

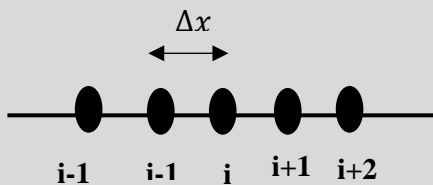
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifiques
Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel

Faculté des Sciences et
Technologie
Département de Génie
Civil et Hydraulique



كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم الهندسة المدنية والري

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$$



MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES (Master I Géotechnique)

Élaboré par : Dr Goudjil Kamel
k_goudjil@yahoo.com

Année scolaire : 2019/2020

Avant-propos

Ce document fournit une introduction à la méthode des différences finies. Cette méthode est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles. En plus des détails de MDF, des programmes en code Matlab sont présentés après chaque activité. Ce document est destiné au master I géotechnique, pour cette raison, nous avons basé dans les exemples sur ceux représentant les problèmes de géotechnique.

Le contenu de ce cours est conforme au canevas 2016/2017 dont les chapitres sont donnés ci-dessous.

Chapitre 1 : Principes généraux

Chapitre 2 : Différents schémas d'approximations de différences finies

Chapitre 3 : Formules d'approximation multidimensionnelle

Chapitre 4 : Implémentation de la méthode des différences finies

- Études des cas réels

Objectifs de l'enseignement :

Ce cours a pour objet d'initier l'étudiant de géotechnique au calcul des ouvrages géotechniques par la méthode des différences finies.

Connaissances préalables recommandées :

Analyse mathématique, Calcul matriciel, Résistance des matériaux, Mécanique des sols.

Table des matières

Chapitre I : Principe généraux de MDF	4
1.1 Définition.....	4
1.2 L'application de MDF aux problèmes de géométries complexes	4
1.2.1. Maillage aux limites ajustées (Boundary Fitted Grids)	4
1.2.1. Méthode des limites immergées (Immersed Boundary Method).....	5
1.3. Maillage de différences finies.....	5
1.3.1 Notation indicielle en MDF	5
1.3.2. Types de maillage	7
1.4. Équation différentielle	7
1.4.1. Classification des équations différentielles ordinaires et partielles	8
1.4.2. Problèmes géotechniques en termes d'équations différentielles.....	9
Chapitre II : Différents schémas d'approximations de différences finies	12
2.1 Approximations de différences finies de la 1 ^{ère} dérivée	12
2.1.1. Approximations développées à partir de la série de Taylor.....	12
2.1.2. Procédure générale basée sur la série de Taylor	13
2.1.3. Approximation de la 1 ^{ère} dérivée par l'approche polynomiale	15
2.2 Approximations de différences finies de la 2 ^{ème} dérivée	16
2.2.1. Approximations développées à partir de la série de Taylor.....	16
2.2.2. Procédure générale basée sur la série de Taylor	17
2.2.3. Approximation de la 2 ^{ème} dérivée par l'ajustement polynomial	20
Chapitre III : Formules d'approximation multidimensionnelle	22
3.1. Approximation de la dérivée multidimensionnelle du premier ordre.....	22
3.2. Approximation de la dérivée multidimensionnelle du second ordre	23
3.3. Approximation de la dérivée mixte du second ordre.....	23
Chapitre IV : Implémentation de la méthode des différences finies	25
4.1. Introduction	25
4.2 Implémentation des conditions aux limites	25
4.3. Système algébrique des différences finies.....	27
4.3.1 Notation boussole.....	27
4.4. Étude de cas réels	28
4.4.1. Problème n°1 : calcul de la flèche d'une poutre sur deux appuis simples.....	28
4.4.2. Problème n°2 : Calcul de la flèche de poutre console	32
4.4.3. Problème de consolidation en 2D	33

Cours : Méthode des différences finies

Chapitre I : Principe généraux de MDF

1.1 Définition

Méthode des différences finies est une méthode numérique ancienne. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18^{ème} siècle (Euler, Taylor, Leibniz...). Cette méthode est destinée à la résolution d'équations différentielles en remplaçant les dérivées par des expressions algébriques en termes de variables de champ tels que : la contrainte, déplacement ou déformation et vitesse. Ces décrites variables de champ sont données à des points discrétisés (appelés nœuds). Les avantages de la méthode de différences finies sont :

- a) Grande simplicité en termes de formulation et programmation pour les problèmes de géométrie simple,
- b) Faible coût de calcul

1.2 L'application de MDF aux problèmes de géométries complexes

MDF a également été adoptée pour traiter les problèmes de géométries complexes en utilisant le concept (Méthode des limites immergées) et le concept du maillage aux limites ajustées. Les deux concepts cités ci-dessus sont la traduction de (Immersed Boundary Method) et (Fitted Boundary Grid). Dans ce qui suit, on va décrire ces deux concepts.

1.2.1. Maillage aux limites ajustées (Boundary Fitted Grids)

L'idée est de remplacer le domaine de recherche de géométrie complexe par un autre domaine rectangulaire cartésien appelé domaine de calcul. Pour ce faire, on choisit 4 pts de telle manière ces derniers soient aux extrémités. Le principe de cette méthode est illustré par les deux figures ci-dessous.

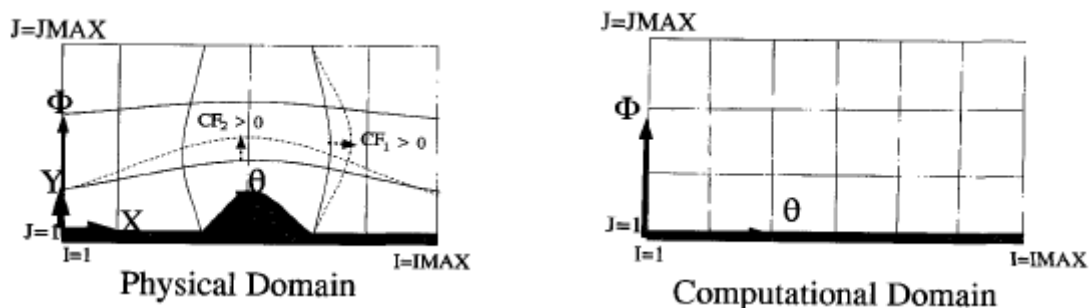


Figure 1.1. Concept du maillage aux limites ajustées [1]

1.2.1. Méthode des limites immergées (Immersed Boundary Method)

Dans la dynamique des fluides numérique, la **méthode des limites immergées (Immersed Boundary Method)** faisait initialement référence à une approche développée par Charles Peskin en 1972 pour simuler des interactions fluide-structure. Cette méthode est basée sur l'immersion du domaine de recherche dans une grille cartésienne comme illustré dans la figure ci-dessous. Les limites courbées sont prises en considération en introduisant des fonctions forces telles que les forces de masses ou de volume.

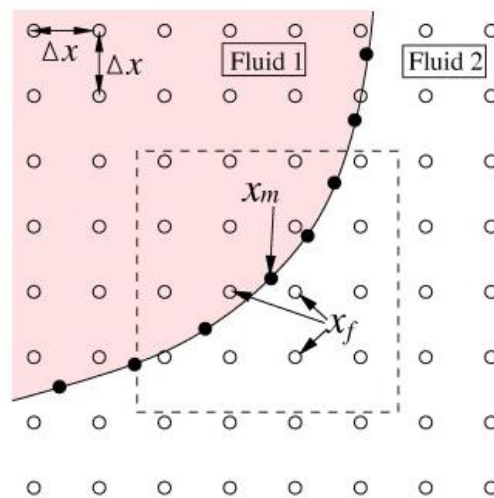


Figure 1.2. Schéma de la méthode des limites immergées [2]

Avant d'exposer la procédure suivie pour résoudre un problème par de la méthode des différences finies, on va définir d'abord quelques notions basiques de MDF.

1.3. Maillage de différences finies

1.3.1 Notation indicielle en MDF

Dans un problème unidimensionnel, le maillage est représenté par un ensemble de segments droits connectés entre eux par des points appelés nœuds ou points discrets. Ces points sont identifiés par un indice tel que i où on note u_i la valeur de $u(x)$ au point x_i . Par contre, dans un problème de 2D le maillage est représenté par une grille formée par des lignes et des colonnes dont leurs intersections sont des points appelés nœuds. Ces derniers sont identifiés par les indices de ces lignes et colonnes.

