

Transformées de Laplace et Représentation des systèmes asservis

2.1) Introduction

L'étude des **systèmes asservis** mène obligatoirement à la résolution des **équations différentielles modélisant** des phénomènes naturels mêmes artificiels. Cependant, la résolution n'est pas toujours simple, surtout si l'ordre de l'**équation différentielle** est supérieur à deux ($n > 2$). Pour remédier à ce problème et faciliter par la suite la résolution en simplifiant au mieux les calculs, l'**automaticien** peut se servir toujours des outils mathématiques qui peuvent être des clefs puissants. Parmi ces outils, la **transformée de Laplace**.

Malgré les difficultés de la mise en **équations différentielles entrées/sorties** (connaissance du processus) et malgré aussi que ces équations ne sont que des approximations négligeant des termes d'ordre plus élevés. L'**automaticien** doit trouver l'expression de la **sortie** connaissant l'**entrée** pour n'importe quel **système** en fonction du temps, pour qu'il puisse connaître les **régimes permanents** et **transitoires**. Pour se faire, il existe deux méthodes:

* **Méthode classique:** consiste à résoudre l'**équation différentielle** décrivant le **système**, en trouvant la **réponse forcée** et la **réponse libre** (voir cours **équation différentielle**). Cette méthode n'est pas toujours évidente pour trouver la solution et elle mène souvent à des situations difficiles ou vers impossible de trouver la solution cherchée, surtout si le **système** c'est à dire l'**équation différentielle** est d'ordre supérieur à deux ($n > 2$). Souvent, la manipulation **d'équations différentielles** peut devenir très vite laborieuse.

* **Méthode opérationnelle:** Basée sur le **calcul opérationnel** ou essentiellement sur l'utilisation de **transformée de Laplace**, qui permet la transformation du **domaine temporel** en un **domaine complexe (fréquentiel)** connu par le **domaine de Laplace** en transformant la variable temps (t) en une autre variable complexe (p), dépendant de la **pulsation** w ($w = 2\pi f$, ou f est la **fréquence** égale à l'inverse de la période).
 $p = \sigma + jw$ variable du **domaine de Laplace**.

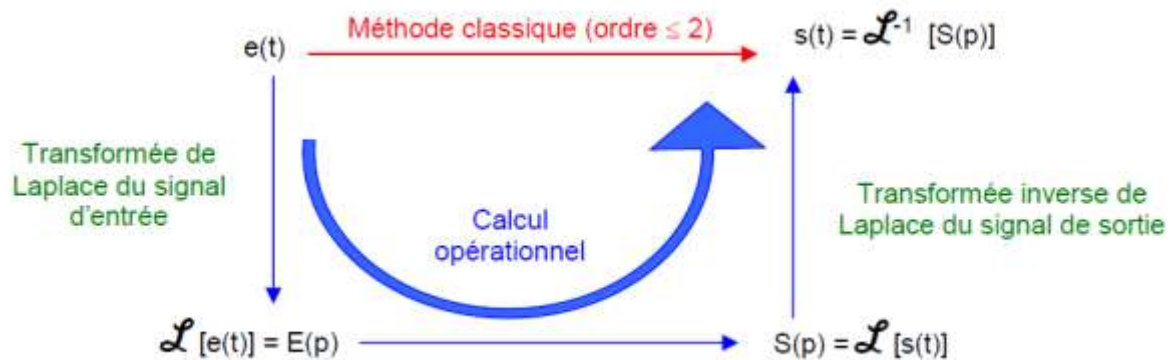


Figure 2.1. Détermination de la sortie du système

La **transformée de Laplace** convertit des **équations intégro-différentielles** en **équations algébriques**, simplifiant l'**analyse et la synthèse des systèmes**. Les **méthodes temporelles d'analyse des systèmes** et les **méthodes fréquentielles** sont **duales**. La **transformée de Laplace** constitue donc une méthode puissante pour résoudre les **équations différentielles linéaires**, certaines équations intégrales et équations aux dérivées partielles. Elle réduit le problème de résoudre une **équation différentielle linéaire à coefficients constants** à un **problème algébrique décomposable en fractions polynomiales rationnelles simples de la variable p** . La résolution du **système** revient alors à trouver les **racines d'un polynôme**.

2.2) Définition de la transformée de Laplace

Soit $h(t)$ un **signal (fonction) causal(e)**, c'est à dire, $h(t) = 0$ pour $t < 0$, alors la **transformée de Laplace** de h est l'application L définie par:

$$L[h(t)] = H(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} h(t) dt \quad (2.1)$$

On dit que $H(p)$ est l'image de $h(t)$ dans le **domaine symbolique** ou de **Laplace** ($p = \sigma + j\omega$, variable du **domaine de Laplace** et $\omega = 2\pi f$ ou f est la **fréquence**) et que $h(t)$ est l'image de $H(p)$ dans le **domaine temporel**.

On se limite dans ce cours uniquement à cette définition de la **transformée de Laplace**, parce que tous les **systèmes** étudiés dans cette matière sont caractérisés par des **fonctions régies** par des **signaux continus causaux**.

