Exercices de Mécanique quantique AvancéeII

Exercice 1 (questions de cours)

Sachant que l'expression de la probabilité dépendant du temps est donnée par:

$$\mathcal{P}_{i\to f}(t) = \frac{1}{\hbar^2}|\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{fi}t'} W_{fi}(t')\mathrm{d}t'|^2 \tag{1}$$

Considérer la perturbation d'un système physique provoquée par une pulsation ω:

$$W(\mathbf{t}) = \mathbf{V}\sin\omega\mathbf{t}$$

, (opérateur de la perturbation)
1) Calculer la probabilité de transition $\mathcal{P}_{\mathbf{i}\to\mathbf{f}}(\mathbf{t})$. En fait, cette probabilité dépend aussi d'une autre variable, *à* savoir, la fréquence de l'onde électromagnétique. Fixer le temps t et considérer la probabilité de transition $\mathcal{P}_{\mathbf{i}\to\mathbf{f}}(\mathbf{t},\omega)$ comme une fonction de ω.
2) Examiner ce qui se passe lorsque: $\omega \approx \omega_{\mathbf{fi}}$ ou $\omega \approx -\omega_{\mathbf{fi}}$.
3) Quel est l'effet provoqué par la perturbation $W(t)$ dans les deux cas particuliers suivants:

$$a)\,\omega_{\mathbf{fi}} > \mathbf{0} \qquad\qquad \mathbf{b})\,\omega_{\mathbf{fi}} < \mathbf{0}$$

i) Tracer l'allure de la probabilité de transition $\mathcal{P}_{\mathbf{i}\to\mathbf{f}}(\mathbf{t})$ dans les deux cas précédents (a) et (b).
ii) Quelles sont les limites du calcul au 1^{er} ordre?

Exercice 2

On considère deux spins 1/2, $\vec{S_1}$ et $\vec{S_2}$, couplés par une interaction de la forme $a(t)\,\vec{\mathbf{S_1}}\cdot\vec{\mathbf{S_2}}$; $a(t)$ est une fonction du temps, tendant vers zéro pour $|t|$ tendant vers l'infini, et ne prenant de valeurs appréciables (de l'ordre de a_0) que dans un intervalle dont la largeur est de l'ordre de τ autour de $t=0$.
a). A $t=-\infty$, le système est dans l'état $|+,->$ (état propre de S_{1z} et S_{2z} avec les valeurs propres $+h/2$ et $-h/2$). Calculer sans approximation l'état du système à $t=+\infty$. Montrer que la probabilité $P(+-\longrightarrow -+)$ de trouver, à $t=+\infty$, le système dans l'état $|-,+>$ ne dépend que de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)dt$.
b). Calculer $P(+-\longrightarrow -+)$ en utilisant la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre. Discuter les conditions de validité d'une telle approximation en comparant les résultats obtenus à ceux de la question précédente. c) . On suppose maintenant que les deux spins interagissent en

plus avec un champs magnétique statique $\mathbf{B_0}$ parallele à Oz; l'hamiltonien Zeeman correspondant s'écrit:

$$H_0 = -B_0(\gamma_1 S_{1z} + \gamma_2 S_{2z})$$

ou γ_1 et γ_2 sont les rapports gyromagnétiques des deux spins, supposés différents.
On suppose que : $a(t) = a_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2/\tau^2}$. Calculer $P(+- \longrightarrow -+)$ par la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre, a_0 et τ étant fixés, discuter les variations de $P(+- \longrightarrow -+)$ avec B_0.

Exercice 3

On considère une particule de masse m en mouvement dans le potentiel gaussien défini par :

$$V(x) = V_0 \exp -(\alpha^2 x^2)$$

o$\grave{u}$ V_0 et α sont des constantes positives.
1- Trouver par la méthode des variations lâénergie E_0 de lâétat fondamental et lâénergie E_1 du premier état excité en choisissant pour fonctions dâessai :

$$\begin{aligned} \Psi_0(x,\lambda) &= A \exp(-\lambda x^2) \\ \Psi_1(x,\lambda) &= Bx \exp(-\lambda x^2 \end{aligned} \tag{2}$$

2- Calculer numériquement ces énergies lorsque la particule est un électron et que :

$$V_0 = 1 Rydberg$$

et

$$\alpha = 1/10a_0^2$$

a_0 étant le rayon de Bohr et le *Rydberg* est défini par :

$$R = \frac{h^2}{2mea_0^2}$$

Exercice 4

On considère le problème de la diffusion de particules par une sphère dure et on veut étudier le déphasage $\delta_{\mathbf{1}}(\mathbf{k})$ produit par la sphère dure dans l'onde $\mathbf{p}(\mathbf{l}=\mathbf{1})$ et s'assurer en particulier qu'il devient négligeable devant $\delta_{\mathbf{0}}(\mathbf{k})$ $\grave{a}$ basse énergie.

a) Écrire l'équation donnant la fonction $\phi_{l=1}(r)$ pour $r >>$. Montrer que sa solution générale est de la forme:

$$\phi_{l=1}(r) = C[\frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) + a(\frac{\cos(kr)}{kr} + \sin(kr))]$$

où C et a sont des constantes.
b) Montrer que la définition de $\delta_1(k)$ implique que: $a = \tan \delta_1(k)$
c) Déterminer la constante a $\grave{a}$ partir de la condition imposée $\grave{a}$ $\phi_{l=1}(r$ en $r = R$.
d) Montrer que, pour k tendant vers zéro ($k \to 0$), $\delta_1(k)$ se comporte comme $(kR)^3$, ce qui le rend néglgeable devant $\delta_0(k)$

Exercice 5

On considère la diffusion de particules par un puits de potentiel gaussien de la forme:

$$\mathbf{V_g(r) = V_0 \exp[-r^2/2a^2]}$$

1) Calculer l'amplitude de diffusion $\grave{a}$ l'aide de l'approximation de Born.
2) Calculer la section efficace intégrée de diffusion.

Z.Belghobsi