- a)** Nœud i représente le point discret u_i au point $x=x_i$ en 1D,
- b)** Nœud (i, j) représente le point discret $u_{i,j}$ au point de l'intersection des lignes $x=x_i$ et $y=y_j$ en 2D,

c) Nœud (i, j, k) représente le point discret $u_{i,j,k}$ au point d'intersection des lignes $x=x_i$, $y=y_j$ et $z=z_k$ en 3D.

d) Le pas de discrétisation est noté par l'indice du nœud de début de segment comme suit :

$$\nabla x_i = x_{i+1} - x_i \text{ et } \nabla x_{i-1} = x_i - x_{i-1} \quad \text{en 1D}$$

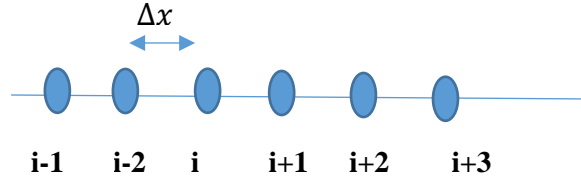


Figure 1.3. Grille de différences finies en 1D

Dans un problème multidimensionnel, le pas de discrétisation peut être donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \\ \Delta y_j = y_{j+1} - y_j \\ \Delta z_k = z_{k+1} - z_k \end{cases} \quad (1.1)$$

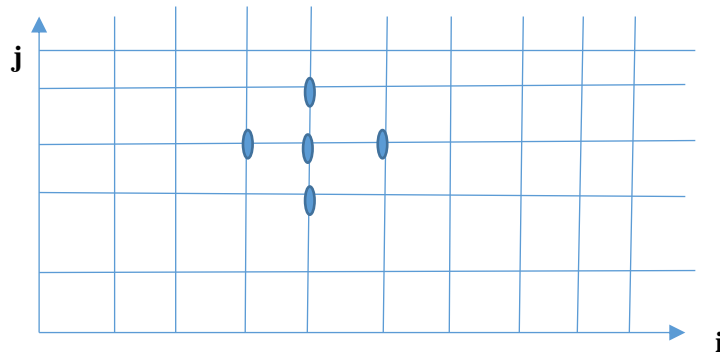


Figure 1.4. Grille des différences finies en 2D

e) Les valeurs ponctuelles d'une fonction aux points discrets sont également identifiées par les indices des nœuds du maillage.

$$f(x_i) = f_i \quad (1.2)$$

$$f(x_i, y_j) = f_{ij} \quad (1.3)$$

$$f(x_i, y_i, z_i) = f_{ijk} \quad (1.3)$$

1.3.2. Types de maillage

Le maillage peut être uniforme ou non-uniforme, cela dépend de plusieurs facteurs. Par exemple, si on veut trouver des solutions plus précises, on doit raffiner le maillage dans des endroits où il y a une concentration des contraintes ou des déformations ou quoi ce soit l'information cherchée. Ce qui nous donne un maillage non-uniforme.

On dit que le maillage est uniforme dans un problème unidimensionnel si :

$$\nabla x_{i-2} = \nabla x_{i-1} = \nabla x_i = \nabla x_{i+1} = \dots = \nabla x \quad (1.4)$$

En 2D, le maillage est uniforme si :

$$\nabla x_{i-1} = \nabla x_i = \nabla x_{i+1} = \dots = \nabla X \quad (1.5)$$

$$\nabla y_{i-1} = \nabla y_i = \nabla y_{i+1} = \dots = \nabla y \quad (1.6)$$


Si une des équations ci-dessus ne vérifiée pas, on dit que le maillage est non-uniforme. Avant d'exposer les différentes approches utilisées pour déterminer les formules et les schémas d'approximation des dérivées contenant dans les équations différentielles, nous allons d'abord présenter un aperçu sur les équations différentielles.

1.4. Équation différentielle


En mathématiques, une **équation différentielle** est une équation dont la ou les inconnues sont des fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.

On distingue généralement deux types d'équations différentielles :

- les équations différentielles ordinaires (EDO) où la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable (équation 1.7) ;
- les équations différentielles partielles, plutôt appelées équations aux dérivées partielles (EDP), où la ou les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables indépendantes (équation 1.8).

 **Équation de la flèche d'une poutre**

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} \right) = \frac{M_f}{EI} \quad (1.7)$$

 **Équation de consolidation du sol en 2D**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = c_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.8)$$

Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire à une seule variable ; les problèmes comportent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrées par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP, les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction.

Les EDP sont omniprésentes dans les sciences puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme (équations de Maxwell), ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP.

Les équations différentielles se divisent principalement en EDO et EDP. Également ses deux dernières se classent selon d'autres critères :

- a) Linéaire ou non linéaire
- b) Selon l'ordre de dérivée, 1^{er} ordre, second, ..., etc

1.4.1. Classification des équations différentielles ordinaires et partielles

Les équations différentielles ordinaires (EDO) se classifient selon deux critères : L'ordre de la dérivée et le type de fonction linéaire ou non linéaire. **Une équation différentielle est dite linéaire** si le degré de puissance de la fonction inconnue et ses dérivées égale à 1. Dans le cas contraire, c'est-à-dire leurs degrés supérieurs à 1, sont dites non linéaires. Cette condition toute seule ne suffit pas, il faut également que la fonction inconnue ne soit pas multipliée par ses dérivée. Pour le deuxième critère, l'équation est dite du 1^{er} ordre, si elle contient que la 1^{ère} dérivée. Si elle contient la 2^{ème} dérivée, elle est dite du second ordre ainsi de suite.

Exemples d'équations différentielles ordinaires (ODE)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M_f}{EI}$$

ODE linéaire du second ordre (équation de la flèche d'une poutre)

$$\frac{\partial u}{\partial t} \times u = 0$$

ODE non-linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = 0$$

ODE linéaire du 1^{er} ordre

✚ Exemple d'équations différentielles partielles (EDP)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = c_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Linéaire du second ordre (équation de consolidation des sols en 2D)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

linéaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6U \frac{\partial u}{\partial x}$$

Non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}\right) r^2 s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + r * s \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

linéaire

Comme ce cours est destiné aux étudiants de géotechnique, nous allons se contenter des équations différentielles qui représentent les problèmes géotechniques

1.4.2. Problèmes géotechniques en termes d'équations différentielles

✚ L'équation de Laplace (Équation d'écoulement d'eau en régime permanent en 3D)

L'équation de Laplace est une équation aux dérivées partielles du second ordre, dont le nom est un hommage au physicien mathématicien Pierre-Simon de Laplace. L'équation de Laplace apparaît dans de nombreuses autres branches de la physique théorique : astronomie, électrostatique, mécanique des fluides, propagation de la chaleur, diffusion, mouvement brownien, mécanique quantique. Elle est représentée graphiquement par la figure (1.5) et l'équation (1.9).

Où

V : Représente la vitesse de la molécule d'eau à l'instant t et au point de coordonnées (x, y, z) .

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1.9)$$

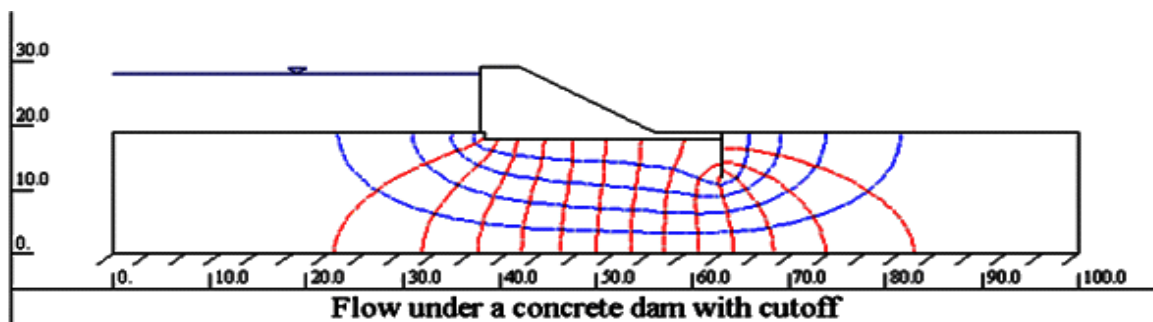


Figure 1.5. Représentation graphique de l'équation de Laplace [3]

✚ Équation d'écoulement Souterrain (écoulement transitoire en 3D)

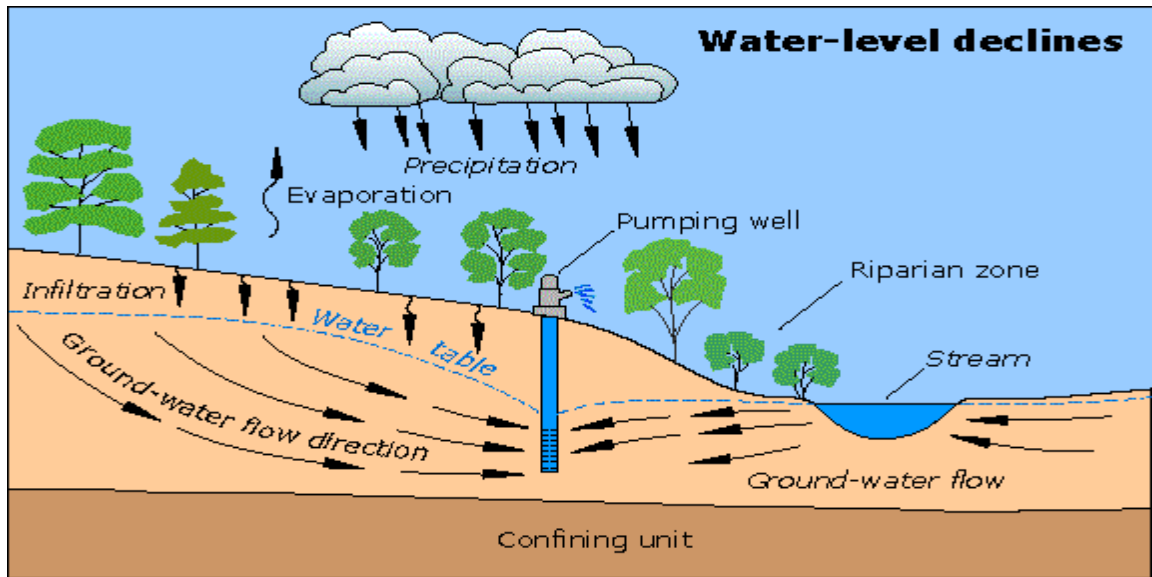


Figure 1.6. Schéma d'écoulement souterrain [3]

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right] - G \quad (1.10)$$

✚ Équation de mouvement d'un système de vibration forcé amorti

L'équation du mouvement d'un système de vibration forcé et amorti peut être représentée par l'équation différentielle 2.