2.3) Condition suffisante d'existence

$H(p)$ existe en $p = \sigma + j\omega$ si $\int_0^{+\infty} |h(t)| e^{-\sigma t} dt$ existe d'où:

Si $h(t)$ est bornée dans tout intervalle fini et si pour $t \geq t_0 > 0$, ($h(t)$ est une fonction (signal) exponentiel à l'infini) on a:

$$|h(t)| \leq A e^{-kt} \quad A > 0 \text{ et } k \text{ réel} \quad (2.2)$$

Alors $H(p)$ existe pour $\sigma = \text{Re}(p) > k$

On démontre qu'il existe σ_0 tel que l'intégrale soit absolument convergente pour $\sigma > \sigma_0$ et ne le soit pas dans le cas contraire. σ_0 s'appelle l'abscisse de convergence absolue ou abscisse de sommabilité.

2.4) Propriétés

On suppose que $F(p) = L\{f(t)\}$ et $G(p) = L\{g(t)\}$.

2.4.1) Unicité

La **transformée de Laplace** est unique.

Toute fonction temporelle $f(t)$ possède une image unique $F(p)$ ou une **transformée de Laplace** unique; et réciproquement.

2.4.2) Linéarité

La **transformée de Laplace** est linéaire et elle vérifie bien le **théorème de superposition**.

$$L\{0\} = 0 \quad (2.3)$$

$$L\{k \cdot f(t)\} = k \cdot F(p) \quad (2.4)$$

$$L\{f(t) + g(t)\} = F(p) + G(p) \quad (2.5)$$

2.4.3) Dérivation – Intégration

Dans le **domaine de la transformée de Laplace** avec des conditions initiales nulles la **dérivation temporelle** se transforme en une **multiplication** et l'**intégration temporelle** en une **division** par la **variable p**.

Dérivation: $L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$; avec le plus souvent, $f(0) = 0$. (2.6)

Plus généralement

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (2.7)$$

Intégration: $L\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{1}{p} F(p)$ (2.8)

La **transformée de Laplace** de la primitive de f est donc: $\frac{1}{p} F(p)$.

2.4.4) Dérivation dans le domaine de Laplace

$$F(p) = L\{f(t)\} \Rightarrow L\{-tf(t)\} = \frac{F(p)}{p} \quad (2.9)$$

Plus généralement

$$L\{-t^n f(t)\} = \frac{d^n F(p)}{dp^n} \quad (2.10)$$

2.4.5) Facteur d'échelle

Dans le **domaine transformé de Laplace** un **rétrécissement fréquentiel** lui correspond un **élargissement temporel** (zoom).

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \quad (2.11)$$

2.4.6) Retard et Amortissement

Dans le **domaine transformée de Laplace** une **translation temporelle** lui correspond une **modulation fréquentielle** et vice versa.

$$L\{f(t-\tau)\} = e^{-p\tau} F(p) \quad (2.12)$$

$$L\{e^{wt} f(t)\} = F(p+w) \quad (2.13)$$

2.4.7) Théorème des valeurs finales et initiales

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) \quad (2.14)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p) \quad (2.15)$$

2.4.8) Convolution

Le produit de **convolution** de deux fonctions f et g est :

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \Rightarrow Y(p) = F(p).G(p) \quad (2.16)$$

Un produit de **convolution temporel** se traduit par une **multiplication** dans le **domaine transformée de Laplace**.

En mathématiques, le **produit de convolution** de deux fonctions, est une autre fonction, obtenue avec un calcul d'intégrales, et généralisant l'idée de **moyenne glissante**. En statistique, on utilise une formule particulièrement voisine pour définir la **corrélacion croisée**.

Le **produit de convolution** permet de trouver la **réponse d'un système linéaire** à un **signal d'entrée**. Soit le **système linéaire** de **réponse impulsionnelle h(t)**, d'**entrée e(t)** et de **sortie ou de réponse s(t)**, donné par le **schéma fonctionnel** suivant:

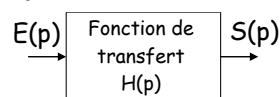


Figure 2.2:Schémas fonctionnel

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau \Rightarrow S(p) = E(p).H(p) \quad (2.17)$$

Un **système linéaire** est totalement défini par sa **réponse impulsionnelle, indicielle** ou par sa **fonction de transfert (réponse fréquentielle)**.

Le produit de convolution est la base de l'opération de **filtrage** (opération fondamentale en traitement du signal).

Physiquement, Il permet de trouver la **sortie** d'un **système** en effectuant la **sommation pondérée** par la **fonction du filtrage** du **système linéaire (réponse impulsionnelle)** des valeurs passées et présentes d'un **signal d'entrée**.

2.5) Transformées usuelles

Signal causal (temporel)	Transformée de Laplace
Échelon	$\frac{1}{p}$
Dirac	1
Rampe	$\frac{1}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{p^2 + w^2}$
$\sinh(wt)$	$\frac{w}{p^2 - w^2}$
$e^{-at} \sin(wt)$	$\frac{w}{(p+a)^2 + w^2}$
$\cos(wt)$	$\frac{p}{p^2 + w^2}$
$\cosh(wt)$	$\frac{p}{p^2 - w^2}$
$e^{-at} \cos(wt)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + w^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1 + \tau p)}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$

2.6) Transformée de Laplace Inverse

L'**inversion** de la **transformation de Laplace** s'effectue par le biais d'une intégrale dans le plan complexe (2.18). À l'aide du **théorème des résidus**, on démontre la formule de Bromwich-Mellin :

$$L^{-1}[H(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(p) e^{pt} dp \quad (2.18)$$

L'intégration se fait entre deux bornes complexes dont la partie réelle est une constante σ supérieure au seuil de convergence de $H(p)$.

