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta)$$

devient celui de la particule libre. En coordonnées sphériques (r, θ, φ), la forme asymptotique de la fonction d'onde solution de l'éq.(1) est:

$$\psi^{\infty}(\vec{r}) = A(\theta, \varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} + B(\theta, \varphi)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

la solution est une onde plane de la forme

$$C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

le développement de cette onde en ondes sphériques est

$$C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \longrightarrow \sum_l a_l \mathcal{J}_l(kr)\mathcal{Y}_l^0(\theta)$$

le comportement de la fonction de Bessel quand $r \to \infty$, est donnée par,

$$\mathcal{J}_l(kr) \longrightarrow_{r\to\infty} \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr}$$

Donc, en remplaçant $\mathcal{J}_l(kr)$ par son comportement à l'∞ et en utilisant l'expression

$$\sin(kr - l\pi/2) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr - l\pi/2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kr - l\pi/2)}}{2\mathrm{i}kr}$$

$$\sum_l a_l \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr}\mathcal{Y}_l^0(\theta) = \sum_l a_l[(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\pi/2}}{2\mathrm{i}k}\mathcal{Y}_l^0(\theta))\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} - (\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\pi/2}}{2\mathrm{i}k}\mathcal{Y}_l^0(\theta))\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}]$$

On désigne par

$$A(\theta,\varphi) = a_l \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\pi/2}}{2\mathrm{i}k} \mathcal{Y}_l^0(\theta)$$

$$B(\theta,\varphi) = -a_l \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\pi/2}}{2\mathrm{i}k} \mathcal{Y}_l^0(\theta)$$

Interprétation physique de l'onde $\psi^\infty(\vec{r})$

$\psi^\infty(\vec{r})$ est fonction propre de l'opérateur $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ en coordonnées sphériques.

$$-\hbar^2\Delta = -\hbar^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2}{r^2} = P_r^2 + \frac{L^2}{r^2}$$

P_r est l'opérateur associé à la projection de l'opérateur quantité de mouvement sur le rayon vecteur $\vec{r}$

$$P_r = \frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad P_r = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$$

$$P_r A(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} = \hbar k A(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}$$

$$P_r B(\theta,\varphi)\frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} = -\hbar k B(\theta,\varphi)\frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}$$

Pour une particule libre: $E \geq 0$ et $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \geq 0$
Une onde de la forme

$$A(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}$$

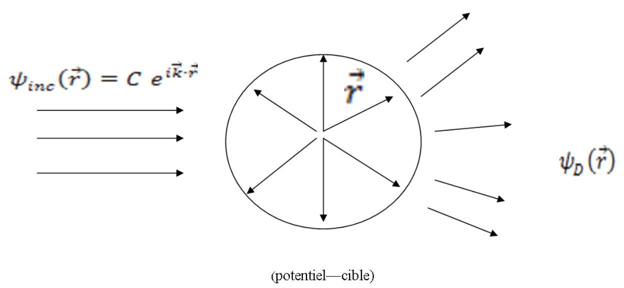
est état propre de P_r pour la valeur propre ($\hbar k$). Elle décrit des particules dont la quantité de mouvement est parallèle au rayon vecteur $\vec{r}$ avec une longueur $\hbar k$, donc des particules qui s'éloignent du centre O, on l'appelle onde sortante (ou divergente).
Une onde de la forme

$$B(\theta,\varphi)\frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}$$

est état propre de P_r pour la valeur propre ($-\hbar k$). Elle décrit les particules qui s'approchent du centre O, on l'appelle onde entrante (ou convergente).