Où **M** : Masse du ressort $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(2\pi ft)$
C : coefficient d'amortissement (1.11)
K : Rigidité

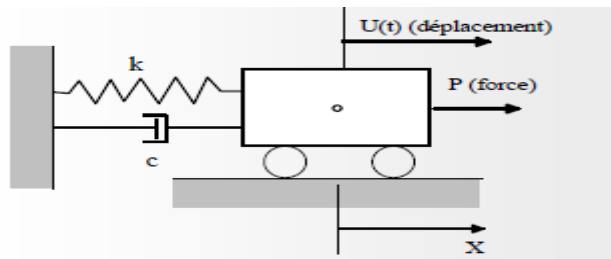


Figure 1.7. Schéma d'un système forcé amorti

✚ Équation d'onde sismique dans le sol

L'onde sismique dans le sol peut être représentée par une équation différentielle du second ordre. Cette dernière est donnée par l'équation (1.12).

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1.12)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad \text{Équation d'onde en fonction de la célérité}$$

$$c^2 = \frac{k}{\rho_0} \quad \begin{array}{l} \text{Équation de la vitesse d'onde sismique} \\ \rho_0 : \text{Masse volumique du sol} \end{array}$$

✚ Problème de consolidation des sols fins

Où

u : Pression interstitielle ;

C_v : coefficient de
consolidation vertical

C_h : Coefficient de
consolidation horizontal

z : Coordonnée verticale

x : Coordonnée horizontale

✚ Problème de consolidation en 1D

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.13)$$

✚ Problème de consolidation en 2D

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = c_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.14)$$

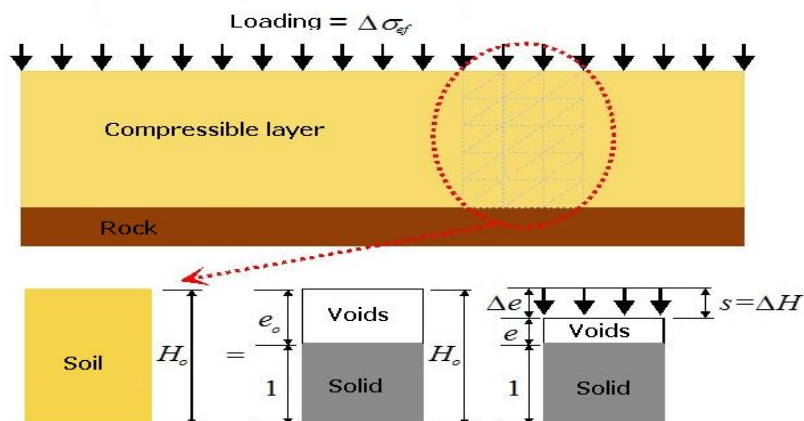


Figure 1.8. Schéma représentant le concept de consolidation des sols fins

Chapitre II : Différents schémas d'approximations des différences finies

Les différentes approches utilisées pour trouver les schémas d'approximations des dérivées en points discrets sont multiples. Parmi ces dernières, on cite :

- ✚ Développement de la série de Taylor
- ✚ Procédure générale de (Chung, 2010)
- ✚ L'approximation polynomiale
- ✚ Approximation de Padé

Dans ce cours, on va se contenter de trois premières approches, c'est-à-dire, l'approche basée sur le développement de la série de Taylor, la procédure générale de Chung (2010) et l'approximation polynomiale pour la 1^{ère} et la 2^{ème} dérivée.

2.1 Approximations des différences finies de la 1^{ère} dérivée

2.1.1. Approximations développées à partir de la série de Taylor

Soit la fonction continue et dérivable $f(x)$ définie en \mathbb{R} . La valeur de $f(x)$ autour de x_i peut être donnée par la série de Taylor comme suit :

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} \right) \dots + \frac{(x - x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n} \right) \quad (2.1)$$

Alors, on peut écrire la valeur de la fonction pour deux points voisins (x_i, x_{i+1}) comme suit :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} \right) \dots + \frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n} \right) \quad (2.2)$$

En utilisant les notations indicielles décrites dans le chapitre précédent, l'équation (2.2) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \nabla x_i = x_{i+1} - x_i \\ f(x_i) = f_i \\ f(x_{i+1}) = f_{i+1} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$f_{i+1} = f_i + \nabla x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \frac{\nabla x_i^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) + \frac{\nabla x_i^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} \right) \dots + \frac{\nabla x_i^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n} \right) \quad (2.4)$$

À partir de cette équation, on peut tirer la formule de $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x_i} - \frac{\Delta x_i}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) - \frac{\Delta x_i}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} \right) + H \quad (2.5)$$

Cette dernière peut être approximer comme suit :

Cette expression représente le schéma décentré à droite $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x_i}$ (2.6)

On peut de la même manière établir le schéma décentré à gauche, en utilisant les deux points voisins (x_{i-1} , x_i).

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + (x_{i-1} - x_i) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) + \frac{(x_{i-1} - x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}\right) \dots + \frac{(x_{i-1} - x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}\right) \quad (2.7)$$

D'après le chapitre 1, on a :

$$\begin{cases} \nabla x_{i-1} = x_{i-1} - x_i \\ f(x_{i-1}) = f_{i-1} \end{cases} \quad (2.8)$$

En utilisant les notations indicielles ci-dessus, l'équation (2.7) devient :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \Delta x_{i-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \frac{\Delta x_{i-1}^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) - \frac{\Delta x_{i-1}^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}\right) \dots + \frac{\Delta x_{i-1}^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}\right) \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} + \frac{\Delta x_i}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) - \frac{\Delta x_i}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}\right) + H \quad (2.10)$$

Cette expression représente le schéma décentré à gauche $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}$ (2.11)

En additionnant les deux équations (2.6) et (2.11), on peut déduire le schéma d'approximation centré des différences finies.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = (1/2) \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} + (1/2) \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} \quad (2.12)$$

Dans le cas d'un maillage uniforme, c'est-à-dire $\nabla x_{i-1} = \Delta x_i$

Cette expression représente le schéma centré $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x_i}$ (2.13)

2.1.2. Procédure générale basée sur la série de Taylor

En maillage uniforme, le schéma d'approximation de la 1^{ère} dérivée peut être obtenu par la formule de Chung, 2010).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \approx \frac{af_i + bf_{i-1} + cf_{i+1} + df_{i-2} + ef_{i+2} + \dots}{\Delta x} \quad (2.14)$$

Où a, b, c, d, et e des coefficients peuvent être déterminés en utilisant le développement de la série de Taylor. À partir de cette formule générale, on peut choisir autant de nombre de nœuds voisins pour approximer la 1^{ère} dérivée.

Pour décrire la procédure générale prenant un exemple de trois nœuds (**backward difference formula**)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \approx \frac{af_i + bf_{i-1} + cf_{i-2}}{\Delta x} \quad (2.15)$$

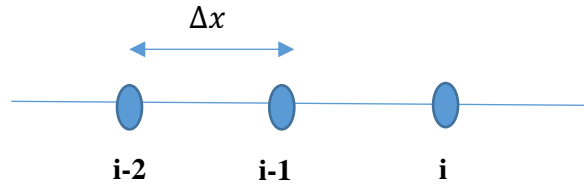


Figure 2.1 Maillage en 1D pour trois points

Selon le développement de la série de Taylor la fonction $f(x)$ pour les points x_{i-1} et x_{i-2} peut-être écrite comme suit :

$$f_{i-1} = f_i - \nabla x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \frac{\nabla x_i^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) - \frac{\nabla x_i^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}\right) \dots + \frac{\nabla x_i^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}\right) \quad (2.16)$$

$$f_{i-2} = f_i - 2\nabla x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \frac{(2\nabla x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) - \frac{(2\nabla x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}\right) \dots + \frac{(2\nabla x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}\right) \quad (2.17)$$