En pratique néanmoins, la formule de Bromwich-Mellin est peu utilisée, et on calcule les **inverses des transformées de Laplace** à partir des **tables de transformées de Laplace**. En effet, pour trouver la

transformée de Laplace inverse d'une **fonction** compliquée, on **décompose** cette **fonction** en **éléments simples** c.-à.-d. en une somme de termes plus simples pour lesquelles nous connaissons les transformées inverses et par la suite, on peut utiliser la table de transformation.

$H(p)$ peut se mettre sous cette forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (2.19)$$

! Où Π : Somme des produits p_i : Pôles de la fonction z_i : Zéros de la fonction !

Il y a quatre cas à distinguer : 1) Pôles réels et distincts, 2) Pôles complexes et distincts, 3) Pôles réels et multiples et 3) Pôles complexes et multiples.

2.6.1) Pôles réels simples

Si les **pôles sont réels et distincts** de la fonction $H(p)$, on peut la décomposer de la manière suivante:

$$H(p) = \frac{C_1}{p - p_1} + \frac{C_2}{p - p_2} + \dots + \frac{C_n}{p - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{p - p_i} \quad \text{Où : } C_i = (p - p_i)H(p) \Big|_{p=p_i} \quad (2.20)$$

Ainsi, on peut prendre la **transformée inverse** de chacun des termes pour obtenir :

$$h(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} \quad (2.21)$$

Exemple :
$$H(p) = \frac{p+1}{p^3 + 5p^2 + 6p}$$

Les **pôles** de cette **fonction de transfert** sont 0, -2 et -3, ainsi sa **décomposition** en **éléments simples** est comme suit :

$$H(p) = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p+2} + \frac{C_3}{p+3} \quad \text{Où : } C_i = (p - p_i)H(p) \Big|_{p=p_i} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{6}; C_2 = \frac{1}{2} \text{ et } C_3 = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow h(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + C_3 e^{p_3 t} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{2}{3} e^{-3t}$$

2.6.2) Pôles complexes simples

Les **pôles complexes** résultent en des **formes quadratiques** au **dénominateur** de $H(p)$. Ainsi, on décompose $H(p)$ d'une manière un peu différente de la précédente :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p + p_1)(p^2 + ap + b)} = \frac{C_1}{p + p_1} + \frac{C_2 p + C_3}{p^2 + ap + b} + \dots \quad (2.22)$$

Où : $C_1 = (p - p_1)H(p) \Big|_{p=p_1}$

Les coefficients C_2 et C_3 sont calculés comme suit :

On multiplie (2.22) par le plus petit commun dénominateur (Ex: $(p + p_1)(p^2 + ap + b)$).

On résout l'équation en regroupant les termes en «p», et par la suite par simple déduction...

Pour simplifier la présentation, considérons le cas d'une **paire des pôles complexes conjugués** et le reste des **pôles** étant **simples**. En supposant que les **pôles** p_1 et p_2 sont **complexes et conjugués**. $H(p)$ peut s'écrire par l'équation (2.20). Si les **pôles** p_1 et p_2 sont données par :

$$p_{1/2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{(\xi^2 - 1)} \quad (2.23)$$

Les **résidus** associés sont donnés par :

$$C_1 = ke^{j\theta} \text{ et } C_2 = ke^{-j\theta} \text{ Avec : } k = \lim_{p \rightarrow p_1} H(p)(p + p_1) \text{ et } \theta = \arg \left\{ \lim_{p \rightarrow p_1} H(p)(p + p_1) \right\} \quad (2.24)$$

La contribution de ces **pôles** à la **réponse impulsionnelle** du **système** est donnée par :

$$ke^{j\theta} + ke^{-j\theta} = ke^{-\xi\omega_0 t} \left[e^{j(\omega_0 t \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \theta)} + e^{-j(\omega_0 t \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \theta)} \right] = 2ke^{-\xi\omega_0 t} \cos \left[\omega_0 t \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \theta \right] \quad (2.25)$$

Et la **réponse impulsionnelle** est donnée alors par :

$$h(t) = 2ke^{-\xi\omega_0 t} \cos \left[\omega_0 t \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \theta \right] + C_3 e^{p_3 t} + C_4 e^{p_4 t} + \dots + C_n e^{p_n t} \quad (2.26)$$

Exemple :
$$H(p) = \frac{p+5}{(p^2+1)(p+2)}$$

Les **pôles** de cette **fonction de transfert** sont $\pm j$ et -2 , ainsi la **décomposition** en **éléments simples** de $H(p)$ est comme suit :

$$H(p) = \frac{C_1}{p-j} + \frac{C_2}{p+j} + \frac{C_3}{p+2} \quad \text{Où : } C_i = (p - p_i)H(p) \Big|_{p=p_i}$$

$$\Rightarrow C_1 = 1.14e^{j105,26} ; C_2 = 1.14e^{-j105,26} \text{ et } C_3 = \frac{3}{5}$$

Et la **réponse impulsionnelle** est donnée alors par :

$$\rightarrow h(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + C_3 e^{p_3 t} = \frac{3}{5} e^{-2t} + 2,28 \cos(t + 105.26)$$

2.6.3) Pôles réels et multiples

Si les **pôles** sont **réels** et un des **pôles** se répète **k** fois, on peut **décomposer** $H(p)$ de la manière suivante :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p+p_1)^k (p+p_{k+1})(p+p_{k+2})\dots(p+p_n)}$$

$$= \frac{C_1}{p-p_1} + \frac{C_2}{(p-p_1)^2} + \dots + \frac{C_k}{(p-p_1)^k} + \frac{C_{k+1}}{p-p_{k+1}} + \dots + \frac{C_n}{p-p_n}$$

