مقياس فـــــــــــــــــــــــــــــزياء الجسيمات

Physique des Particules:

(5) Électrodynamique des leptons et quarks

M1 Physique Théorique, Département de Physique, Université de Jijel
Année universitaire 2019/2020

Mohamed Sadek ZIDI
mohamed.sadek.zidi@gmail.com

Plan du cours

Dans ce chapitre, on va étudier:

(1) **Électrodynamique quantique**

(2) **Matrices de Dirac**

(3) **Règles de Feynman pour QED**

(4) **Exemples**

- **Réaction** $e^- e^+ \to l^- + l^+$
- **Réaction** $e^- e^+ \to q + \bar{q}$
- ...

Références

- Introduction to Elementary Particles, David Griffiths
- Introduction à la physique des particules, L. Marleau

(1) Électrodynamique quantique

Lagrangien de la QED

L'électrodynamique quantique (ou QED) est une théories quantique relativiste des champs décrivant l'interaction entre les particules électriquement chargées (e, μ, τ, q, $\cdots$), par l'échange d'un photon.

$$\textbf{QED} \equiv (\textbf{EM} + \textbf{MQ} + \textbf{RR}) \times \textbf{QFT}$$

Le lagrangien de la théories est donné par:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi - e\overline{\psi}\gamma^{\mu} A_{\mu} \psi + \cdots$$

- ψ**: champs fermionique (spineur de Dirac)**

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{k^2 + m^2}} \sum_{s=1}^{2} (b_s(k) u_s(k) e^{-ik\cdot x} + d_s^{\dagger}(k) v_s(k) e^{ik\cdot x})$$

- m**: masse du fermion**
- A_{μ}**: champs de jauge (photon!)**

$$A_{\mu}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=1}^{2} (a_{\lambda}(k) \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(k) e^{-ik\cdot x} + a_{\lambda}^{\dagger}(k) \epsilon_{\mu}^{*(\lambda)}(k) e^{ik\cdot x})$$

- $-e\overline{\psi}\gamma^{\mu} A_{\mu} \psi$**: terme d'interaction entre fermion et photon**

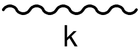
(2) Règles de Feynman pour QED

Propagateurs internes (particules virtuelles)

Propagateur du fermion:

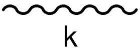
$$\frac{i}{\not{p} - m + i\,\lambda}$$

Propagateur du photon:



$$\frac{-i}{k^2 + i\,\lambda}\left(g^{\mu\,\nu} - (1-\xi)\,\frac{k^\mu\,k^\nu}{k^2 + i\,\lambda}\right)$$

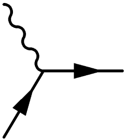
Dans la jauge de Feynman, $\xi = 1$. Donc, le propagateur du photon devient



$$-\,i\,\frac{g^{\mu\,\nu}}{k^2 + i\,\lambda}$$

Vertex

Vertex fermion-fermion-photon:



$$-\,i\,e\,\gamma^{\mu}$$

Ce vertex décrit l'interaction entre les fermions et le photon. Il est tiré du terme d'interaction $e\overline{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi$.

Propagateurs fermioniques externes (particules réelles)

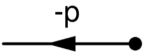
Fermion entrant avec une impulsion p et hélicité l:

$$u_l(p)$$

Fermion sortant avec une impulsion p et hélicité l:

$$\bar{u}_l(p)$$

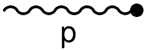
Anti-fermion entrant avec une impulsion p et hélicité l:



$$\bar{v}_l(p)$$

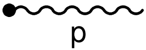
Propagateur photonique externes (photon réel)

Photon entrant avec une impulsion k et polarisation λ:



$$\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$$

Photon sortant avec une impulsion k et polarisation λ::



$$\epsilon_\mu^{*(\lambda)}(k)$$

(3) Matrices de Dirac

Trace des matrices de Dirac

- **L'anti-commutateur:**

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \qquad\qquad g^\mu_\mu = 4$$

- **Contractions:**

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4 \qquad\qquad \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma^\mu = -2\gamma_\alpha$$

