

transfer thermique

Contents

1	Introduction aux transferts thermiques	3
1.1	Les différents modes de transferts	3
1.1.1	La conduction	3
1.1.2	Le rayonnement	3
1.1.3	La convection	3
1.2	Combinaison des différents modes de transferts	4
2	La conduction de la chaleur	5
2.1	La loi de Fourier	5
2.1.1	Définitions	5
2.1.2	Enoncé de la loi de Fourier	7
2.1.3	Orthogonalité du gradient et de l'isotherme	7
2.2	La conductivité thermique	9
2.2.1	Généralités	9
2.2.2	Matériaux anisotropes	9
2.3	L'équation de la chaleur en conduction	9
2.3.1	Démonstration	9
2.3.2	Conditions aux limites	12
2.3.3	Conductivité et diffusivité thermique	14
2.3.4	Equation de la chaleur en régime permanent	16
2.4	Exemples de résolution de l'équation de la chaleur en conduction	16
2.4.1	Cas d'un mur plan	16
2.4.2	Association de murs en série ou en parallèle	17
2.4.3	Mur avec sources internes	17
2.4.4	Mur avec conditions de convection aux parois	18
2.4.5	Conduction dans une coque cylindrique	20
2.4.6	Conduction dans une coque sphérique	20
2.4.7	Remarques finales sur la conduction	21
3	Le rayonnement électromagnétique	23
3.1	Généralités	23
3.2	Le corps noir	25
3.2.1	Définition	25
3.2.2	La loi de Stefan-Boltzmann	26
3.2.3	La loi de Planck	26
3.3	Loi de Wien	26
3.3.1	Enoncé	26
3.3.2	Energie émise par le corps noir entre deux longueurs d'onde	26
3.4	Corps réels	28
3.5	Loi de Kirchhoff : relation entre absorption et émission	29
3.6	Flux radiatif échangé entre deux surfaces noires	29
4	Exercices	34

Chapter 1

Introduction aux transferts thermiques

1.1 Les différents modes de transferts

Lorsque deux systèmes sont à des températures différentes, le système le plus chaud cède de la chaleur au plus froid. Il y a échange thermique ou encore transfert thermique entre ces deux systèmes. Cette situation se rencontre dans de nombreuses situations industrielles (moteurs thermiques ou même électriques, centrales électriques au fuel au gaz, etc..., électronique) ou domestique (chauffage de l'habitat). Un transfert d'énergie donne lieu à un flux de chaleur qui correspond à un déplacement de l'énergie du plus chaud vers le plus froid. Comme on le verra par la suite, le flux de chaleur dont la densité locale est notée $\vec{\varphi}$ est une grandeur vectorielle, ce qui signifie qu'un flux de chaleur est caractérisé non seulement par son intensité mais aussi par sa direction. Il est défini en chaque point de l'espace et a l'unité d'une densité surfacique de puissance (W/m^2). Il existe trois modes essentiels de transferts de chaleur: la conduction, le rayonnement et la convection.

1.1.1 La conduction

On sait que la température est une fonction croissante de l'agitation moléculaire dans un corps, qu'il soit solide, liquide ou gazeux. Considérons pour l'instant un corps solide au sein duquel la température varie. L'agitation moléculaire élevée de la zone chaude communiquera de l'énergie cinétique aux zones plus froides par un phénomène appelé conduction de la chaleur. La conduction est un phénomène de diffusion qui permet donc à la chaleur de se propager à l'intérieur d'un corps solide. Il en est de même pour un liquide ou un gaz mais on verra par la suite que pour eux, la convection est un autre mode de transfert de chaleur possible. Notons enfin que la conduction de la chaleur n'est pas possible dans le vide puisqu'il n'y a pas de support moléculaire pour cela.

1.1.2 Le rayonnement

La chaleur du soleil frappe pourtant notre planète alors qu'il n'y a aucun support solide, liquide ou gazeux au delà de l'atmosphère terrestre. Ceci signifie donc que l'énergie thermique peut tout de même traverser le vide. Ce mode de transfert s'appelle le rayonnement. Il correspond à un flux d'ondes électromagnétiques émises par tout corps, quelle que soit sa température. Comme on l'imagine, le rayonnement électromagnétique est d'autant plus élevé que sa température est grande. Comme pour la conduction, ce sont les interactions entre atomes et molécules qui sont à l'origine de ce rayonnement. Elles peuvent le générer, ce qui diminue leur énergie, ou encore l'absorber, ce qui l'augmente. De par sa nature, le rayonnement n'intervient que dans les milieux transparents (gaz, verre, vide) ou semi-opaque (gaz + fumées de CO₂, gaz + vapeur d'eau).

1.1.3 La convection

Un débit ou une circulation de liquide ou de gaz peut transporter avec lui une certaine quantité d'énergie thermique. Ce transport de chaleur porte le nom de CONVECTION thermique. Ce transport de l'énergie par un écoulement est analogue au transport d'autres quantités scalaires (non vectorielles): transport d'une concentration de sel par de l'eau, transport de l'humidité par l'air, ... On retiendra donc que dans la convection, la chaleur se sert du fluide comme véhicule pour se déplacer. Sans entrer dans les détails, notons qu'il existe deux types de transferts convectifs:

- La convection forcée dans laquelle l'écoulement du fluide est forcé par un dispositif mécanique quelconque (pompe ou gravité pour un liquide, ventilateur pour de l'air).
- La convection naturelle: lorsqu'il existe une différence de température entre deux points d'un fluide, le fluide chaud, qui aura une masse volumique plus faible que le fluide froid aura tendance à monter sous l'effet de la poussée d'Archimède.

Il y aura ainsi circulation naturelle du fluide sous l'effet de la chaleur qui, par ailleurs, sera transportée avec lui: on parle de convection naturelle. Si l'on prend l'exemple d'un chauffage domestique, l'eau chaude qui arrive dans les radiateurs circule par convection forcée, entretenue par le circulateur (petite pompe située dans la chaufferie) tandis que l'air des pièces de la maison circule par convection naturelle depuis le radiateur autour duquel il s'échauffe jusqu'au plafond vers lequel il s'élève avant de redescendre pour former un circuit fermé.

En convection on caractérise le flux de chaleur Φ qui est extrait par le fluide de température T_0 d'une paroi de surface S à la température T_P par :

$$\Phi = h S (T_P - T_0)$$

où Φ est en *Watt*, S en m^2 , T en *Kelvin* et où h désigne le coefficient d'échange entre la paroi et le fluide (en $W.m^{-2}.K^{-1}$).

1.2 Combinaison des différents modes de transferts

Dans beaucoup de situations, il y a coexistence de 2 ou même 3 des modes de transferts thermiques décrits précédemment. Fort heureusement, il est fréquent qu'un mode soit prépondérant et simplifie l'analyse. Avant de finir ce paragraphe, signalons que certains échanges de chaleur s'accompagnent d'un changement d'état (vaporisation, condensation, fusion, congélation). Ces phénomènes se comportent alors comme une source (ex. de la condensation) ou un puits de chaleur (ex. de la vaporisation).

Le dessin de la figure 1.1 qui représente une fenêtre à double vitrage synthétise l'ensemble des exemples cités.

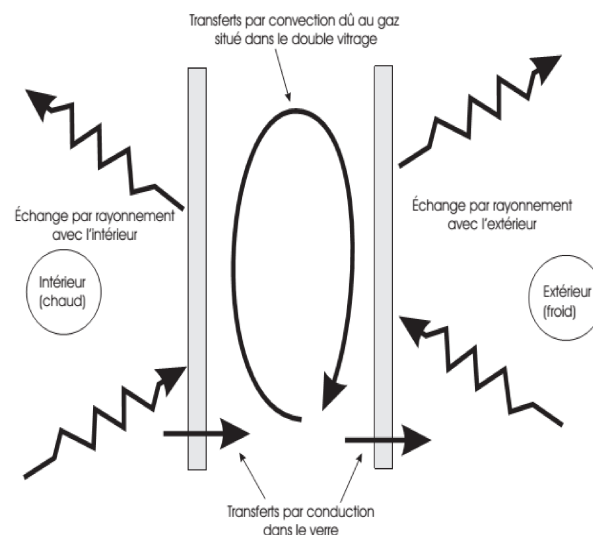


Figure 1.1: Exemple illustrant les différents types de transferts de chaleur.