Où pour les pôles simples : (2.27)

$$C_i = pH(p) \Big|_{p=p_i}$$

Et pour les k pôles multiples, on a :

$$C_{k-i} = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i}{dp^i} \left\{ (p-p_i)^k H(p) \right\} \right]_{p=p_i} \quad \text{Où : } i = 0, 1, \dots, k-1$$

Exemple : $H(p) = \frac{p+3}{(p+2)(p^2+2p+1)}$

Les **pôles** de cette **fonction de transfert** sont -1 avec un ordre de multiplicité d'ordre égale à 2 et -2, ainsi sa **décomposition en éléments simples** est comme suit :

$$H(p) = \frac{C_1}{(p+1)^2} + \frac{C_2}{p+1} + \frac{C_3}{p+2}$$

En utilisant (2.27) $\rightarrow C_1=2, C_2=-1$ et $C_3=1$

Et la **réponse impulsionnelle** est donnée alors par :

$$\rightarrow h(t) = 2te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}$$

2.6.4) Pôles complexes et multiples

Le cas des **pôles complexes multiples** se traite de la même manière que le cas des **pôles réels multiples**.

2.7) Représentation de système par équation différentielle/Fonction de transfert

Soit un **système linéaire d'entrée** $e(t)$ et de **sortie** $s(t)$, décrit par l'**équation différentielle** suivante :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j e(t)}{dt^j} \quad (2.28)$$

$\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ et $\{b_0, b_1, \dots, b_m\}$ des coefficients constants.

Le problème, c'est de trouver l'**expression** de la **réponse** du **système** (sortie) $s(t)$ connaissant l'**entrée** $e(t)$. La solution directe est de résoudre l'**équation différentielle** (2.28), si c'est possible?

La relation évoquée plus haut entre l'**entrée** $e(t)$ et la **sortie** $s(t)$ d'un **système** est un **opérateur de convolution** dont le noyau est la **réponse impulsionnelle** $h(t)$ du **système**. Sauf dans le cas d'un **système stable** ou **marginalelement stable**, celle-ci n'est pas une distribution tempérée (dans le cas de variables continues) ou une suite à croissance lente (dans le cas de variables discrètes), et n'admet donc pas de transformée de Fourier. Il est donc nécessaire d'en considérer la **transformée de Laplace** ou la **transformée en Z**, selon que les variables sont continues ou discrètes.

L'application de la **transformée de Laplace** à l'équation (2.28), avec les **conditions initiales** supposées nulles, donne (fig .2.2):

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) S(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) E(p) \quad (2.29)$$

Le **rapport sortie /entrée** donne la **fonction de transfert** $H(p)$ (**transmittance**) du **système** (2.30).

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (2.30)$$

Les racines (z_i) du **numérateur** $N(p)$ sont les **zéros** de la **fonction de transfert** et les racines (p_i) du **dénominateur** $D(p)$ sont appelées **pôles** ou **modes** ou **valeurs propres**.

La **fonction de transfert** ne représente le **système** que partiellement, puisqu'elle ne prend pas en compte les **conditions initiales** (ou aux **limites**). Plus exactement, elle est obtenue en supposant que ces **conditions initiales** (ou aux **limites**) sont nulles. Il en résulte une perte d'information, qui fait que la **fonction de transfert** ne représente que la partie **commandable** et **observable** du **système**.

Physiquement, la **fonction de transfert** d'un **système** est sa **réponse impulsionnelle**. Elle ne dépend pas des entrées appliquées au **système**, car elle est le **rapport** entre les **valeurs de sortie** et les **valeurs d'entrée** dans le **plan complexe de Laplace**.

Néanmoins, elle est très importante pour l'**analyse des propriétés** de ce **système** et, historiquement, c'est cette représentation qui est apparue la première (voir **Histoire de l'automatique**). Il importe de bien connaître les possibilités qu'offre le formalisme des **fonctions de transfert**, ainsi que ses limites.

La notion de **fonction de transfert** n'a longtemps été définie que pour les **systèmes linéaires invariants**. La question s'est naturellement posée de savoir si cette notion pouvait s'étendre au cas des **systèmes linéaires à coefficients variables**. Ce n'est que récemment, par une méthode algébrique, que cette extension a été réalisée² avec des conséquences pratiques tangibles.

Le **système de fonction de transfert** $H(p)$ est **stable BIBO** si, et seulement si ses **pôles** appartiennent tous au demi-plan gauche (dont, par convention, l'axe imaginaire est exclu). Il est **exponentiellement stable** si, et seulement si le **polynôme dénominateur** est de Hurwitz. D'après ce qui précède, le **système est exponentiellement stable** si, et seulement s'il est **stable BIBO** et stabilisable. On ne saurait trop insister sur le fait que ceci n'est vrai que parce que le **système** considéré est **observable**, et que ses seuls **modes cachés** possibles sont donc **ses pôles non commandables**.

Le **système** est dit à **minimum de phase** si ses **pôles** et ses **zéros** sont tous situés au **demi-plan gauche complexe de Laplace** (zone de la stabilité).

2.8) Fonction de transfert du retard pur (temps de calcul ou délai de transmission)

Soit le **système** retard pur, dont l'entrée $e(t)=f(t)$, la sortie $s(t)=f(t-T)$ et de **fonction de transfert** $H(p)$; illustré par la figure suivante.