$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\mu = 4g_{\alpha\beta} \qquad\qquad \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma^\mu = -2\gamma_\delta\gamma_\alpha\gamma_\alpha$$

- **Trace de deux et trois matrices de Dirac:**

$$\begin{aligned} Tr\left[\gamma^\alpha\,\gamma^\beta\right] &= 4\,g^{\alpha\beta} \\ Tr\left[\gamma^\alpha\,\gamma^\beta\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\right] &= 4\,\left(g^{\alpha\beta}\,g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}\,g^{\beta\mu} - g^{\alpha\mu}\,g^{\beta\nu}\right) \end{aligned}$$

- **La trace est cyclique:**

$$Tr\left[\gamma^{\alpha_1}\,\gamma^{\alpha_2}\cdots\gamma^{\alpha_n}\right] = Tr\left[\gamma^{\alpha_n}\,\gamma^{\alpha_1}\cdots\gamma^{\alpha_{n-1}}\right] = Tr\left[\gamma^{\alpha_{n-1}}\,\gamma^{\alpha_n}\cdots\gamma^{\alpha_{n-2}}\right] = \cdots$$

- **Trace de produit impaire de matrices γ est nulle:**

$$Tr\left[\gamma^{\alpha_1}\,\gamma^{\alpha_2}\cdots\gamma^{\alpha_n}\right] = 0 \;\; \textbf{si}\; n = 2\,m + 1$$

Trace des $\not{p}$

- p**-slash:** $\not{p} = \gamma_\mu p^\mu$
- **Si** p_1,p_2,...p_n **sont des quadri-vecteurs:**

$$
\begin{aligned}
Tr\left[\not{p}_1\,\not{p}_2\right] &= p_1^\mu p_2^\nu Tr\left[\gamma_\mu\gamma_\nu\right] \\
&= 4\,p_1.p_2 \\
Tr\left[\not{p}_1\,\not{p}_2\,\not{p}_3\,\not{p}_4\right] &= 4\left(p_1.p_2\,p_3.p_4 + p_1.p_4\,p_2.p_3 - p_1.p_3\,p_2.p_4\right) \\
Tr\left[\not{p}_1\,\not{p}_2\,\cdots\,\not{p}_{2n}\right] &= p_1.p_2\,Tr\left[\not{p}_3\,\not{p}_4\,\cdots\,\not{p}_{2n}\right] \\
&- p_1.p_3\,Tr\left[\not{p}_2\,\not{p}_4\,\cdots\,\not{p}_{2n}\right] \\
&+ \cdots \\
&+ p_1.p_{2n}\,Tr\left[\not{p}_2\,\not{p}_3\,\cdots\,\not{p}_{2n-1}\right]
\end{aligned}
$$

Relations utiles

- **Spineurs de Dirac:**

$$\sum_{s=1}^{2} u_s(k)\bar{u}_s(k) = \not{k} + m$$

$$\sum_{s=1}^{2} v_s(k)\bar{v}_s(k) = \not{k} - m$$

- **Vecteurs de polarisation:**

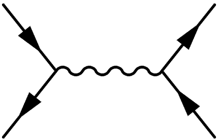
$$\sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)\epsilon_\nu^{*(\lambda)}(k) = -g_{\mu\nu}$$

(jauge de Feynman)

(4) Exemples

Réaction $e^-(p_2) + e^+(p_2) \to \mu^-(p_3) + \mu^+(p_4)$

Considérons la réaction:



- **Section efficace différentielle:** est la probabilité de transition dans l'état final $\mu^+\mu^-$ avec des impulsions comprises entre $\vec{p_3}$ et $\vec{p_3} + d\vec{p_3}$:

$$d\sigma = \frac{1}{4\,E_1\,E_2\,v_{rel}}\,(2\,\pi)^4\,\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)\,\frac{d^3\vec{p}_3}{(2\,\pi)^3\,2\,E_3}\,\frac{d^3\vec{p}_4}{(2\,\pi)^3\,2\,E_4}|M|^2$$

v_{rel} est la vitesse relative des particules incidentes.