Ce cours constitue une introduction à la conduction et au rayonnement. La convection n'y est pas abordée.

Chapter 2

La conduction de la chaleur

2.1 La loi de Fourier

Rappelons que la conduction est le seul mode de transfert de chaleur possible dans un solide (sauf pour quelques solides transparents comme le verre qui laissent passer un rayonnement électromagnétique). C'est un mode de transfert sans transport de matière.

2.1.1 Définitions

- Température T : elle se définit en chaque point d'un corps liquide, solide ou gazeux. C'est une fonction scalaire de l'espace et du temps lorsque le problème en dépend (problème instationnaire). L'unité de température est le degré Kelvin [K] ou encore le degré Celsius [$^{\circ}C$].
- Flux de chaleur : c'est la quantité de chaleur qui traverse une surface S par unité de temps :

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \quad \text{en Watt}$$

- Densité de flux $\vec{\varphi}$: elle représente la puissance qui traverse l'unité de surface.
Pour une surface perpendiculaire au flux de chaleur :

$$\varphi = \frac{d\Phi}{dS}$$

Si le flux est homogène en tout point de la surface alors :

$$\varphi = \frac{\Phi}{S}$$

φ s'exprime en $W.m^{-2}$.

Pour une surface dont la normale \vec{n} est orientée de manière quelconque par rapport au flux (cf. figure 2.1) alors :

$$d\Phi = \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, dS = \varphi \cdot S \cos \alpha$$

Le flux à travers une surface quelconque s'écrit donc :

$$\Phi = \int_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, dS$$

L'exemple de la figure 2.2 illustre l'importance de l'orientation de la surface par rapport à la densité de flux : soit un solide carré dont les deux faces (ABCD et EFGH) sont maintenues à une température constante (respectivement T^+ et T^-) et dont les 4 autres sont isolées (par de la laine de verre par exemple). Un flux de chaleur Φ_0 circulera de la face $ABCD$ vers la face $EFGH$. En tout point du cube, la densité de flux $\vec{\varphi}$ est donc parallèle à Ox et vaut :

$$\varphi = \frac{\Phi_0}{S}$$

Le flux à travers les 4 faces isolées est nul. Comme on le verra par la suite, s'il n'y a pas de sources de chaleur internes au cube, le flux de chaleur se conserve. Ainsi, si l'on calcule le flux Φ_1 qui traverse la surface diagonale $DCEF$ inclinée à 45° on trouvera $\Phi_1 = \Phi_0$ (à faire en application).

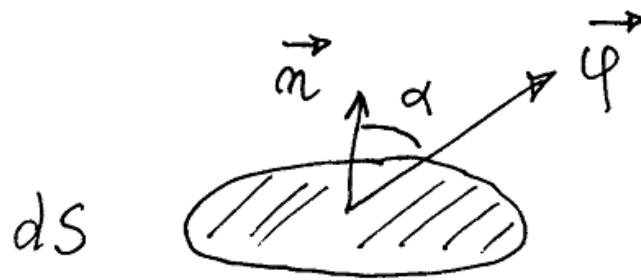


Figure 2.1: Notations

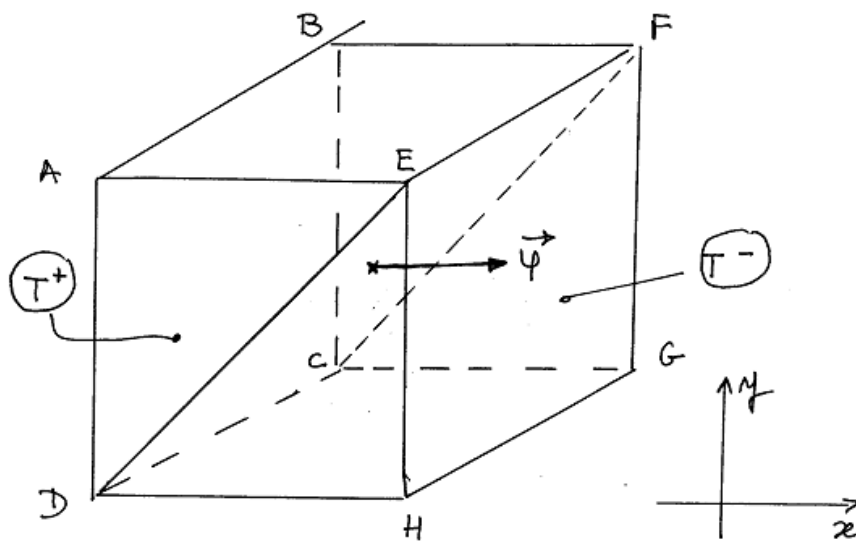


FIG. 2.2 - Example

Figure 2.2: Exemple

- Surface isotherme : si dans un milieu on relève les températures en tout point à un instant donné et qu'on relie entre eux les points de même température on obtient des surfaces isothermes en 3D et des lignes isothermes en 2D (voir figure 2.3).

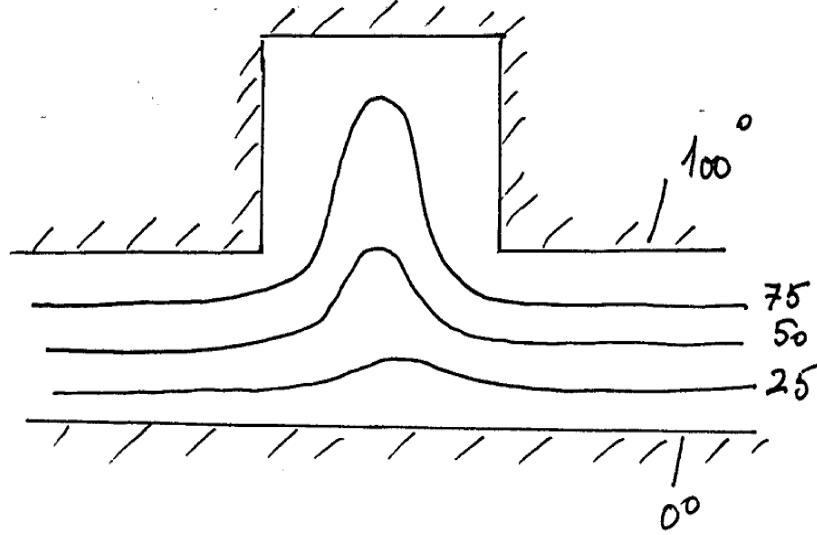


FIG. 2.3 – Exemples de courbes isothermes

Figure 2.3: Exemples de courbes isothermes

2.1.2 Enoncé de la loi de Fourier

Considérons à nouveau le montage de la figure 2.2. Imposons une différence de température $T^+ - T^- = \Delta T_0$ entre les deux faces non isolées : un flux de chaleur Φ_0 circulera. Doublons cette différence de température : un flux égal à $2\Phi_0$ circulera alors. Pour une valeur donnée de l'écart de température, remplaçons le cube par un matériau différent. La valeur du flux en sera affectée. Ceci donne l'intuition que le flux qui circule par conduction est proportionnel à la différence de température et à l'aptitude du matériau à conduire la chaleur.

En 1811, Fourier propose une formulation *locale* de cette loi, donc valable en tout point :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \vec{\text{grad}} T$$

qui relie la densité de flux $\vec{\varphi}$ en W.m^{-2} à la conductivité thermique λ du matériau ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) et au gradient local de température. Le signe $-$ de la loi de Fourier résulte d'une convention qui rend positif un flux de chaleur s'écoulant du chaud vers le froid, donc dans le sens d'un gradient négatif.