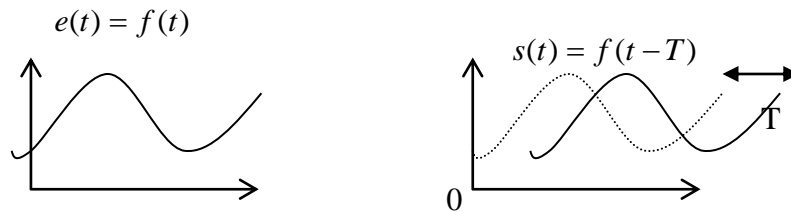


Figure 2.3: entrée et sortie d'un système retard pur

D'après le théorème du décalage temporel de la **transformée de Laplace**,
 $L(f(t-T)) = e^{-Tp} L(f(t)) = e^{-Tp} F(p) \Rightarrow H(p) = e^{-Tp}$ (2.31)

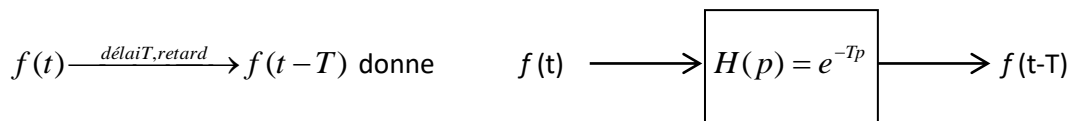


Figure 2.4: Système retard pur

2.9) Représentation d'un système ZPG (Zéros, pôles, gain)

Soit un **système** donné par sa **fonction de transfert** $H(p)$.

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{j=1}^n (p - p_j)} \quad (2.32)$$

- z_i : ($\deg(N) = m$) **zéros** de la **fonction de transfert**.
- p_j : ($\deg(D) = n$) **pôles** de la **fonction de transfert**.

Une **fonction de transfert** est entièrement définie par le **gain K**, qui détermine un facteur d'échelle, l'ensemble de ses **zéros** $Z = \{z_i\}$ et de ses **pôles** $P = \{p_j\}$. Pour décrire un **système** donné par sa **fonction de transfert**, on peut se contenter de reporter dans le **plan complexe** la position de ses **zéros** (symbole o) et de ses **pôles** (symbole x).

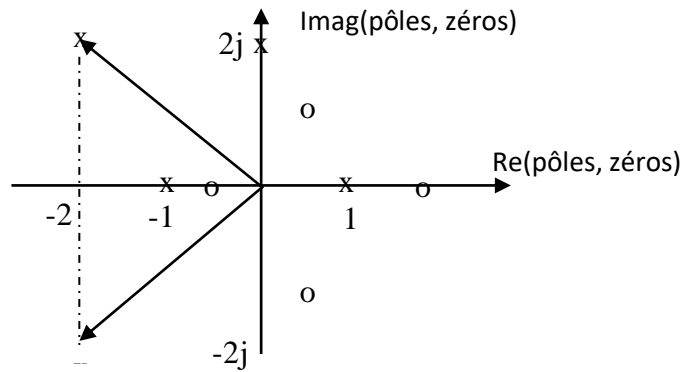


Figure 2.5: Plan complexe (ZPG)

2.10) Algèbre des schémas fonctionnels

Un **système complexe** se compose de plusieurs **sous-systèmes**. Afin d'alléger la manipulation et l'exploration de l'ensemble du processus, on utilise généralement, une **représentation graphique pratique**. C'est la **méthode d'algèbre des schémas fonctionnels** ou **diagrammes fonctionnels**.

Les **schémas fonctionnels** constituent une représentation **graphique abrégée** de systèmes physiques, indiquant les **relations fonctionnelles** existant entre leurs éléments. Ceci permet d'évaluer quelle est la contribution de chacun de ces éléments au comportement d'ensemble du système.

Un **schéma fonctionnel** peut comporter plusieurs **blocs**, où chaque **bloc** décrit une **fonction de transfert** d'un sous-système. Ainsi, le **système global** est remplacé par un **ensemble de blocs** représentant les **fonctions de transfert des sous-systèmes** qui les composent.

Le **bloc**, ou **élément**, est représenté par un **rectangle** avec **l'action de l'élément**. Il est parfois accompagné d'une description (par ex. dérivateur, intégrateur, ..., etc.) et du symbole du **signal d'entrée** (ou variable de commande en automatique) et du **signal de sortie** (ou variable commandée). Le **bloc** est généralement associé à une **ligne d'action** représentant le cheminement d'un *signal* et d'un comparateur, ou *addition* (souvent représenté avec le signe + (addition) ou - (soustraction)) et un **point du branchement**.

2.11) Réduction/simplification des schémas fonctionnels

Quand on établit le **schéma fonctionnel** d'un **système complexe**, on obtient souvent une structure complexe. Cette structure est simplifiable grâce aux **règles réduction/simplification des schémas fonctionnels**.

2.11.1) Systèmes en série

La **fonction de transfert** résultante de deux **systèmes** $G_1(p)$ et $G_2(p)$ montées en série (cascade), est le **produit** de deux **fonctions de transfert** de deux systèmes $G_1(p)$ et $G_2(p)$. Voir la figure (Fig. 2.6).

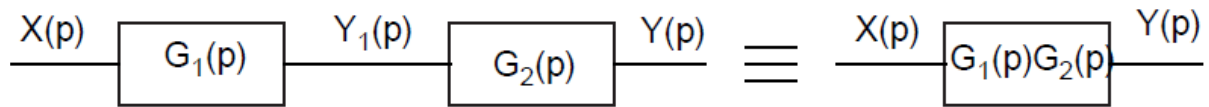


Figure 2.6: Association des systèmes en série

2.11.2) Systèmes en parallèle

La **fonction de transfert** résultante de deux **systèmes** $G_1(p)$ et $G_2(p)$ montées en parallèle, est la **somme** de deux **fonctions de transfert** de deux systèmes $G_1(p)$ et $G_2(p)$. Voir la figure (Fig. 2.7).