- **Amplitude de diffusion:**

$$M = i\,e^2\,\bar{v}_{l_2}(p_2)\,\gamma_\mu\,u_{l_1}(p_1)\left(g^{\mu\,\nu} - (1-\xi)\,\frac{k^\mu\,k^\nu}{k^2 + i\,\lambda}\right)\frac{1}{k^2 + i\,\lambda}\,\bar{u}_{l_3}(p_3)\,\gamma_\nu\,v_{l_4}(p_4) \tag{1}$$

avec $k = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$.

- **Dans la jauge de Feynman ($\xi = 1$), M s'écrit:**

$$M = i\, e^2\, \bar{v}_{l_2}(p_2)\, \gamma_\mu\, u_{l_1}(p_1)\, \frac{1}{k^2}\, \bar{u}_{l_3}(p_3)\, \gamma_\mu\, v_{l_4}(p_4)$$

- **On doit calculer le carré de l'amplitude sommé et moyenné sur les spin:**

$$|\overline{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{l_1=1}^{2} \sum_{l_2=1}^{2} \sum_{l_3=1}^{2} \sum_{l_4=1}^{2} |M|^2$$

- **Alors:**

$$\begin{aligned} |\overline{M}|^2 \quad &= \quad \frac{e^4}{4\,k^4} \sum_{l_1=1}^{2} \sum_{l_2=1}^{2} \sum_{l_3=1}^{2} \sum_{l_4=1}^{2} \Bigg[\bar{v}^{\alpha}_{l_2}(p_2)\, \gamma_\mu^{\alpha\,\beta}\, u^{\beta}_{l_1}(p_1) \left(\bar{v}^{\alpha'}_{l_2}(p_2)\, \gamma_\nu^{\alpha'\,\beta'}\, u^{\beta'}_{l_1}(p_1) \right)^\dagger \\ &\times\, \bar{u}^{\gamma}_{l_3}(p_3)\, \gamma_\mu^{\gamma\,\delta}\, v^{\delta}_{l_4}(p_4) \left(\bar{u}^{\gamma'}_{l_3}(p_3)\, \gamma_\nu^{\gamma'\,\delta'}\, v^{\delta'}_{l_4}(p_4) \right)^\dagger \Bigg] \end{aligned}$$

- **avec**

$$\left(\bar{v}_{l_2}(p_2)\, \gamma_\nu\, u_{l_1}(p_1) \right)^\dagger = \bar{u}_{l_1}(p_1)\, \gamma_\nu\, v_{l_2}(p_2)$$

- **On utilise:**

$$\sum_{s=1}^{2} u_s(k)\bar{u}_s(k) = \not{k} + m \qquad\qquad \sum_{s=1}^{2} v_s(k)\bar{v}_s(k) = \not{k} - m$$

- **On trouve:**

$$|\overline{M}|^2 = \frac{e^4}{4\,k^4} Tr\Big[(\not{p}_2 - m_e)\,\gamma_\mu\,(\not{p}_1 + m_e)\,\gamma_\nu\Big]\,Tr\Big[(\not{p}_3 + m_\mu)\,\gamma_\mu\,(\not{p}_4 - m_\nu)\,\gamma_\nu\Big]$$

- **On calcule les deux trace à l'aide des relations données ci-dessus. Après simplification, on trouve:**

$$|\overline{M}|^2 = \frac{8\,e^4}{k^4}\Big\{p_2.p_3\,p_1.p_4 + p_2.p_4\,p_1.p_3 + m_e^2\,p_3.p_4 + m_\mu^2\,p_1.p_2 + 2\,m_e^2\,m_\mu^2\Big\}$$

- **On néglige les masses (juste pour simplifier le calcul), on écrit donc:**

$$|\overline{M}|^2 = \frac{8\,e^4}{k^4}\Big\{p_2.p_3\,p_1.p_4 + p_2.p_4\,p_1.p_3\Big\}$$

- **On exprime l'amplitude en fonction des variables de MandelStam:**

$$s = (p_1 + p_2)^2 \qquad t = (p_1 - p_3)^2 \qquad u = (p_1 - p_4)^2$$

$$|\overline{M}|^2 = 2\, e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2}$$