Cette loi est l'analogue thermique de la loi d'Ohm : $\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma \vec{\text{grad}} V$ où \vec{j} est la densité de courant électrique, σ la conductivité électrique du métal et V le potentiel électrique. Le flux thermique est l'analogue du courant électrique et la température est l'analogue du potentiel électrique. Comme on définit la résistance électrique $R_e = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}$ d'un conducteur de longueur l et de section S , on définit la résistance thermique par :

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{l}{S} \text{ en } \text{K.W}^{-1}$$

telle que:

$$\Delta T = R_{th} \Phi$$

2.1.3 Orthogonalité du gradient et de l'isotherme

Considérons le dessin de la figure 2.4. Entre les points M et M' distants de $d\vec{M}$, la différence de température vaut :

$$dT = \vec{\text{grad}} T \cdot d\vec{M} \quad \left(\text{car } dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz \right)$$

Si l'on place le point M' sur la même isotherme que M , on obtient :

$$\vec{\text{grad}} T \cdot d\vec{M} = 0$$

ce qui signifie que le gradient de température en chaque point est perpendiculaire à l'isotherme passant par ce point. On en déduit aussi que les lignes de flux $\vec{\varphi}$ sont elles aussi perpendiculaires aux isothermes. Ceci permet de définir la notion de tube de flux. Sur la figure 2.5 les courbes fermées C_1, C_2, C_3 appartiennent aux surfaces isothermes T_1, T_2 et T_3 et sont liées entre elles par une même ligne de flux. Les lignes de flux étant par définition des surfaces adiabatiques (aucun flux ne les traverse), les surfaces C_1, C_2, C_3 sont donc traversées par le même flux. Le tube ainsi formé s'appelle un *tube de flux*. Il laisse passer un flux Φ . On peut définir la résistance thermique R_{th} de ce tube entre les isothermes T_1 et T_2 par exemple, telle que :

$$T_1 - T_2 = R_{th} \Phi$$

Cette loi est l'analogue de la loi d'Ohm : $\Delta V = R_e I$.

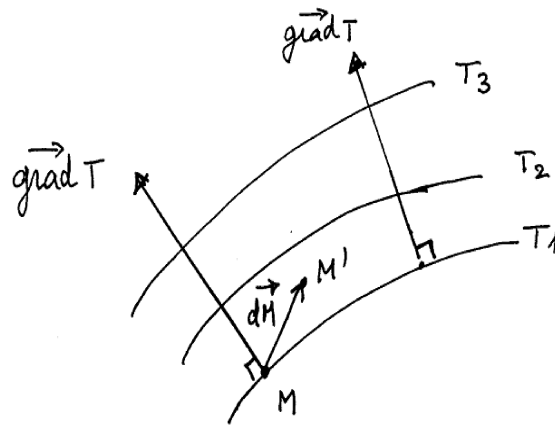


Figure 2.4: Gradient de température

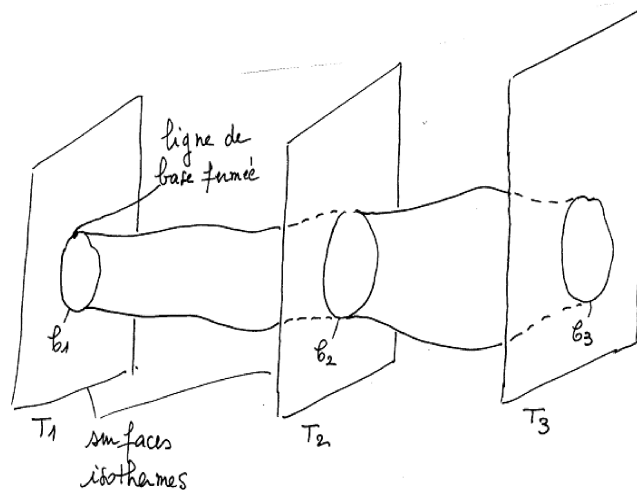


Figure 2.5: Définition d'un tube de flux.

2.2 La conductivité thermique

2.2.1 Généralités

Comme on le voit sur les tableaux 2.6 et 2.7 la conductivité thermique λ des solides varie de $200 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour le mercure à $0.03 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ pour la laine de verre. En règle générale, les métaux qui sont bons conducteurs de l'électricité sont bons conducteurs thermiques.

Les liquides conduisent en général moins bien la chaleur que les solides, sauf lorsque ce sont des métaux liquides (mercure, sodium liquide, etc).

La conductivité thermique des gaz dépend de la pression mais aussi fortement de la température et de la masse molaire M du gaz. La relation suivante donne un bon ordre de grandeur :

$$\lambda = A \sqrt{\frac{T}{M}}$$

où A est une constante.

2.2.2 Matériaux anisotropes

Certains matériaux ont une structure qui rend la conductivité thermique différente selon la direction de propagation de la chaleur. C'est le cas des matériaux fibreux par exemple (fibre de verre, fibre de carbone). Dans ces matériaux, qu'on appelle anisotropes, le flux de chaleur aura donc une direction privilégiée.

2.3 L'équation de la chaleur en conduction

2.3.1 Démonstration

Rappelons d'abord la définition de la chaleur massique. Considérons un solide de masse m . S'il reçoit une quantité de chaleur dQ sa température s'élève de dT telle que :

$$dQ = m.CdT$$

avec dQ en *Joule*, m en *Kg*, dT en *K* et où C désigne la chaleur massique du solide en $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Cette grandeur est constante pour un liquide ou un solide tandis que pour un gaz elle varie en fonction de la pression. On est alors amené à définir C_P et C_V selon que l'apport de chaleur se fait à pression ou à volume constant.

On s'intéresse ici à un solide dont on isole un volume V (cf. figure 2.8) dont la normale \vec{n} est orientée vers l'extérieur. Faisons un bilan de l'énergie échangée par ce volume V par unité de temps. Puisque nous ne considérons que la conduction comme mode de transfert, ce bilan traduira le fait que le flux conductif qui est entré à travers la surface S n'a servi qu'à chauffer ou refroidir la masse de solide contenue dans le volume V . En prévision de nombreuses situations que l'on verra ultérieurement, envisageons également la possibilité que ce volume V contiennent des sources internes de chaleur, q en W.m^{-3} comme par exemple une résistance électrique libérant de la chaleur par effet Joule ou encore une source radioactive pour un problème de conduction thermique dans un coeur de réacteur. On écrit donc :

$$-\int_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS + \int_V q dv = \int_S \lambda \vec{g} \cdot d\vec{S} + \int_V q dv = \int_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dv$$

Le signe $-$ dans le calcul du flux tient au fait que l'on fait un bilan dans le sens opposé à la normale \vec{n} . Par ailleurs, la dérivée partielle de la température est due au fait que T est une fonction de plusieurs variables : $T(x, y, z, t)$.

L'utilisation du théorème d'Ostrogradski permet d'écrire :

$$\int_V \left(\text{div} \left[\lambda \vec{g} \cdot d\vec{T} \right] + q \right) dv = \int_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dv$$

Cette relation étant valable quel que soit le volume V , on obtient :

$$\text{div} \left(\lambda \vec{g} \cdot d\vec{T} \right) + q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Plusieurs cas particuliers allègent cette équation :

- Régime permanent: la température ne varie pas en fonction du temps. De ce fait $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ et l'équation de la chaleur devient :

$$\text{div} \left(\lambda \vec{g} \cdot d\vec{T} \right) + q = 0$$

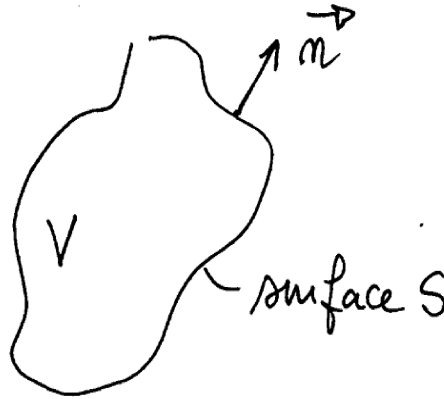


FIG. 2.7 – Volume V .

Figure 2.8: Volume V .

- Absence de sources de chaleur : on a ici "équilibre" entre l'apport de chaleur par conduction dans le solide et son échauffement :

$$\text{div}(\lambda \vec{\text{grad}} T) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Conductivité λ constante : en dehors des solides anisotropes, λ est une constante. On se limitera à ce cas dans ce cours. On peut donc le sortir de l'opérateur div et la loi de Fourier devient :

$$\lambda \nabla^2 T + q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

où ∇^2 désigne l'opérateur laplacien.