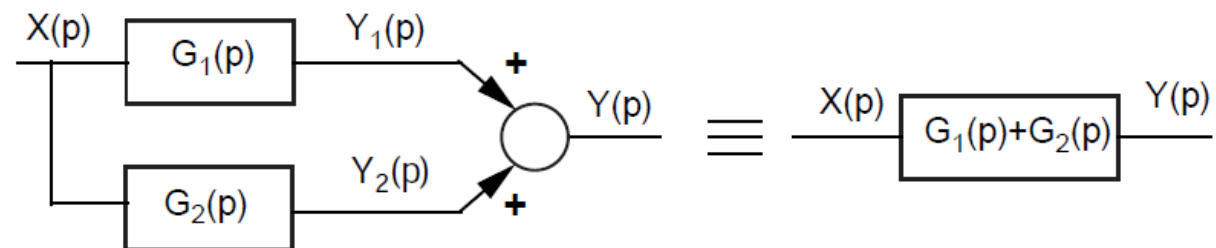


Figure 2.7: Association des systèmes en parallèle

2.11.3) Système en boucle fermée

La figure 2.8 montre comment calculer la **fonction de transfert** d'un **système en boucle fermée**.

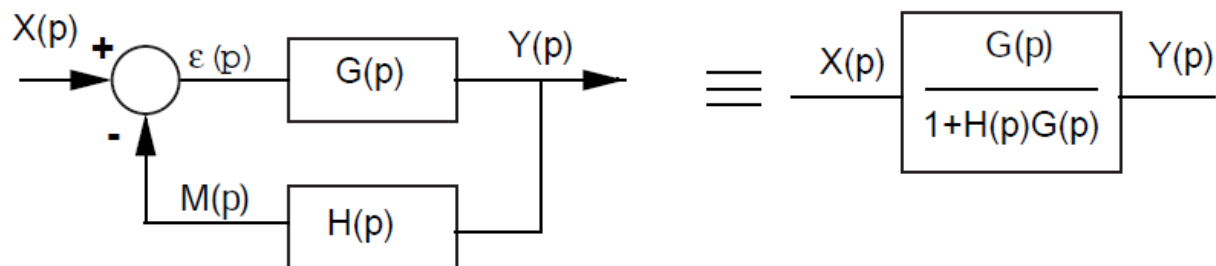


Figure 2.8: Système en boucle fermée

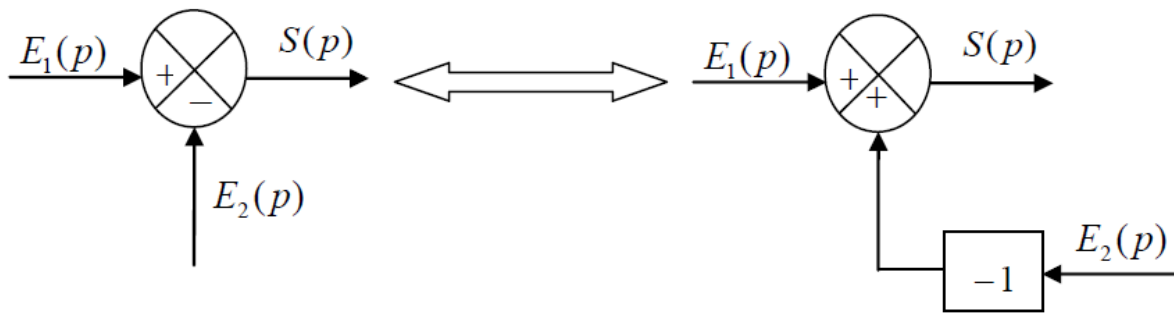
2.11.4) Transformation d'un comparateur en sommateur

Figure 2.9: Transformation d'un comparateur en sommateur

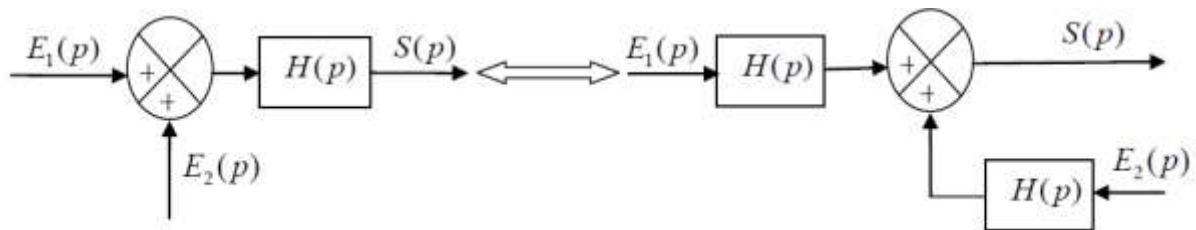
2.11.5) Déplacement d'un sommateur avant