En substituant les deux expressions ci-dessus dans l'équation (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \approx \frac{1}{\Delta x} \left[af_i + b \left\{ f_i - \nabla x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \frac{\nabla x_i^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) - \frac{\nabla x_i^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}\right) \dots + \frac{\nabla x_i^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}\right) \right\} \right. \\ \left. + c \left\{ f_i - 2\nabla x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \frac{(2\nabla x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) - \frac{(2\nabla x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}\right) \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(2\nabla x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}\right) \right\} \right] \quad (2.18) \end{aligned}$$

Après réarrangement l'équation ci-dessus, devient comme suit :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \approx \left[(a + b + c)f_i + (-b + 2c) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\Delta x}{2}\right) (b + 4c) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) + H \right] \quad (2.19)$$

En comparant les deux termes de droite et de gauche, on obtient le système d'équations linéaire suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 & a = 3/2 \\ -(b + 2c) = 1 \Rightarrow b = -2 \\ b + 4c = 0 & c = 1/2 \end{cases} \quad (2.20)$$

Ce qui donne le schéma d'approximation suivant :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \approx \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2\Delta x} \quad (2.21)$$

2.1.3. Approximation de la 1^{ère} dérivée par l'approche polynomiale

Soit $f(x)$ est une fonction continue. Cette dernière peut être représentée par un polynôme autour d'un point (x_i) comme suit :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 + \dots + a_n(x - x_i)^n \quad (2.22)$$

Les coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ peuvent être obtenus en ajustant la courbe d'interpolation à des valeurs de la fonction aux nombre de points appropriés. La 1^{ère} et la 2^{ème} dérivée sont obtenues par la dérivation du polynôme. Ce qui donne les expressions suivantes :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \approx a_1 \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) \approx 2a_2 \quad (2.24)$$

Afin d'illustrer la procédure suivie par l'approche polynomiale, on prend un exemple de trois points, ce qui fait un polynôme de 2^{ème} degré.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 \quad (2.25)$$

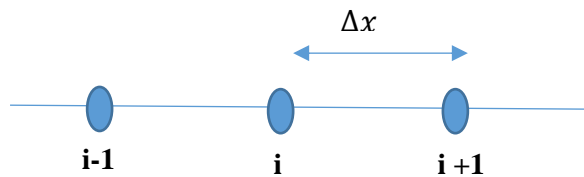


Figure 2.2. Maillage utilisé pour illustrer l'approche polynomiale

Alors, le développement de la méthode polynomiale pour les points $((x_i, x_{i-1}$ et $x_{i+1}))$ donne les équations suivantes :

$$f(x_i) = f_i = a_0 \quad (2.26)$$

$$f(x_{i+1}) = f_{i+1} = a_0 + a_1(x_{i+1} - x_i) + a_2(x_{i+1} - x_i)^2 \quad (2.27)$$

$$f(x_{i-1}) = f_{i-1} = a_0 + a_1(x_{i-1} - x_i) + a_2(x_{i-1} - x_i)^2 \quad (2.28)$$

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i \quad (2.29)$$

$$x_{i-1} - x_i = \Delta x_{i-1} \quad (2.30)$$

En soustrayant les équations (2.26) et (2.28), puis (2.27) et (2.26) ; on obtient :

$$f_{i+1} - f_i = a_1 \Delta x_i + a_2 \Delta x_i^2 \quad (2.31)$$

$$f_i - f_{i-1} = a_1 \Delta x_{i-1} - a_2 \Delta x_{i-1}^2 \quad (2.32)$$

Comme nous avons mentionné ci-dessus, la 1^{ère} dérivée peut être facilement obtenue en dérivant le polynôme. C'est-à-dire, pour trouver la formule d'approximation de la 1^{ère} dérivée, il suffit de déterminer le coefficient a_1 . Alors, nous avons trois équations et trois inconnus.

$a_0 = f_i$, il reste à déterminer les deux autres coefficients.

En multipliant l'équation (2.31) par Δx_{i-1}^2 et l'équation (2.32) par Δx_i^2 , cela donne :

$$\Delta x_{i-1}^2 f_{i+1} - \Delta x_{i-1}^2 f_i = a_1 \Delta x_i \Delta x_{i-1}^2 + a_2 \Delta x_i \Delta x_{i-1}^2 \quad (2.33)$$

$$\Delta x_i^2 f_i - \Delta x_i^2 f_{i-1} = a_1 \Delta x_i \Delta x_i^2 - a_2 \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i^2 \quad (2.34)$$

En additionnant les deux équations précédentes, on obtient la formule du coefficient a_1

$$a_1 = \frac{\Delta x_{i-1}^2 f_{i+1} - \Delta x_i^2 f_{i-1} + (\Delta x_i^2 - \Delta x_{i-1}^2) f_i}{\Delta x_i \Delta x_{i-1} (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \quad (2.35)$$

Dans le cas d'un maillage uniforme,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = a_1 = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.36)$$

2.2 Approximations de différences finies de la 2^{ème} dérivée

Dans cette partie, on va décrire les mêmes approches ci-citées pour déterminer la formule d'approximation de la 2^{ème} dérivée.

2.2.1. Approximations développées à partir de la série de Taylor

On peut facilement obtenir la formule de dérivée seconde en utilisant la formule de la dérivée première.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) \approx \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.37)$$

Alors, le schéma décentré à droite peut être obtenu comme suit :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) \approx \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.38)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}\right) = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x_i} \quad (2.39)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} \quad (2.40)$$

En substituant les deux équations (2.39) et (2.40) dans l'équation (2.38), on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) = \frac{\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}}{\Delta x_i} \quad (2.41)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) = \frac{f_{i+1}\Delta x_{i-1} + f_{i-1}\Delta x_i - (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})f_i}{\Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i} \quad (2.42)$$

Dans le cas d'un maillage uniforme,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (2.43)$$

2.2.2. Procédure générale basée sur la série de Taylor

De la même manière Chung (2010) a également développée une procédure générale pour approximer la seconde dérivée. En maillage uniforme, le schéma d'approximation de la 2^{ème} dérivée est représenté par l'équation suivante :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) \approx \frac{af_i + bf_{i-1} + cf_{i+1} + df_{i-2} + ef_{i+2} + \dots}{\Delta x^2}$$

Où a, b, c, d, et e des coefficients qui peuvent être déterminés en utilisant le développement de la série de Taylor pour les valeurs de la fonction aux nœuds (i, i+1, i-1, i-2 et i+2). À partir de cette formule générale, on peut choisir autant de nombre de nœuds voisins pour approximer la 2^{ème} dérivée.

Pour décrire la procédure générale prenant un exemple de trois nœuds (**Schéma centré**)

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) \approx \frac{af_i + bf_{i-1} + cf_{i+1}}{\Delta x^2} \quad (2.44)$$

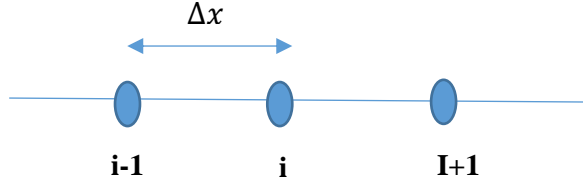


Figure 2.3. Maillage utilisé pour illustrer la formule de (Chung, 2010)

Selon le développement de la série de Taylor

$$f_{i+1} = f_i + \nabla x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \frac{\nabla x_i^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) + \frac{\nabla x_i^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} \right) \dots + \frac{\nabla x_i^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n} \right) \quad (2.45)$$

$$f_{i-1} = f_i - \nabla x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \frac{(\nabla x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) - \frac{(\nabla x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} \right) \dots + \frac{(\nabla x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n} \right) \quad (2.46)$$

En substituant les équations (2.45) et (2.46) dans l'équation (2.44), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) \approx \frac{1}{\Delta x^2} & \left[a f_i + b \left\{ f_i - \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \frac{\Delta x}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) - \frac{\nabla x_i^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} \right) \dots + \frac{\nabla x_i^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n} \right) \right\} \right. \\ & \left. + c \left\{ f_i + \nabla x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \frac{(\nabla x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) + \frac{(\nabla x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} \right) \dots + \frac{(\nabla x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

Après réarrangement de l'équation ci-dessus, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) \approx \frac{1}{\Delta x^2} & \left[(a + b + c) f_i + (-b + c) \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\Delta x^2}{2!} \right) (b + c) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\Delta x^3}{3!} \right) (-b + c) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} \right) + H \right] \quad (2.47) \end{aligned}$$

En comparant les deux termes de droite et de gauche, on obtient le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 & a = -2 \\ -(b + c) = 0 & \Rightarrow b = 1 \\ (b + c)/2 = 1 & c = 1 \end{cases} \quad (2.48)$$

Ce qui donne le schéma d'approximation suivant :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (2.49)$$

Comme nous avons mentionné ci-dessus, l'avantage de cette approche est que cette dernière nous donne la possibilité de choisir autant de nombre de nœuds voisins pour approximer la

dérivée que ce soit la 1^{ère} ou la seconde. Pour plus de précision, on va essayer de représenter la seconde dérivée par cinq nœuds voisins.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) \approx \frac{af_{i-2} + bf_{i-1} + cf_i + df_{i+1} + ef_{i+2}}{\Delta x^2} \quad (2.50)$$