2.3.2 Conditions aux limites

Même dans un cas très simple sans sources et permanent ($\frac{\partial T}{\partial t} = q = 0$) la résolution de l'équation de T , qui devient $\nabla^2 T = 0$, nécessite l'adjonction de conditions aux limites aux frontières du domaine étudié. Ces conditions peuvent être de trois types :

Conditions aux limites isothermes

La température de la frontière est imposée. Elle peut dépendre du temps et même varier le long de la frontière. Le cas le plus simple est $T = T_0 = \text{Cste}$ sur toute la frontière. Une telle condition est expérimentalement difficile à réaliser sauf si le solide dans lequel on cherche la distribution de température est en contact avec un milieu extrêmement conducteur (cuivre par exemple) et que ce milieu est lui-même parcouru par un fluide qui le maintient à T_0 (cf. figure 2.9).

Conditions aux limites à flux constant

Une densité de flux de chaleur $\vec{\varphi}_0$ est imposée sur la frontière. Cette condition, de part la loi de Fourier, impose donc la valeur du gradient de température à la frontière du corps considéré ($\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\varphi_0}{\lambda}$) où \vec{n} est la normale à la frontière. La réalisation expérimentale d'un flux imposé peut se faire par exemple au moyen de résistances électriques (cf. figure 2.10). Un cas particulier de flux imposé est $\varphi_0 = 0$: cela signifie que la paroi est isolée thermiquement (on dit aussi adiabatique) ce qui se réalise en la calfeutrant avec un matériau isolant (laine de verre, polystyrène). Toujours de part la loi de Fourier, on en déduit :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial n} \right]_P = 0$$

à la paroi (indice P). Ainsi les isothermes seront perpendiculaires à la frontière considérée.

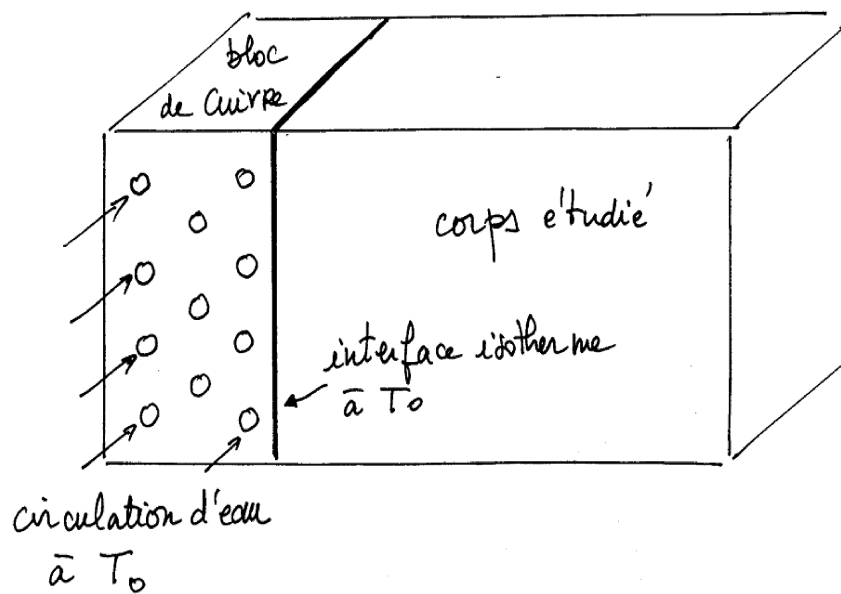


Figure 2.9: Réalisation expérimentale d'une condition aux limites isothermes à T_0 .

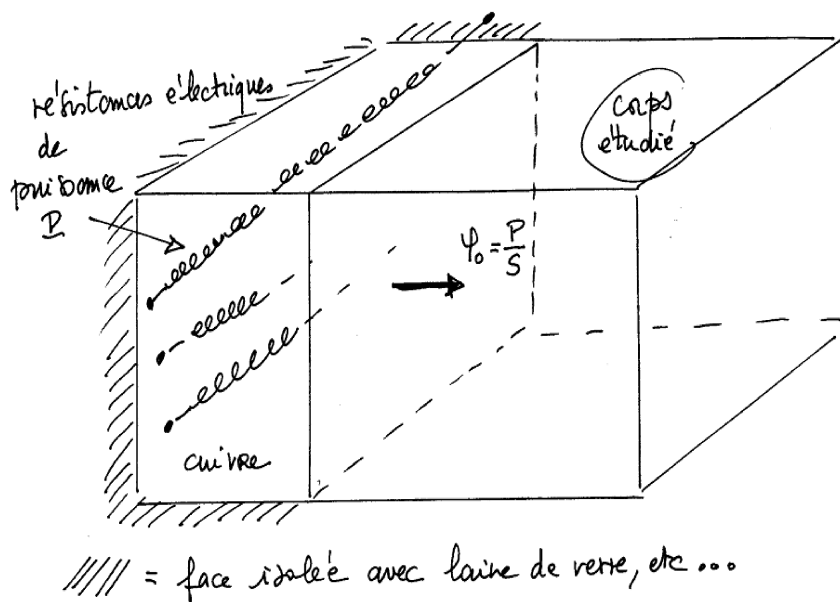


FIG. 2.10 - Réalisation expérimentale d'une condition de flux constant : Toutes

Figure 2.10: Réalisation expérimentale d'une condition de flux constant : Toutes les faces du bloc de cuivre autres que la frontière étudiée sont isolées thermiquement.

Echanges convectifs sur une paroi

Lorsqu'une paroi échange de la chaleur par convection avec l'extérieur, la densité de flux φ qu'elle échange est proportionnelle à la différence de température entre la paroi et le milieu fluide extérieur, multipliée par un coefficient d'échange h en $W.m^{-2}.K^{-1}$ qui tient compte des différentes propriétés physiques et cinématiques du fluide léchant la paroi :

$$\varphi = h (T_{paroi} - T_{fluide})$$

En tout point de la frontière, ce flux φ étant fourni par conduction au travers du solide étudié, on en déduit le gradient de T à cette frontière :

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{paroi} = h(T_{paroi} - T_{fluide})$$

Echanges radiatifs sur une paroi

Le rayonnement d'une paroi peut être un mode d'échange à prendre en compte, surtout si sa température est élevée (supérieure à 100 degrés environ). Comme on le verra, le flux qu'une paroi à la température T_P échange par rayonnement avec le milieu externe à la température T_{ext} vaut : $\sigma(T_P^4 - T_{ext}^4)$ où σ est la constante de Stefan-Boltzmann. Dans un tel cas, la condition aux limites à la frontière deviendra donc :

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{paroi} = \sigma(T_{paroi}^4 - T_{ext}^4)$$

Condition de passage entre 2 solides

Si le problème étudié comporte deux milieux (ou plus) on devra écrire une condition aux limites à chaque frontière entre deux solides en contact. La conservation de la chaleur de part et d'autre de la frontière impose :

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_{paroi} = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_{paroi}$$

où λ_1 et λ_2 sont les conductivités thermiques des solides 1 et 2 et T_1 et T_2 sont les distributions de température dans ces solides.

2.3.3 Conductivité et diffusivité thermique

Considérons la résolution d'un problème de conduction **permanent** sans sources ($q = 0$) dans un milieu homogène. On résoud donc :

$$\nabla^2 T = 0$$

Si les conditions aux limites sont isothermes, la conductivité thermique λ du solide n'intervient pas dans la solution. Elle n'interviendra que si celles-ci prescrivent le flux qui, on l'a vu, impose la valeur de $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$ à la frontière.