Figure 2.10 : Déplacement d'un sommateur avant

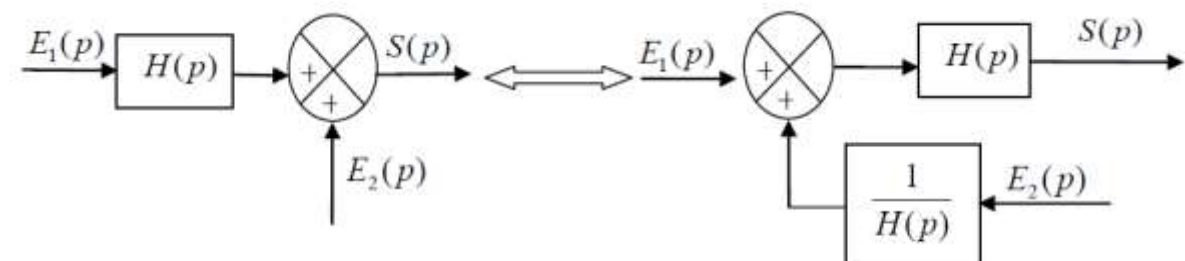
2.11.6) Déplacement d'un sommateur arrière

Figure 2.11 : Déplacement d'un sommateur arrière

2.11.7) Déplacement d'un point de prélèvement (capteur) arrière

La figure 2.8 montre comment déplacer un point de prélèvement arrière.

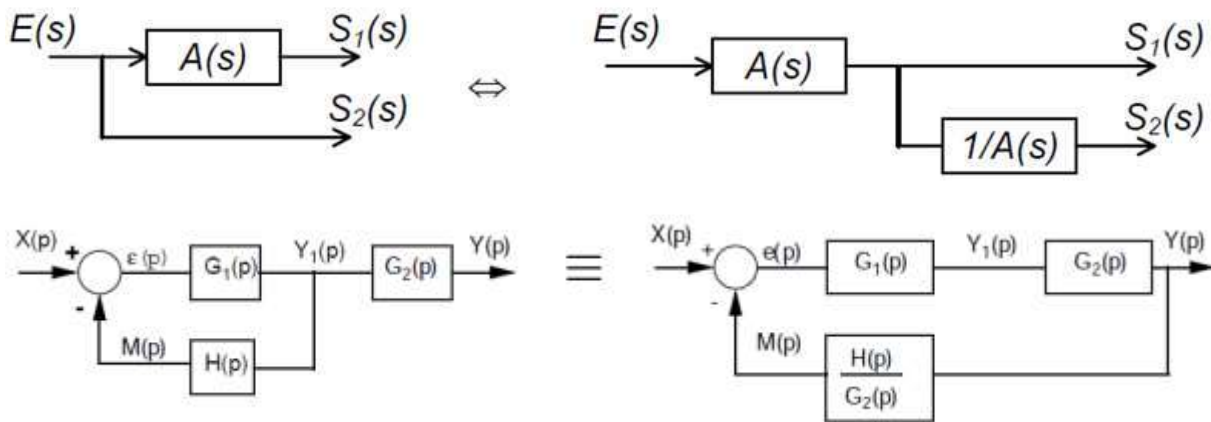


Figure 2.12: Déplacement d'un point de prélèvement arrière

2.11.8) Déplacement d'un point de prélèvement (capteur) avant

La figure 2.9 montre comment déplacer un point de prélèvement avant.

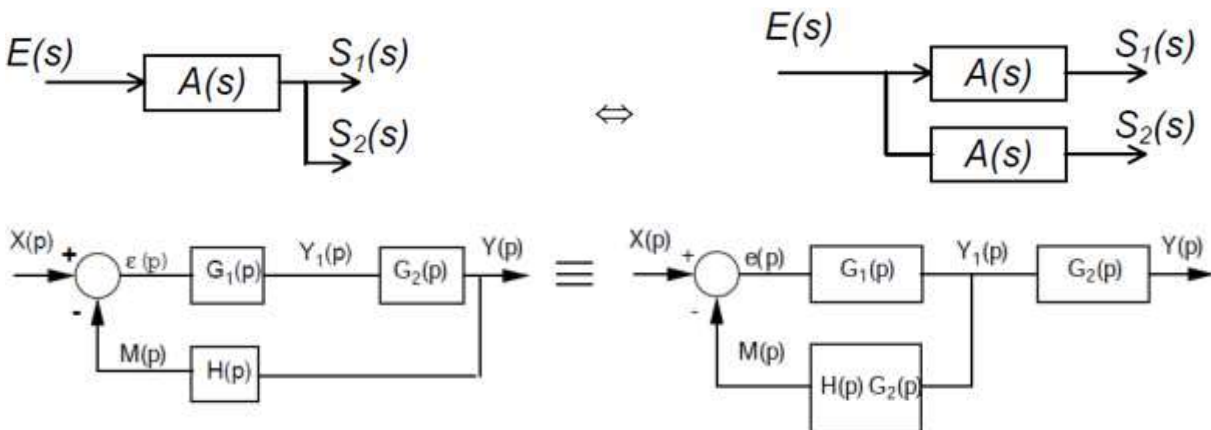
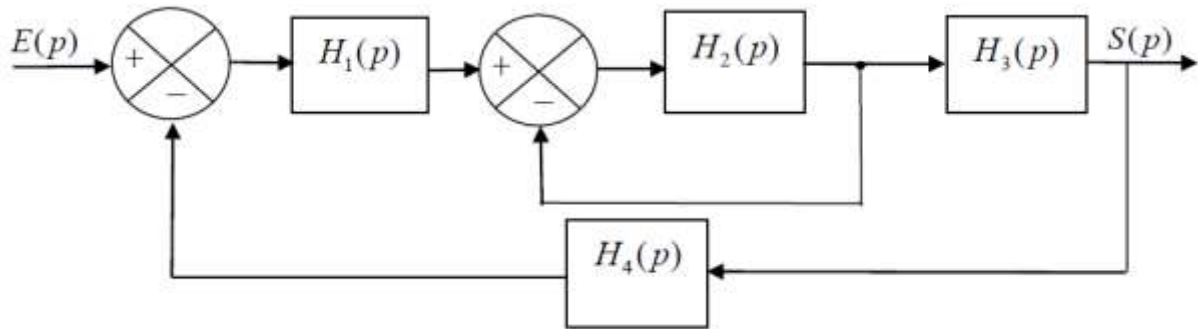