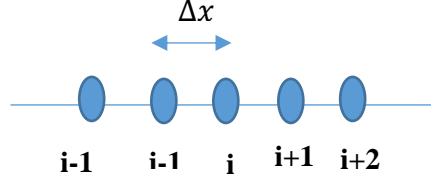


Figure 2.4. Maillage de cinq points

En utilisant le même principe utilisé pour trois points, on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{af_{i-2} + bf_{i-1} + cf_i + df_{i+1} + ef_{i+2}}{\Delta x^2} &= \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right) \left[(a + b + c + d + e)f_i + \Delta x(-b + c - 2d + 2e) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{\Delta x^2}{2}\right) (b + c + 4d + 4e) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\Delta x^3}{6}\right) (-b + c - 8d + 8e) \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\Delta x^4}{24}\right) (b + c + 16d + 16e) \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_i^4}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\Delta x^5}{120}\right) (-b + c - 32d + 32e) \left(\frac{\partial^5 f}{\partial x_i^5}\right) \\ &\quad \left. + \left(\frac{\Delta x^6}{720}\right) (b + c + 64d + 64e) \left(\frac{\partial^6 f}{\partial x_i^6}\right) + H \right] \end{aligned}$$

En comparant les coefficients des deux côtés gauche et droite, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ -b + c - 2d + 2e = 0 \\ b + c + 4d + 4e = 2 \\ -b + c - 8d + 8e = 0 \\ b + c + 16d + 16e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5/2 \\ b = 4/3 \\ c = 4/3 \\ d = -1/12 \\ e = -1/12 \end{cases} \quad (2.51)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) \approx \frac{-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}}{12\Delta x^2} \quad (2.52)$$

L'équation (2.52) est la formule d'approximation de la seconde dérivée au point (x_i) en fonction de ses quatre voisins. Plus le nombre de nœuds est grand, plus la précision est meilleure.

2.2.3. Approximation de la 2^{ème} dérivée par l'approche polynomiale

En suivant le même principe utilisé pour déduire la formule d'approximation de la 1^{ère} dérivée par la méthode polynomiale, on peut également trouver la formule de la seconde dérivée. Soit $f(x)$ est une fonction continue. Cette dernière peut être représentée par un polynôme autour d'un point (x_i) comme suit :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 + \dots + a_n(x - x_i)^n \quad (2.53)$$

Les coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ peuvent être obtenus en ajustant la courbe d'interpolation à des valeurs de la fonction aux nombre de points appropriés. La 2^{ème} dérivée est obtenue par la dérivation du polynôme. Ce qui donne l'expression suivante :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) \approx 2a_2 \quad (2.54)$$

Afin d'illustrer la procédure suivie par la méthode polynomiale, on prend un exemple de cinq points, ce qui fait un polynôme de 4^{ème} degré.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 + a_3(x - x_i)^3 + a_4(x - x_i)^4 \quad (2.55)$$

Le maillage qui correspond à cette configuration est représenté par la figure 2.5

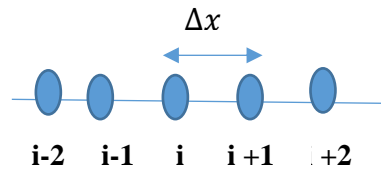


Figure 2.5.

Alors, dans le cas d'un maillage uniforme, la fonction $f(x)$ pour les points ($x_i, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i-2}$, et x_{i+2}) peut être représentée par les équations suivantes :

$$f(x_i) = f_i = a_0 \quad (2.56)$$

$$f(x_{i+1}) = f_{i+1} = a_0 + a_1\Delta x + a_2\Delta x^2 + a_3\Delta x^3 + a_4\Delta x^4 \quad (2.57)$$

$$f(x_{i-1}) = f_{i-1} = a_0 - a_1\Delta x + a_2\Delta x^2 - a_3\Delta x^3 + a_4\Delta x^4 \quad (2.58)$$

$$f(x_{i+2}) = f_{i+2} = a_0 + a_1 2\Delta x + a_2 4\Delta x^2 + a_3 8\Delta x^3 + a_4 16\Delta x^4 \quad (2.59)$$

$$f(x_{i-2}) = f_{i-2} = a_0 - a_1 2\Delta x + a_2 4\Delta x^2 - a_3 8\Delta x^3 + a_4 16\Delta x^4 \quad (2.60)$$

Afin de déterminer la formule d'approximation de la seconde dérivée, il suffit de déterminer la valeur de (a_2) . Pour ce faire, on effectue les opérations suivantes :

En additionnant les équations (2.57) et (2.58), puis (2.59) et (2.60). Cela donne :

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + 2a_2\Delta x^2 + 2a_4\Delta x^4 \quad (2.61)$$

$$f_{i+2} + f_{i-2} = 2f_i + 8a_2\Delta x^2 + 32a_4\Delta x^4 \quad (2.62)$$

En multipliant l'équation (2.61) par 16, puis on fait la soustraction du résultat de cette multiplication avec l'équation (2.62). Cela nous permet facilement de trouver la valeur de (a_2) .

$$16(f_{i+1} + f_{i-1}) = 16(2f_i + 2a_2\Delta x^2 + 2a_4\Delta x^4) \quad (2.63)$$

$$16(f_{i+1} + f_{i-1}) - f_{i+2} + f_{i-2} = 16(2f_i + 2a_2\Delta x^2 + 2a_4\Delta x^4) - 2f_i + 8a_2\Delta x^2 + 32a_4\Delta x^4 \quad (2.64)$$

$$16(f_{i+1} + f_{i-1}) - f_{i+2} + f_{i-2} = 30f_i - 24a_2\Delta x^2 \quad (2.65)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) = 2a_2 = \frac{-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}}{12\Delta x^2} \quad (2.66)$$

Dans ce chapitre, on a exposé trois approches pour trouver les approximations de la dérivée du 1^{er} ordre et du 2^{ème} ordre. Cependant, la dérivée mixte du second ordre n'a pas été abordée dans ce chapitre car cela nécessite d'abord d'avoir des prérequis. Tels que la formulation de la dérivée en multidimensionnel. Ce dernier est le sujet du chapitre suivant.

CHAPITRE III

Chapitre III : Formules d'approximation multidimensionnelle

Jusqu'à présent, nous nous étions limités à obtenir les expressions d'une dérivée unidimensionnelle. Dans ce chapitre, on va étendre ces expressions en multidimensionnel. Pour ce faire, on va se servir des formules d'approximation des dérivées unidimensionnelles.

3.1. Approximation de la dérivée multidimensionnelle du premier ordre

$f(x_i, y_j, z_k) \equiv f_{i,j,k}$
Si on veut trouver la formule de dérivée de la fonction $f(x_i, y_j, z_k)$, on va procéder comme suit :

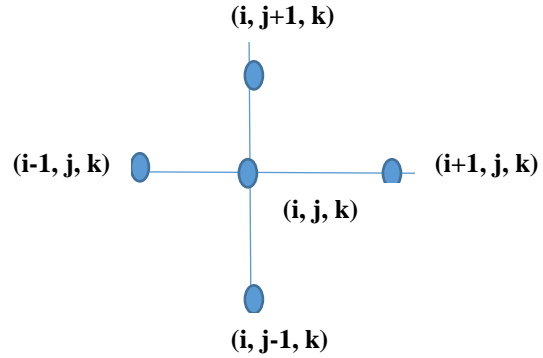


Figure 3.1. Maillage en 3D

✚ Schéma décentré à droite

L'équation (3.1) montre comment approximer une dérivée en termes de valeurs voisines selon la direction x en gardant les termes j et k constants. Par contre dans l'équation (3.2), c'est le terme selon la direction y qui varie en gardant i et k constants. Pour dériver une fonction dans le sens Z, on varie l'indice k en gardant les indices i et j constants.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j,k} \approx \frac{f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k}}{\Delta x} \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j,k} \approx \frac{f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k}}{\Delta y} \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{i,j,k} \approx \frac{f_{i,j,k+1} - f_{i,j,k}}{\Delta z} \quad (3.3)$$

De la même manière, on peut trouver les expressions d'approximation de la 1^{ère} dérivée en utilisant le schéma centré.

✚ Schéma centré

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j,k} \approx \frac{f_{i+1,j,k} - f_{i-1,j,k}}{2\Delta x} \quad (3.4)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j,k} \approx \frac{f_{i,j+1,k} - f_{i,j-1,k}}{2\Delta y} \quad (3.5)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{i,j,k} \approx \frac{f_{i,j,k+1} - f_{i,j,k-1}}{2\Delta z} \quad (3.6)$$

3.2. Approximation de la dérivée multidimensionnelle du second ordre

Pour des raisons de simplification, on va opter pour le cas d'un maillage uniforme. Également, on va se servir de l'approximation de la dérivée seconde unidimensionnelle.