Considérons maintenant un problème non-permanent de conduction (toujours avec $q = 0$). On résoud donc :

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

où $a = \frac{\lambda}{\rho C_P}$ (en $m^2.s^{-1}$) désigne la diffusivité thermique du solide. Le tableau 2.11 donne les valeurs comparées de λ et a pour quelques corps. Il est intéressant de comparer le fer et l'air qui ont des λ totalement dissemblables mais une diffusivité thermique a presque égale. On retiendra que la conductivité thermique λ est l'aptitude à transmettre un flux sous l'effet d'une différence de température tandis que la diffusivité thermique a est l'aptitude à évaluer plus ou moins vite dans le temps les différences de température présentes dans le corps étudié.

Sur la figure 2.12a, c'est la conductivité thermique λ qui fixera la valeur du flux dans la brique lorsqu'on la soumet à un écart de température ΔT . C'est par contre la diffusivité thermique a qui fixera le temps nécessaire à ce que la face de droite ressente l'effet d'un choc thermique imposé à $t = 0$ sur la face gauche (cf. figure 2.12b).

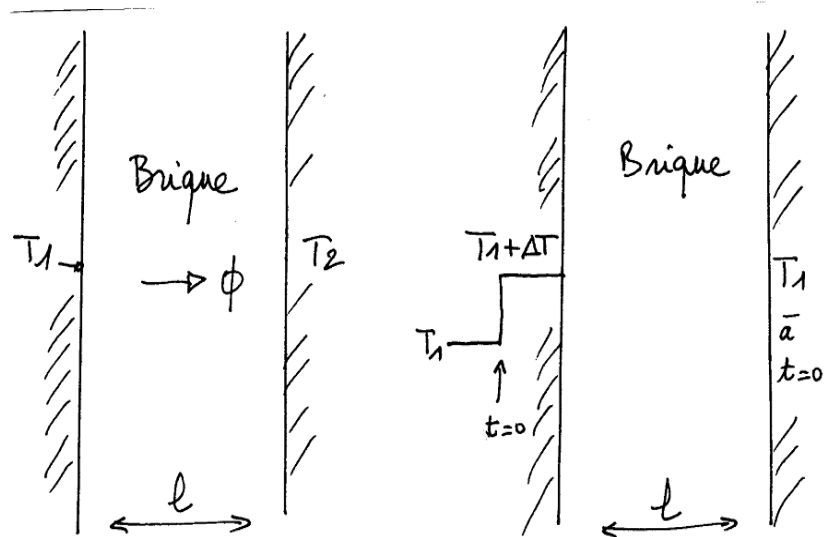


Figure 2.12: Brique en régime stationnaire (a) et instationnaire (b)

2.3.4 Equation de la chaleur en régime permanent

En régime permanent et dans un matériau isotrope, l'équation de la chaleur est une équation de Poisson :

$$\nabla^2 T = -\frac{q}{\lambda}$$

L'expression développée varie avec le système de coordonnées :

- cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{q}{\lambda}$$

- cylindriques

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{q}{\lambda}$$

- sphériques

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = -\frac{q}{\lambda}$$

Les problèmes 1D peuvent souvent se résoudre analytiquement. Les problèmes 3D nécessitent souvent l'emploi de méthodes numériques traitées par ordinateur. En 1D, les équations ci-dessus deviennent:

En cartésien:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{q}{\lambda}$$

En cylindrique:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{q}{\lambda}$$

En sphérique :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{q}{\lambda}$$

2.4 Exemples de résolution de l'équation de la chaleur en conduction

Ces exemples sont directement tirés du cours de Transferts Thermiques de l'IUT Génie thermique et Energie de Grenoble.

2.4.1 Cas d'un mur plan

Des température T_1 et T_2 sont imposées aux bornes d'un mur d'épaisseur e et de conductivité thermique λ (cf. figure 2.13).

L'équation de la chaleur 1D cartésienne : $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ admet la solution $T = Ax + B$. Les conditions aux limites en $x = 0$ et en $x = e$ permettent d'éliminer A et B pour donner:

$$T = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{e}$$

La distribution de température est donc linéaire et les isothermes sont régulièrement distribuées de $x = 0$ à $x = e$. La densité de flux en tout point vaut:

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{e}$$

et est bien positive si $T_1 > T_2$ (flux allant du chaud vers le froid). Le flux Φ traversant une surface S vaut donc $\lambda \frac{T_1 - T_2}{e} S$ se sorte que la résistance thermique R définie par $T_1 - T_2 = R\Phi$ vaut:

$$R = \frac{1}{\lambda} \frac{e}{S}$$

Notons enfin que le flux de chaleur Φ est le même quelle que soit l'abscisse à laquelle on le calcule (de 0 jusqu'à e). Ceci est garanti par la pente constante de la distribution de température.

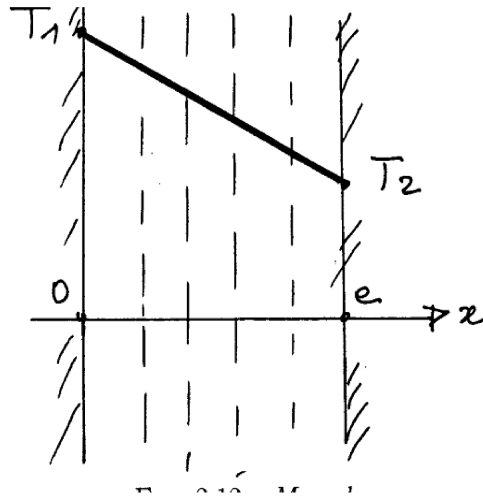


Figure 2.13: Mur plan

2.4.2 Association de murs en série ou en parallèle

Lorsque plusieurs murs sont en série, la résistance totale, R_t du tube de flux ainsi formé vaut:

$$R_t = \sum_i R_i = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \frac{e_i}{S_i}$$

Leur mise en parallèle amène à l'expression suivante de R_t , analogue de celle obtenue en électricité:

$$\frac{1}{R_t} = \sum_i \frac{1}{R_i} = \sum_i \frac{\lambda_i S_i}{e_i}$$

Cette méthode s'applique à des résistances de sections différentes à condition que l'on raisonne sur un tube de flux. C'est le cas par exemple sur la figure 2.14 sur laquelle les frontières latérales des 5 résistances sont isolées.

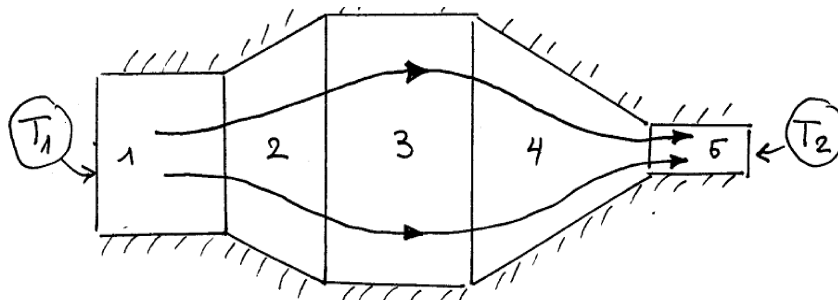


FIG. 2.13 – Mise en série de résistances thermiques.

Figure 2.14: Mise en série de résistances thermiques.

2.4.3 Mur avec sources internes

C'est le cas d'une paroi ou d'un plancher chauffé intérieurement par des résistances électriques (cf. figure 2.15).

Températures d'extrémités identiques

Appelons T_0 la température aux extrémités de la paroi et q ($W.m^{-3}$) la densité volumique des sources. L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{q}{\lambda}$$

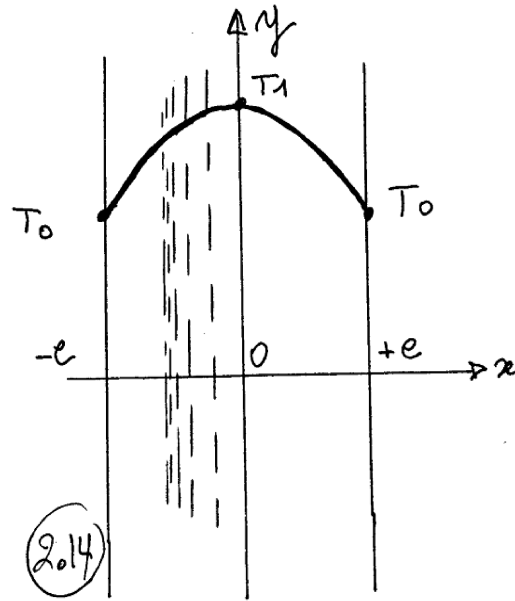


Figure 2.15: Mur avec sources internes

dont la solution est une parabole :

$$T = -\frac{q}{\lambda} \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

Les conditions aux limites en $x = +e$ et $x = -e$ donnent finalement :

$$T = T_0 + \frac{q}{2\lambda}(e^2 - x^2)$$

L'écart de température au centre du mur vaut donc : $\frac{qe^2}{2\lambda}$. La densité de flux vaut :

$$\varphi = qx$$

Elle est nulle au centre par symétrie et maximum en $x = \pm e$. Les isothermes sont donc plus serrées à cet endroit. Le flux $\varphi = qe$ en $x = e$ est tel qu'il évacue l'ensemble des sources situées entre $x = 0$ et $x = e$.