- **On calcule, maintenant, la section efficace toatle:**

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1.p_2)^2}} \frac{1}{(2\,\pi)^2} \int \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3\vec{p}_3}{2\,E_3} \frac{d^3\vec{p}_4}{2\,E_4} |\overline{M}|^2$$

- **On utilise:**

$$\int \frac{d^3\vec{p}_4}{2E_4} = \int d^4p_4 \delta^+(p_4^2)$$

- **On intègre sur p_4:**

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1.p_2)^2}} \frac{1}{(2\,\pi)^2} \int \frac{|\vec{p}_3|^2\, d|\vec{p}_3|}{2\,E_3} d\Omega_3\, \delta^+((p_1 + p_2 - p_3)^2)|\overline{M}|^2$$

- **On se place dans le référentiel CM:** $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = \vec{0}$ **et**

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2}\begin{pmatrix}1\\\sin(\theta)\\0\\\cos(\theta)\end{pmatrix} \qquad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}\begin{pmatrix}1\\-\sin(\theta)\\0\\-\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

- **Pour linéariser l'argument de la fonction δ, on utilise:**

$$\delta(g(x)) = \sum_i \delta(x - x_i)/|g'(x_i)|$$

alors:

$$\delta^+((p_1 + p_2 - p_3)^2) = \delta^+(s - 2\sqrt{s}|\vec{p}_3|) = \frac{\delta(|\vec{p}_3| - \sqrt{s}/2)}{2\sqrt{s}}$$

- **Donc:**

$$\sigma = \frac{1}{32\pi^2 s^{3/2}} \int |\vec{p}_3|\, d|\vec{p}_3| d\Omega_3\, \delta(|\vec{p}_3| - \sqrt{s}/2)|\overline{M}|^2$$

- **L'intégration sur $|\vec{p}_3|$ (grâce à la fonction δ):**

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta |\overline{M}|^2$$

avec

$$d\Omega_3 = \sin(\theta) d\theta d\phi$$

- **Intégrant sur ϕ:**

$$\sigma = \frac{1}{32\pi s}\int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta |\overline{M}|^2$$

- **On a:**

$$t = s(1-\cos(\theta))/2 \qquad\qquad u = s(1+\cos(\theta))/2$$

donc

$$|M|^2 = e^4(1+\cos(\theta)^2) = 16\pi^2\alpha^2(1+\cos(\theta)^2)$$

avec $\alpha = e^2/(4\pi)$.

- Alors,

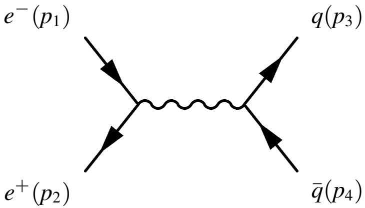
$$\sigma = \frac{\pi}{2s}\alpha^2 \int_{-1}^{+1} d\cos(\theta)(1+\cos(\theta)^2)|\overline{M}|^2$$

- Intégrant sur θ, on trouve:

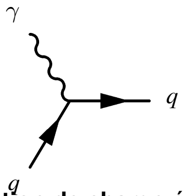
$$\sigma = \frac{4\pi}{3s}\alpha^2$$

Réaction $e^-(p_2) + e^+(p_2) \to q(p_3) + \bar{q}(p_4)$

Considérons la réaction:



Le vertex quark-quark-photon est donné par:



$$-\,i\,e\,Q_q\gamma^\mu$$

où Q_q est la fraction de charge électrique portée par les quarks.
$Q_q = 2/3$ pour les quarks up et $Q_q = -1/3$ pour les quarks down.

Sans refaire le calcul, on déduit que:

- **Carré de l'amplitude sommé et moyenné sur spin et couleurs:**

$$|\overline{M}|^2 = 3 \times 2\, e^4 Q_q^2 \frac{t^2 + u^2}{s^2}$$

- **Section efficace totale:**

$$\sigma = 3 \times \frac{4\pi}{3s} \alpha^2 Q_q^2$$

- **On note qu'on doit multiplier le résultats par le facteur de couleur (3 en rouge!) car le carré de l'amplitude est sommé sur les couleurs des quarks de l'état final.**