✚ L'approximation de la seconde dérivée dans un maillage uniforme en utilisant le schéma centré est donnée par l'équation suivante :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (3.7)$$

Alors, en suivant le même principe de la 1^{ère} dérivée multidimensionnelle, la dérivée seconde multidimensionnelle selon les différentes directions peut être représentée par les équations ci-dessous :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j,k} \approx \frac{f_{i+1,j,k} - 2f_{i,j,k} + f_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j,k} \approx \frac{f_{i,j+1,k} - 2f_{i,j,k} + f_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{i,j,k} \approx \frac{f_{i,j,k+1} - 2f_{i,j,k} + f_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \quad (3.10)$$

Activité : Trouver les approximations de la seconde dérivée multidimensionnelle dans le cas d'un maillage non-uniforme.

Après avoir décrit la procédure suivie pour trouver la dérivée multidimensionnelle, on peut maintenant aborder la dérivée mixte.

3.3. Approximation de la dérivée mixte du second ordre

Dans les problèmes de thermo-fluide tel que le transfert de chaleur, on rencontre des dérivée mixte du second ordre. Cette partie décrit la procédure suivie pour obtenir la formule d'approximation de cette dérivée mixte.

La dérivée mixte du second ordre peut être obtenue en se servant de l'approximation de la dérivée du 1^{er} ordre.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)\right] \quad (3.11)$$

L'équation ci-dessus peut être écrite en utilisant le schéma centré comme suit :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \right) \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right] \quad (3.12)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right] = \frac{1}{2\Delta y} \left(\frac{\partial f_{i,j+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{i,j-1}}{\partial x_i} \right) \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{\partial f_{i,j+1}}{\partial x_i} \right) = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}}{2\Delta x} \quad (3.14)$$

$$\left(\frac{\partial f_{i,j-1}}{\partial x_i} \right) = \frac{f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x} \quad (3.15)$$

En substituant les équations (3.14) et (3.15) dans l'équation (3.13), on obtient la formule d'approximation de la dérivée mixte du second ordre.

$$\frac{1}{2\Delta y} \left(\frac{\partial f_{i,j+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{i,j-1}}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2\Delta y} \left[\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}}{2\Delta x} - \frac{f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x} \right] \quad (3.16)$$

Après réarrangement, l'équation (3.16) devient comme suit :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j} \right) = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \quad (3.17)$$

Activité : Trouver la formule d'approximation de la seconde dérivée mixte dans le cas d'un maillage non-uniforme en utilisant :


 Schéma décentré à droite

 Schéma décentré à gauche

CHAPITRE IV

Chapitre IV : Implémentation de la méthode des différences finies

Dans ce chapitre, on va aborder les points suivants :

- ✚ Implémentation des conditions aux limites
- ✚ Système algébrique des nœuds discrets
- ✚ Schéma de calcul
- ✚ Étude de cas réels : a) Problème de la déflexion d'une poutre sur deux appuis
b) problème de la déflexion d'une poutre console
c) Problème de consolidation

4.1. Introduction

La solution numérique de l'équation différentielle par la méthode des différences finies nécessite de remplacer les dérivées d'EDP dans chaque nœud intérieur par la formule d'approximation selon un schéma de calcul (CDS, FDS ou BDS). Cela va convertir notre équation différentielle en système d'équations linéaires. Cela ne suffit pas pour trouver la solution unique, c'est pourquoi l'imposition des conditions aux limites pour obtenir une solution unique du problème est nécessaire. Dans ce qui suit, on va exposer les étapes à suivre à partir de la discrétisation du domaine de recherche jusqu'à l'obtention du système d'équations linéaires.

4.2 Implémentation des conditions aux limites

On peut avoir deux types de conditions aux limites :

- a) **Conditions aux limites de Dirichlet** (nommée d'après [Johann Dirichlet](#)) : Dans ce type des conditions des valeurs spécifiées sont attribuées aux nœuds des limites. C'est-à-dire, dans ces nœuds, on n'a pas besoin de remplacer les dérivées par les approximations des différences finies. L'exemple de la déflexion d'une poutre sur deux appuis donné ci-dessous illustre le type de problème dit BVP (Boundary values problem) avec des conditions aux limites de Dirichlet.

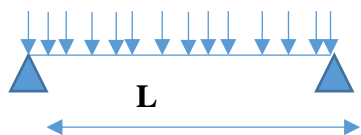


Figure 4.1. Poutre sur deux appuis

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} \right) = \frac{M_i}{EI} \quad (4.1)$$

Équation de la flèche
d'une poutre.

$$y(0) = 0, y(L) = 0 \quad (4.2)$$

Conditions aux limites

b) **Condition aux limites de Neumann** (nommée d'après Carl Neumann) : Dans ce type de conditions, on spécifie à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque les *valeurs des dérivées* que la solution doit vérifier sur les frontières/limites du domaine. L'exemple ci-dessous est un problème de type (BVP) avec des conditions de Neumann.

Soit l'équation différentielle $y(x)$ définie sur l'intervalle $[a, b]$ donnée ci-dessous :

$$y'' + y = 0 \text{ avec } y'(a) = \alpha \text{ et } y'(b) = \beta \quad (4.3)$$

Il existe d'autres conditions possibles. Par exemple les conditions aux limites de Robin, qui est une combinaison des conditions de Dirichlet et Neumann.

Pour expliquer d'une manière très simple la notion des conditions aux limites de Neumann, prenant un exemple d'un problème unidimensionnel.

✚ **Schéma décentré à droite**

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 \approx \frac{f_2 - f_1}{\Delta x}$$

✚ **Schéma décentré à gauche**

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_N \approx \frac{f_N - f_{N-1}}{\Delta x}$$

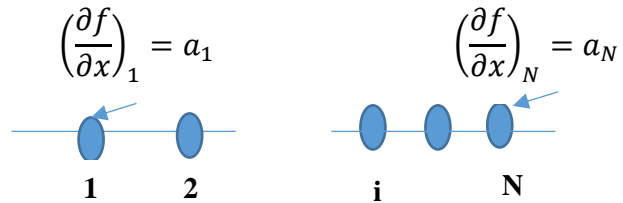


Figure 4.2. Maillage en 1D avec conditions de Neumann

Vu qu'il n'y pas des nœuds à gauche du nœud 1, alors le schéma de calcul le plus adéquat pour représenter la valeur de la dérivée à ce nœud est le schéma décentré à droite. Par contre, le schéma approprié de calcul pour le nœud N est le schéma décentré à gauche.

On peut également représenter la condition aux limites de Neumann par un schéma plus précis en impliquant autant de nœuds voisins au nœuds 1 et N. Pour ce faire, on utilise l'approximation polynomiale.

✚ **Approche polynomiale pour trois points voisins** : Pour trois points, le polynôme est de 2^{ème} degré. Il peut être représenté comme suit :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 \quad (4.4)$$

En suivant le même principe vu dans le chapitre II, la formule de la 1^{ère} dérivée peut être donnée par l'équation ci-dessous :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 = a_1 = \frac{-(x_2 - x_1)^2 f_3 + (x_3 - x_1)^2 f_2 - [(x_3 - x_1)^2 - (x_2 - x_1)^2] f_i}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)} \quad (4.5)$$

4.3. Système algébrique des différences finies

L'approximation des différences finies des dérivées appartenant à l'équation différentielle conduit à un système d'équation algébrique. Ce dernier est :

- ✚ Linéaire si l'équation différentielle est linéaire
- ✚ Non-linéaire si l'équation différentielle est non-linéaire.

Le système d'équation linéaire peut être représenté par l'équation ci-dessous.

$$A_p \Phi_p + \sum_L A_L \Phi_L = Q_p \quad (4.6)$$

Où Φ pourrait être la vitesse, une température ou la pression interstitielle si on résout le problème de consolidation, l'indice p représente le nœud dans lequel EDP est approximée et l'indice L représente les nœuds voisins impliqués dans le schéma de calcul. A_p et A_L sont des paramètres dépendant de la dimension du maillage ainsi que propriétés du problème résolu.

Afin de construire la matrice qui forme notre système algébrique, on utilise soit une notation indicielle ou boussole. Cette notation boussole sera bien détaillée ci-dessous en se servant d'un exemple.

4.3.1 Notation boussole

✚ Problème unidimensionnel 1-D

Les notations E(Est), W(West) représentent la notation boussole. Cette notation dépend du choix du schéma de calcul utilisé. C'est-à-dire la notation diffère selon le nombre de nœuds impliqué dans le schéma de calcul.

Le choix du schéma nous permet également de savoir à l'avance le nombre de diagonal non zéro présent dans la matrice de notre système algébrique. Si on utilise un schéma centré de trois points, cela conduit à une matrice tridiagonale. Si le schéma est de cinq points, cela conduit à une matrice penta diagonale.

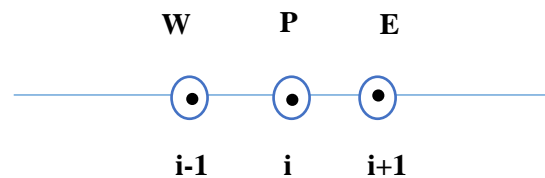


Figure 4.3. Maillage en notation boussole de trois Points

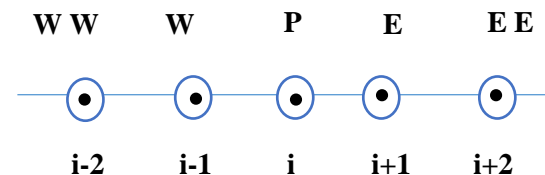


Figure 4.4. Maillage en notation boussole de cinq Points.