Températures d'extrémités différentes

Appelons T_1 et T_2 les températures en $x = -e$ et en $x = e$. La solution générale est inchangée et seules les conditions aux limites changent. On en déduit la solution :

$$T = \frac{q}{2\lambda}(e^2 - x^2) - \frac{T_1 - T_2}{2e}x + \frac{T_1 + T_2}{2}$$

2.4.4 Mur avec conditions de convection aux parois

La température au loin de l'air qui entoure le mur vaut T_1 à gauche et T_2 à droite (cf. figure 2.16).

Appelons h le coefficient d'échange aux parois. La solution générale de l'équation de la chaleur est inchangée : $T = Ax + B$. Les conditions aux limites se traduisent par :

$$\text{en } x=0 : \varphi = h(T_1 - B) = -\lambda A$$

$$\text{en } x=e : \varphi = h(Ae + B - T_2) = -\lambda A$$

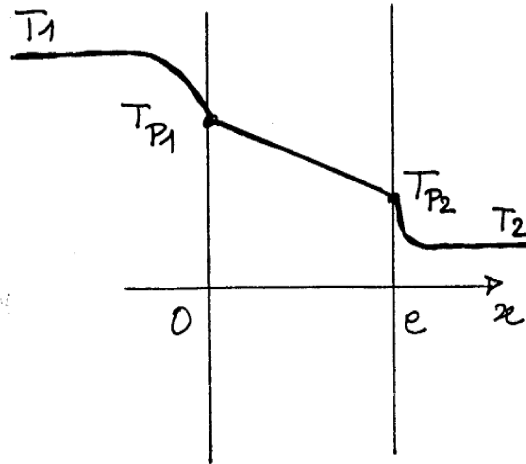


Figure 2.16: Mur avec conditions de convection aux extrémités.

On peut éliminer A et B de ces deux équations et obtenir la solution finale. On peut aussi utiliser la notion de résistance thermique (cf. figure 2.17). La résistance convective R_{cv} est telle que $T_1 - T_{P1} = R_{cv}\Phi$ mais $\Phi = hS(T_1 - T_{P1})$ d'où :

$$R_{cv} = \frac{1}{hS}$$

tandis que $R_{cd} = \frac{1}{\lambda S} \frac{e}{2}$.



Figure 2.17: Résistances thermiques équivalente dans le cas d'un mur avec convection.

La résistance totale entre T_1 et T_2 vaut donc :

$$R_t = 2R_{cv} + R_{cd} = \frac{2}{hS} + \frac{e}{\lambda S}$$

d'où le flux $\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_t}$ qui circulera à travers le mur. On en déduit les températures de paroi :

$$T_{P1} = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{2 + eh/\lambda}$$

$$T_{P2} = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{2 + eh/\lambda}$$

A l'intérieur du mur la solution linéaire s'écrit :

$$T = T_{P1} - (T_{P1} - T_{P2}) \frac{x}{e}$$

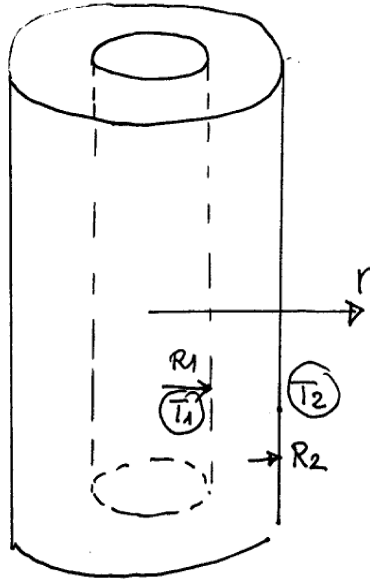


Figure 2.18: Conduction dans une coque cylindrique

2.4.5 Conduction dans une coque cylindrique

Considérons une coque cylindrique limitée par les rayons R_1 et R_2 de températures T_1 et T_2 , suffisamment longue pour que l'on puisse considérer le transfert de chaleur uniquement radial (cf. figure 2.18).

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

d'où : $r \frac{dT}{dr} = A$ ce qui donne :

$$T = AL \ln r + B$$

Les conditions aux limites fournissent les constantes A et B et on en déduit la solution finale :

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}$$

On en déduit le flux à travers une surface cylindrique quelconque de rayon r et de hauteur L située entre R_1 et R_2 :

$$\Phi = 2\pi r L \varphi = -2\pi r L \lambda \frac{dT}{dr} = -2\pi L \lambda \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)}$$

ce qui fournit la valeur de la résistance thermique de la coque :

$$R_{cyl} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi \lambda L}$$

On pourra vérifier que si R_2 et R_1 sont très proches, le problème se comporte comme un mur (disparition de l'effet de courbure) et R_{cyl} tend vers $\frac{e}{\lambda S}$.

2.4.6 Conduction dans une coque sphérique

L'équation de T en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

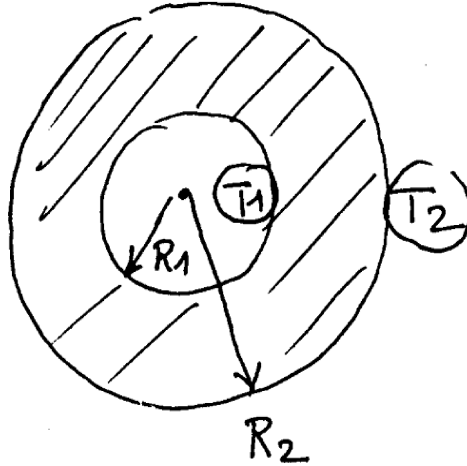


Figure 2.19: Conduction dans une coque sphérique.

d'où : $r^2 \frac{dT}{dr} = A$ et $T = -\frac{A}{r} + B$. Les conditions aux limites fixent A et B de sorte que (cf.figure 2.19):

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}}$$

Le flux de chaleur vaut alors :

$$\Phi = 4\pi r^2 \varphi = -4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr} = 4\pi \lambda \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

et est bien positif si $T_1 > T_2$. La résistance thermique d'une coque vaut ainsi :

$$R_{sph} = \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{4\pi \lambda}$$

2.4.7 Remarques finales sur la conduction

La plupart des exemples traités dans le chapitre précédent supposent le corps étudié solide. Il faut garder à l'esprit le fait que la conduction existe aussi dans les fluides (liquides ou gaz) mais que , en général, ceux-ci restent rarement immobiles et, de ce fait, transportent en se déplaçant un flux de chaleur infiniment plus grand que celui qui circule par conduction seule. Ce mode de transport est la *Convection* et sera vu ultérieurement.

Analogie avec la diffusion de masse

Nous venons de voir qu'un flux de chaleur est proportionnel à la conductivité thermique et au gradient de température. Considérons un liquide (eau par exemple) contenant une distribution de sel inhomogène. Du fait des différences de concentration C de sel dans le liquide, une migration des molécules de sel s'effectuera , elle aussi dirigée dans le sens des gradients négatifs de C c'est à dire du plus concentré vers le moins concentré. Un débit massique q_m de sel (en $kg.s^{-1}$) s'en suivra dont la loi de Fick fixe la densité :

$$\vec{\varphi}_m = -D \vec{grad}C$$

où $\vec{\varphi}_m$ représente le vecteur de densité de flux massique (en $kg.s^{-1}m^{-2}$) , D la diffusivité de masse ($m^2.s^{-1}$) et C la concentration de soluté (sel) dans le solvant (eau), en $kg.m^{-3}$.