Dans un état stationnaire de collision:
Les particules diffusées sont décrites asymptotiquement par des ondes sortantes.
Les particules incidentes sont décrites asymptotiquement par des ondes entrantes.

$$\psi(\vec{r}) = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} + \psi_D(\vec{r})$$



$$\psi(\vec{r}) - C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} = \psi(\vec{r}) - \psi_{inc}(\vec{r}) \longrightarrow_{\vec{r}\to\infty} Cf(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}$$

l'onde diffusée est:

$$\psi_D(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) - \psi_{inc}(\vec{r})$$

c) Calcul de la section efficace différentielle

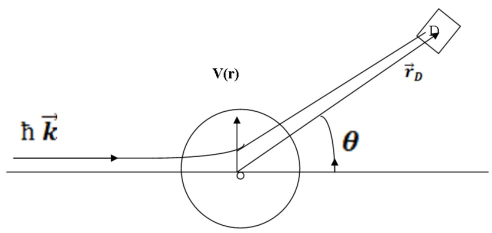
l'équation

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

supposée résolue, c'est-à-dire qu'on connait $\psi(\vec{r})$. Comment calcule t-on la section efficace différentielle $\sigma(\theta, \varphi)$?

$$d\sigma) = \sigma(\theta, \varphi)\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{d\,n}{I_0\, X}$$

I_0 est le flux de l'onde incidente $C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$ à travers l'unité de surface perpendiculaire à $\vec{k}$. $X = 1$ puisque la fonction d'onde a été calculée pour un centre



diffuseur

dn est le flux de l'onde diffusé à travers l'élément de surface: $dS = r_D^2\, \sin\theta\, \varphi$
Le détecteur D est en un point très éloigné du centre diffuseur par rapport à la portée du champ d'interaction du potentiel.
Donc, on calcule dn à partir de la forme asymptotique de $\psi_D(\vec{r})$ i.e.,

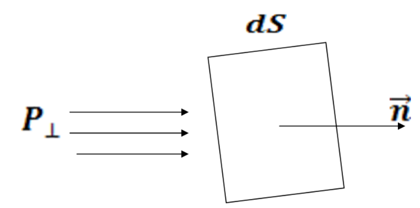
$$C f(\theta, \varphi) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}$$

Flux des particules diffusées

Le flux des particules par unité de temps à travers un élément de surface $d\,S$ situé au point $\vec{r}$ est donné par

$$\frac{1}{2m}[\varphi^*(\vec{r})(P_\perp\varphi(\vec{r})) + (P_\perp\varphi(\vec{r}))^*\varphi(\vec{r})]dS$$

$\varphi(\vec{r})$ est la fonction des particules de masse m. $P_\perp$ est la projection de la quantité de mouvement $\vec{P}$ sur la normale $\vec{n}$.



Calcul de I_0

Si on prend Oz parall̀ele à la direction du faisceau incident

$$P_\perp = P_z = -\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\psi_{inc} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

et

$$I_0 = |C|^2\,\frac{\hbar k}{m}\,dS$$

I_0 représente le flux incident par unité d'aire (donc $dS = 1$) et par unité de temps, d'où

$$I_0 = |C|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

Calcul de dn

$$dS = r_D^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

la normal à dS est donc le rayon vecteur $\vec{r_D}$, donc $P_\perp = P_{r_D}$ avec,

$$P_\perp = P_{r_D} = -\mathrm{i}\hbar(\frac{\partial}{\partial r_D} + \frac{1}{r_D})$$

la forme asymptotique de $\psi_D(\vec{r})$:

$$\psi_D(\vec{r}) = C f(\theta, \varphi) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_D}}{r_D}$$

d'où

$$dn = \frac{1}{2m}[\psi_D^*(\vec{r_D})(P_{r_D}\psi_D(\vec{r_D})) + (P_{r_D}\psi_D(\vec{r_D}))^*\psi_D(\vec{r_D})]dS$$

$$dn = |C|^2 \frac{\hbar k}{m} |f(\theta, \varphi)|^2 \frac{1}{r_D^2} dS = |C|^2 \frac{\hbar k}{m} |f(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

On obtient,

$$d\sigma = \frac{dn}{I_0 \cdot 1} = |f(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

formule de la section efficace différentielle de diffusion
$f(\theta, \varphi)$ est appelée amplitude de diffusion.