Problème multidimensionnel

Dans un problème 2D, si on utilise un schéma centré de cinq points en plus d'Est (E) et West (W) dans la notation boussole utilisé en 1D, on aura Nord (N) et Sud (S) figure(4.5). Par contre, dans un problème en 3D, on aura en plus des quatre notations (E, W, N, S) les notations Top (T) et Bottom (B) figure (4.6).

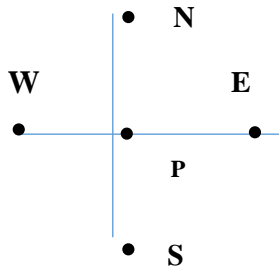


Figure 4.5. Maillage en 2D avec notation boussole

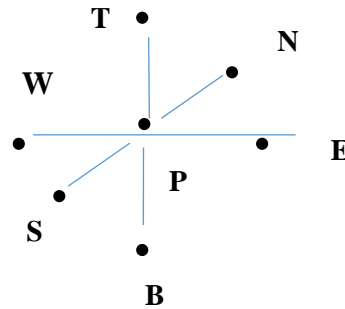


Figure 4.6. Maillage en 3D avec notation boussole

Dans la partie ci-dessous, on va résoudre quelques problèmes en utilisant la méthode des différences finies.

4.4. Étude de cas réels

4.4.1. Problème n°1 : calcul de la flèche d'une poutre sur deux appuis simples

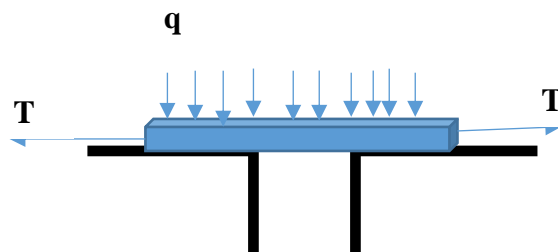
Calculer la flèche de la poutre montrée dans la figure ci-dessous en utilisant la méthode de différences finies. Pour les cas suivants :

- a) Nombre de nœuds 4
- b) Nombre de nœuds 100

Données du problème

T=30 kN
q= 950 kN/ml
E=2x10⁸ kN/m²
L=3 m
I=4,99x10⁻⁵ m⁴

L'équation différentielle qui représente la flèche de la poutre montré dans cette figure est donnée par l'équation (4.6)



$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - \frac{T * y}{EI} = \frac{q * x(L - x)}{2EI} \quad (4.7)$$

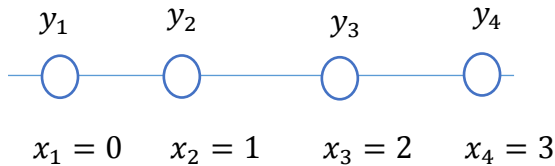
Solution

1^{er} cas : Nbr=4

1^{ère} étape : Discrétisation du domaine de recherche

✚ Calculer le pas de discrétisation $\Delta x = \left(\frac{L}{nbr-1} \right) = \frac{3}{4-1} = 1$

✚ Conditions aux limites $y_1 = y(0) = 0, y_4 = y(L) = 0$



2^{ème} étape : Approximation de la dérivée seconde de l'équation différentielle de la flèche en utilisant le schéma centré.

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} \right) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2}$$

En substituant l'approximation de la dérivée seconde dans l'équation différentielle, on obtient

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{T * y_i}{EI} = \frac{q * x_i(L - x_i)}{2EI}$$

Après réarrangement de l'équation et en substituant les paramètres T, E et I par leurs valeurs, l'équation devient comme suit :

$$y_{i-1} - \left(2 + \frac{\Delta x T}{EI} \right) y_i + y_{i+1} = (\Delta x)^2 \frac{q * x_i(L - x_i)}{2EI} \quad (4.8)$$

$$y_{i-1} - \left(2 + \frac{1 \times 30}{2 \times 10^8 \times 4,99 \times 10^{-5}} \right) y_i + y_{i+1} = (1)^2 \frac{950 \times x_i(3 - x_i)}{2 \times 2 \times 10^8 \times 4,99 \times 10^{-5}} \quad (4.9)$$

$$y_{i-1} - (2,0033)y_i + y_{i+1} = 0,0475951 \times x_i(3 - x_i) \quad (4.9)$$

Nous avons 4 nœuds dont 2 représentent les conditions aux limites. Alors, il reste à déterminer la valeur de déflexion des nœuds 3 et 4.

$$\text{pour } i = 2 \Rightarrow y_1 - (2,0033)y_2 + y_3 = 0,0475951 \times 1(3 - 1) \quad (4.10)$$

$$i = 3 \Leftrightarrow y_2 - (2,0033)y_3 + y_4 = 0,0475951 \times 2(3 - 2) \quad (4.11)$$

En remplaçant la valeur de y_3 tirée de l'équation (4.10) en fonction de y_2 dans l'équation (4.11), on trouve les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -0,0949 \\ y_3 = -0,0949 \\ y_4 = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

2^{ème} cas : Nombre de nœuds 100

Dans ce cas, le pas de discrétisation prend la valeur de :

$$\Delta x = \left(\frac{L}{nbr\ de\ noeuds-1} \right) = \frac{3}{99} = 0.0303$$

Comme nous avons mentionné dans le chapitre IV, la résolution des équations différentielles par la méthode des différences finies conduit à la résolution d'un système algébrique. La matrice de ce dernier est une matrice tridiagonale car le schéma utilisé est un schéma centré de trois points.

$$y_{i-1} - (2,0033)y_i + y_{i+1} = 0,0475951 \times x_i(3 - x_i) \quad (4.13)$$

Le nombre des nœuds est de 100, ce qui fait un nombre d'inconnus égale à 98. Pour trouver les coefficients de la matrice, il faut remplacer l'indice i par 2 jusqu'à 99.

$$i=2 \quad y_1 - (2,0033)y_2 + y_3 = 0,0475951 \times x_2(3 - x_2) \quad (4.14)$$

$$i=3 \quad y_2 - (2,0033)y_3 + y_4 = 0,0475951 \times x_3(3 - x_3) \quad (4.15)$$

$$i=4 \quad y_3 - (2,0033)y_4 + y_5 = 0,0475951 \times x_4(3 - x_4) \quad (4.16)$$

$$i=5 \quad y_4 - (2,0033)y_5 + y_6 = 0,0475951 \times x_5(3 - x_5) \quad (4.17)$$

.....

$$i=98 \quad y_{97} - (2,0033)y_{98} + y_{99} = 0,0475951 \times x_{98}(3 - x_{98}) \quad (4.18)$$

$$i=99 \quad y_{98} - (2,0033)y_{99} + y_{100} = 0,0475951 \times x_{99}(3 - x_{99}) \quad (4.19)$$

Le système d'équations linéaires se résout facilement en utilisant un programme en code Matlab ou autre langage. Dans ce cours, on a utilisé le Matlab.

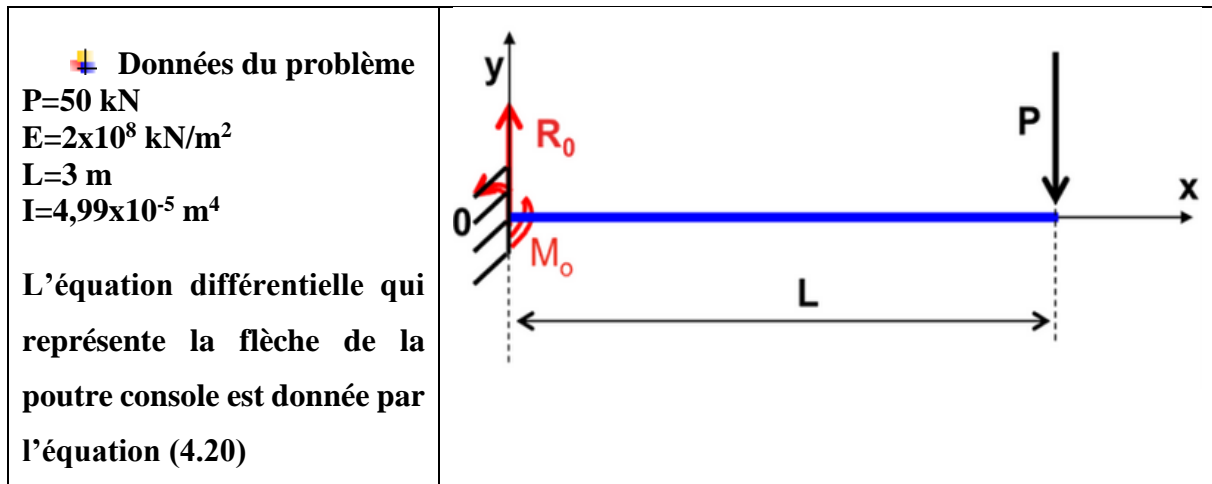
Solution en code Matlab

```
% Ce programme calcule la déflexion d'une poutre sur deux appuis simple
% avec deux forces de tension et une charge uniformément répartie
##### y''-(T/EI)*y=q*x(L-x)
clear all
close all
clc
% Données du problème
T=30; % Effort de tension en KN
E=2*10^8; % Module de Young kN/m^2
I=4.99*10^-5; % Moment d'inertie en M^4
L=3; % longueur de la poutre en m
q=950; % Charge linéairement répartie en kN/ml
n=100; % nombre des noeuds
a=0; % début du domaine de recherche
b=3;
y0=0;
h=(b-a)/(n-1); % Le pas de discrétisation
x=0:h:3;
% Conditions aux limites
y(1)=0;
y(n)=0;
% Le système algébrique A*Y=B
% y(i-1)-(2,0033) y(i)+y(i+1)=0,0475951*x(i)*(3-x(i))
% B=0,0475951*x(i)*(3-x(i))
A=zeros(n-2);

for i=1:n
    f(i)=0.0475951*x(i)*(3-x(i));
end
B=f(2:n-1);
% remplissage de la matrice A
for i=1:n-2
    A(i,i)=-2.0033;
end
for i=1:n-3
    A(i,i+1)=1;
end
for i=2:n-2
    A(i,i-1)=1;
end
y=inv(A)*B';
y=[y0 y' y0];
plot(x,y,'-.m','LineWidth',3)
```