La divergence de la loi de Fick fournit une équation différentielle très semblable à celle de la chaleur :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = div \left(D \vec{grad}C \right)$$

où le second membre se résume à $D \nabla^2 C$ si D est constant. Cette équation est l'analogue de $\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T$ pour la conduction de la chaleur sans sources.

Chapter 3

Le rayonnement électromagnétique

3.1 Généralités

Le rayonnement est un mode de transfert particulièrement important dans de nombreuses situations industrielles à hautes températures (fours par exemple) mais aussi géophysiques (refroidissement nocturne de la Terre). Le rayonnement est à la base de nombreuses méthodes de mesures de température (caméra infra-rouge, pyromètre à filament) qui sont non-intrusives et permettent d'opérer à distance, d'où l'importance d'étudier soigneusement le rayonnement.

Le rayonnement thermique est de nature électromagnétique en raison de l'agitation de la matière sous l'effet de la température. Une onde électromagnétique consiste en un champ électrique \vec{E} , un champ magnétique \vec{B} et un vecteur d'onde \vec{k} , tous trois perpendiculaires. L'onde se propage dans la direction du vecteur d'onde avec une vitesse c qui varie selon le milieu qu'elle traverse. Cette vitesse vaut $c = \frac{c_0}{n}$ où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide et n l'indice du milieu. La fréquence d'une onde électromagnétique ne varie pas avec le milieu qu'elle traverse. Elle est liée à c par la relation :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = cT$$

où $\nu = 1/T$ est la fréquence de l'onde électromagnétique. On voit donc que la longueur d'onde sera fonction du milieu traversé.

Une onde transporte avec elle de l'énergie. Lorsqu'elle est émise par un corps radiant, celui-ci perd donc un certain flux d'énergie Φ (Watt). De même, un corps frappé par une onde électromagnétique reçoit de l'énergie. La distribution énergétique d'un rayonnement polychromatique (large gamme de λ) varie avec λ (figure 3.1).

On définit ainsi le flux monochromatique Φ_λ ($W.m^{-1}$) qui caractérise la contribution de chaque longueur d'onde. On a, bien sûr :

$$\Phi = \int_0^\lambda \Phi_\lambda d\lambda$$

Seules les longueurs d'onde comprises entre $0.4\mu m$ et $0.8\mu m$ sont visibles par l'oeil. La figure 3.2 illustre la variété de rayonnements existants.

Les rayons lumineux interagissent avec la matière de sorte que si certains corps la laissent passer (corps transparents) certains autres l'absorbent en partie ou en totalité (corps opaques).

Pour un flux incident Φ_i , on définit les quantités suivantes (cf. figure 3.3) :

- Flux réfléchi Φ_r
- Flux absorbé Φ_a
- Flux transmis Φ_t

on appelle :

- réflectivité $r = \frac{\Phi_r}{\Phi_i}$
- absorptivité $a = \frac{\Phi_a}{\Phi_i}$
- transmittivité $t = \frac{\Phi_t}{\Phi_i}$

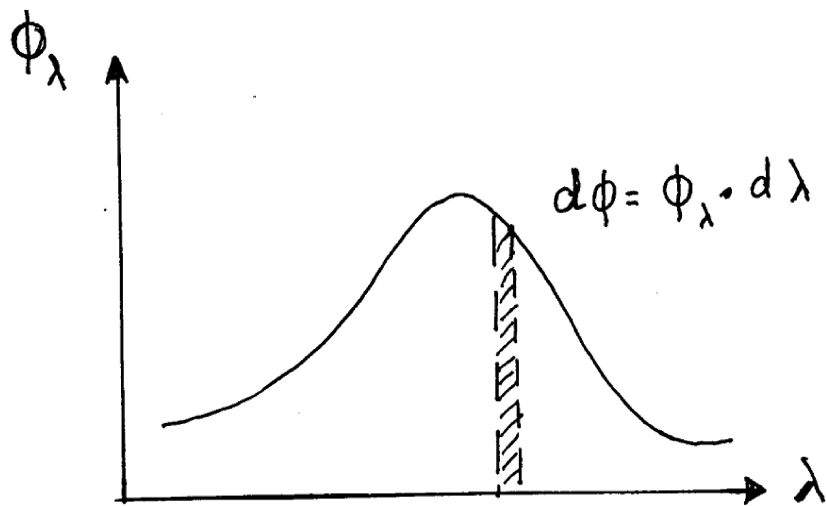


Figure 3.1: Spectre d'un rayonnement électromagnétique.

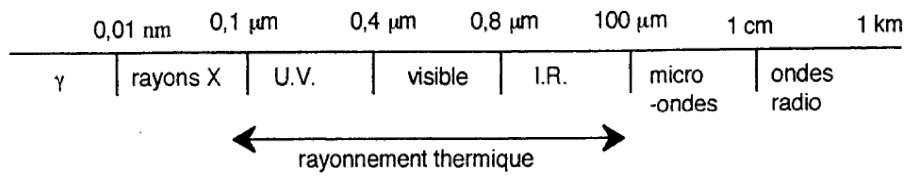


Figure 3.2: Divers rayonnements électromagnétiques classés selon leur longueur d'onde.

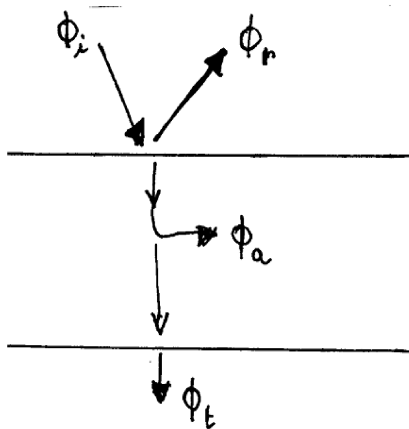


Figure 3.3: Définition des flux réfléchis, absorbés, transmis.

La conservation de l'énergie impose :

$$r + a + t = 1$$

Ces grandeurs varient selon la valeur de λ . Ainsi le verre laisse passer les UV et est opaque aux Infra-rouges. On doit donc définir r_λ , a_λ , t_λ qui sont les réflectivités, absorptivités et transmittivités monochromatiques. Elles dépendent aussi de la direction d'émission.

3.2 Le corps noir

3.2.1 Définition

C'est un corps idéal qui absorberait, s'il existait, tout rayonnement qu'il recevrait, quelle que soit sa longueur d'onde. Pour qu'un corps noir reste en équilibre thermique (sa température reste constante) il doit émettre également de l'énergie par rayonnement. Son absorptivité est donc égale à 1.

L'intérêt du corps noir réside dans le fait qu'il sert de référence pour définir les propriétés radiatives d'un corps réel. Il est important de noter qu'un corps noir n'est pas forcément de couleur noire. Un corps de couleur noire est donc noir dans le visible mais peut ne pas l'être pour d'autres longueurs d'onde. On peut réaliser expérimentalement un corps noir en réalisant le montage de la figure 3.4 où une cavité est percée d'un petit trou qui piège les rayons entrants. Elle est équipée de résistances électriques pour réguler sa température. On doit donc retenir qu'un corps noir absorbe tout rayonnement incident mais émet suivant une loi particulière: la loi de Stefan-Boltzman.

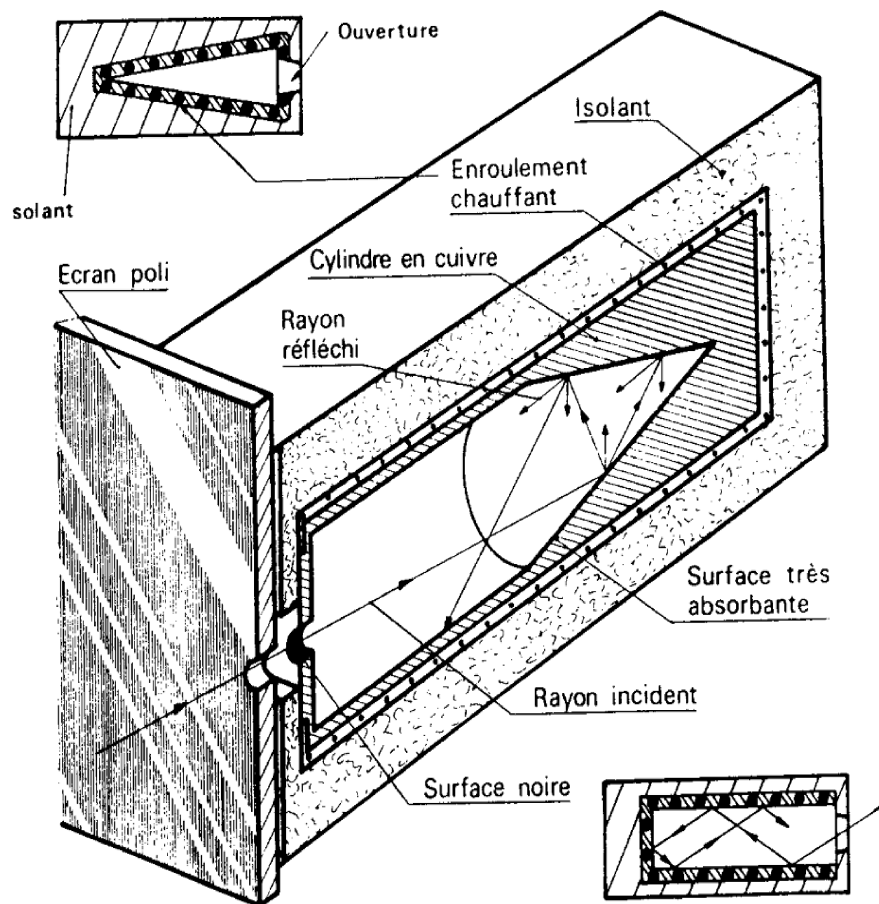


Figure 3.4: Réalisation expérimentale d'un corps noir.

3.2.2 La loi de Stefan-Boltzmann

Définissons d'abord l'émittance du corps noir, M^0 , qui est la puissance totale émise par une unité de surface, en intégrant sur toutes les longueurs d'onde. la loi de Stefan-Boltzmann lie cette grandeur à la température du corps noir :

$$M^0 = \sigma T^4$$

où M^0 est en $W.m^{-2}$, T en Kelvin, et σ est la constante universelle de Stefan-Boltzmann :

$$\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.K^{-4}$$

3.2.3 La loi de Planck

Cette loi fixe la contribution respective de chaque longueur d'onde dans l'émission du corps noir. Elle s'écrit :

$$M_\lambda^0 = \frac{C_1}{\lambda^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)}$$

avec : $C_1 = 3.74110^{-16} W.m^{-2}$, $C_2 = 0.0143 m.K$ et où M_λ^0 (en $W.m^{-3}$) désigne l'émittance monochromatique .

L'intégration de M_λ^0 donne évidemment M^0 :

$$\int_0^\infty M_\lambda^0 d\lambda = \sigma T^4 = M^0$$

Les figures 3.5 montrent l'allure de M_λ^0 en fonction de T pour diverses températures. Elles passent toutes par un maximum.

3.3 Loi de Wien

3.3.1 Enoncé

Cette loi fixe le lieu de ces maxima. En annulant $\frac{\partial M_\lambda^0}{\partial \lambda}$ on trouve:

$$\lambda_{max} T = 2898 \mu m.K$$

où λ_{max} est la longueur d'onde correspondant au maximum d'énergie émise à la température T . Le déplacement de λ_{max} vers les courtes longueur d'onde quand T augmente explique que, lorsqu'un corps chauffe, il commence d'abord par émettre dans l'infra-rouge et n'est donc pas visible, puis son spectre vient empiéter sur la zone rouge du spectre visible, puis couvre tout le visible et devient alors blanc. D'où l'expression " chauffer au rouge " ou "chauffer à blanc ".

Il n'y a quasiment aucune zone commune entre le spectre du rayonnement solaire ($T \approx 5700K$) et celui d'un corps à température ambiante (300K). Le soleil émet principalement dans le visible et dans l'UV tandis qu'un corps à l'ambiante n'émet que dans l'infra-rouge. Cette propriété est exploitée dans les serres ou les capteurs solaires.

3.3.2 Energie émise par le corps noir entre deux longueurs d'onde

Pour un corps à une température donnée, on a souvent besoin d'évaluer la partie de l'énergie qu'il émet dans une bande spectrale donnée (entre λ_1 et λ_2). Cela revient à calculer la grandeur adimensionnelle :

$$F_{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_\lambda^0 d\lambda}{\int_0^\infty M_\lambda^0 d\lambda = \sigma T^4}$$

que l'on peut écrire :

$$F_{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{\int_0^{\lambda_2} M_\lambda^0 d\lambda - \int_0^{\lambda_1} M_\lambda^0 d\lambda}{\sigma T^4} = F_{0-\lambda_2} - F_{0-\lambda_1}$$

Il serait donc utile de disposer d'une table fournissant, pour chaque température, la valeur de l'intégrale :

$$F_{0-\lambda} = \frac{\int_0^\lambda M_\lambda^0 d\lambda}{\sigma T^4} = \frac{1}{\sigma} \int_0^\lambda \frac{C_1}{\lambda^5 T^4 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)} d\lambda$$

L'inconvénient est qu'il faudrait une table à 2 entrées (en T et en λ) . Pour remédier à ce problème on utilise λT comme variable unique et on pose :

$$F_{0-\lambda T} = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\lambda T} \frac{C_1 d(\lambda T)}{(\lambda T)^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)}$$

On a ainsi une table avec une entrée unique sur la variable λT . La courbe de la figure 3.6 montre le résultat obtenu.

On calcule donc l'énergie émise par un corps noir à la température T entre λ_1 et λ_2 par :

$$F_{\lambda_1--\lambda_2} = F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T}$$

Exemple : en supposant que le soleil est un corps noir à $5800K$, quelle st la fraction de l'énergie qu'il émet dans le domaine visible ($0.4 - 0.8\mu m$) ?

On calcule $\lambda_1 T = 2320\mu m.K$ et $\lambda_2 T = 4640\mu m.K$. Sur la figure 3.6 on lit :

$F_{0-2320} = 0.126$ $F_{0-4640} = 0.586$ d'où : $F_{\lambda_1--\lambda_2} = 0.46$.

Donc, 46% de l'énergie solaire émise est rayonnée dans le visible.

3.4 Corps réels

Nous venons d'étudier les lois d'émittance totale M^0 ou monochromatique M_λ^0 du corps noir. Nous ne nous sommes pour l'instant pas encore intéressés à l'importance de la direction dans laquelle le rayonnement était émis par rapport à la normale à la surface d'émission. Un corps noir rayonne de façon identique dans toutes les directions de l'espace : on dit qu'il rayonne de manière *diffuse* (ou encore qu'il suit la loi de Lambert). Un corps réel ne rayonne jamais vraiment de façon diffuse. Pour simplifier, nous ignorerons cet aspect directionnel du rayonnement des corps réels étudiés. Par ailleurs, l'émittance M d'un corps réel n'est pas égale à celle, M^0 , du corps noir, considéré comme le radiateur parfait. On pose :

$$M = \epsilon M^0$$

où ϵ désigne l'émissivité du corps à la température considérée. ϵ est donc inférieur à 1 (cf. Fig. 3.7). L'émissivité est aussi fonction de la longueur d'onde et il faut définir l'émissivité monochromatique telle que :

$$M_\lambda = \epsilon_\lambda M_\lambda^0$$

mais, pour simplifier, nous allons faire deux hypothèses :

- les corps étudiés sont gris : $\epsilon_\lambda = \epsilon \quad \forall \lambda$
- leur émission est diffuse (ou Lambertienne, ou encore isotrope) donc indépendante de la direction d'émission.

To be continue.....