4.4.2. Problème n°2 : Calcul de la flèche de poutre console

Soit la poutre console indiquée dans la figure ci-dessous. En prenant les mêmes données du problème n°1. Calculer la flèche de cette poutre en utilisant la méthode des différences finies.



Le moment fléchissant peut facilement être déduit par les lois de RDM.

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \frac{M_f}{E \cdot I} \quad (4.20)$$

$$0 \leq x < L \quad \left\{ \begin{array}{l} R_0 = P \\ M_0 = P \cdot L \\ M_f = P \cdot L - P \cdot x \end{array} \right. \quad (4.21)$$

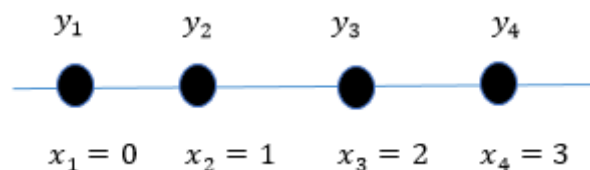
$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \frac{M_f}{E \cdot I} = \frac{P \cdot L - P \cdot x}{E \cdot I} \quad (4.22)$$

En suivant les étapes de la résolution d'une équation différentielle par la méthode de différences finies, on obtient l'équation (4.24).

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x} = \frac{P \cdot (L - x_i)}{EI} \quad (4.23)$$

$$y_{i-1} - (2)y_i + y_{i+1} = \frac{\Delta x \times P(L - x_i)}{EI} \quad (4.24)$$

Le maillage qui correspond à la résolution de ce problème est représenté par la figure ci-dessous



La flèche à l'encastrement est nulle. Ce qui fait de ce problème, un problème de type (Initial Value Problem). C'est pourquoi, nous devons utiliser le nœud fantôme en supposant qu'il existe une console de l'autre côté. En substituant les paramètres du problème par leurs valeurs, l'équation de la flèche devient comme suit :

$$y_{i-1} - (2)y_i + y_{i+1} = 0,00501(3 - x_i) \quad (4.25)$$

$$i=1 \quad y_0 - (2)y_1 + y_2 = 0,00501(3 - x_1) \quad (4.26)$$

Nous savons que $y_1 = 0$. En se servant de la symétrie, on peut dire $y_0 = y_2$

Ce qui donne $y_0 + y_2 = 0,00501(3 - 0) \Rightarrow y_2 = \left(\frac{0,00501 \times 3}{2}\right) = 0.00752$

$$i=2 \quad y_1 - (2)y_2 + y_3 = 0,00501(3 - x_2) \Rightarrow y_3 = 2 \times 0.00752 + 0.00501 \times 2 \quad (4.27)$$

$$y_3 = 0.0251$$

$$i=3 \quad y_2 - (2)y_3 + y_4 = 0,00501(3 - x_3) \Rightarrow y_4 = 2 \times y_3 - y_2 \quad (4.28)$$

$$y_4 = 2 \times 0.0251 - 0.00752 \Rightarrow y_4 = 0.0426 \quad (4.29)$$

4.4.3. Problème de consolidation en 2D

Considérons une colonne de sol homogène dont les déformations et les mouvements d'eau sont uniquement verticaux. Ces hypothèses sont réalisées par exemple dans un massif semi-infini à surface horizontale, à la condition qu'il soit chargé par une pression uniforme et que la surface du massif soit perméable avec une charge hydraulique constante et uniforme.

Généralement, le problème de consolidation est régi par l'équation de Terzaghi proposée en 1923, et qui s'écrit :

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} \quad (4.30)$$

Conditions aux limites

Considérons une couche d'épaisseur H limitée à sa partie supérieure par une surface perméable et à sa partie inférieure par une surface imperméable. Compte tenu de l'orientation de l'axe des profondeurs oz, ces conditions s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(z_i, t_j)}{\partial t_j} = c_v \frac{\partial^2 u(z_i, t_j)}{\partial z_i^2} \\ u(i, 1) = \rho g z \\ u(1, j) = 0, \left. \frac{\partial u(i, j)}{\partial z} \right|_{i=N} = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Discrétisation de l'équation différentielle

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta t} = c_v \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta z^2} \quad (4.32)$$

$$u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 2r(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \quad (4.33)$$

Avec

$$r = \frac{\Delta t c_v}{\Delta z^2}, \quad (4.34)$$

$$\left. \frac{\partial u(i, j)}{\partial z} \right|_{i=N} = \frac{u_{N+1,j} - u_{N-1,j}}{2\Delta z} = 0, \text{ d'où } u_{N+1,j} = u_{N-1,j} \quad (4.35)$$

C'est le schéma numérique général qui les valeurs de la pression interstitielle à n'importe quelle profondeur de la couche de sol. Les valeurs de la solution peuvent être obtenues en développant ce schéma par incrémentation de i et j dans un processus itératif en initialisant la matrice Uij et en la mettant à jour à chaque itération jusqu'à atteindre l'erreur ciblée. À cet effet, le schéma de l'équation 100 peut être réécrit sous la forme suivante :

$$u_{i,j} = \frac{2r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4r} \quad (4.36)$$

Le programme Matlab qui met en œuvre ce processus itératif est listé ci-dessous.

```
clc
clear all
% Bornes supérieures du domaine suivant x et y
lx=5;ly=2;
% Discrétisation du domaine
b=0.7; % b=cv*dt/dz^2
dy=0.1;cv=0.05;
dx=0.1;dy=b*dx^2/cv;
x=0:dx:lx;
y=0:dy:ly;
nx=length(x);
ny=length(y);
row=10;g=9.81;ro=18;
% Initialisation de la matrice solution
r=cv*dx/dy^2;
p=zeros(nx,ny);
pn=zeros(nx,ny);
```

```

% Conditions aux limites
    p(:,1)=ro*g*x*1000;           % à t=0 u=row*g*z
    p(1,:)=0;                     % u=0 pour z=0 pour tout t
    p(nx,:)=p(nx-2,:);           % extrémité inferieure imperméable
% Construction matrice solution
    i=2:nx-1;
    j=2:ny-1;
    nit=100;
    for it=1:nit
        pn=p;
        p(i,j)=(2*r*(pn(i+1,j)+pn(i-1,j))-(pn(i,j+1)-pn(i,j-1)))/(4*r);
        p(:,1)=ro*g*x*1000;       % à t=0 u=row*g*z
        p(1,:)=0;                 % u=0 pour z=0 pour tout t
        p(nx,:)=p(nx-2,:);        % extrémité inferieure perméable
    end
    figure;surf(x,y,p') % Représentation graphique de la solution

```

Références bibliographiques

- [1] Jin, K. R., & Wu, Y. (1997). Boundary-fitted grid in landscape modeling. *Landscape ecology*, 12(1), 19-26.
- [2] Peskin, C. S. (2002). The immersed boundary method. *Acta numerica*, 11, 479-517.
- [3] Hicks, M. A., Brinkgreve, R. B., & Rohe, A. (2014). *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*. CRC Press.
- [4] Naser, A. H. (2013). Finite Difference Analysis of One Dimensional Consolidation of Homogeneous clay layer. *Journal of University of Babylon*, 21(5), 1661-1674.
- [5] Tandjiria, V. (2004). Development of finite difference method applied to consolidation analysis of embankments. *Civil Engineering Dimension*, 1(2), 73-80.
- [6] Causon, D. M., & Mingham, C. G. (2010). *Introductory finite difference methods for PDEs*. Bookboon.
- [7] Chung, T. J. (2010). *Computational fluid dynamics*. Cambridge university press.