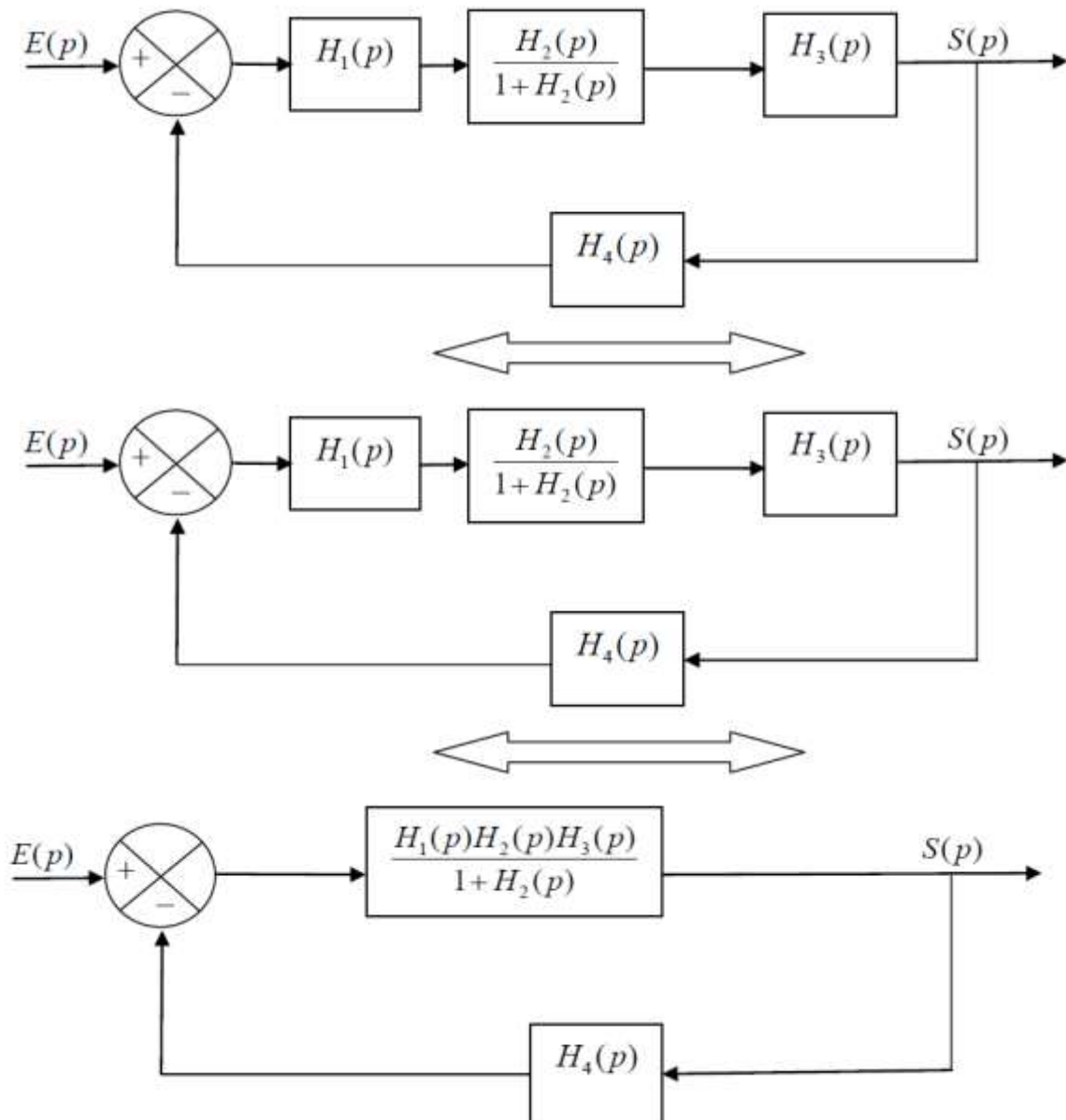
Figure 2.13: Déplacement d'un point de prélèvement avant

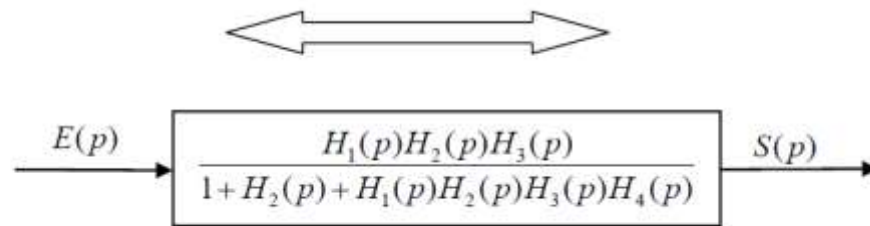
Exemple :

Soit le **schéma fonctionnel** suivant :



Simplifier ce **schéma fonctionnel** et en déduire la **fonction de transfert** du système.

Solution

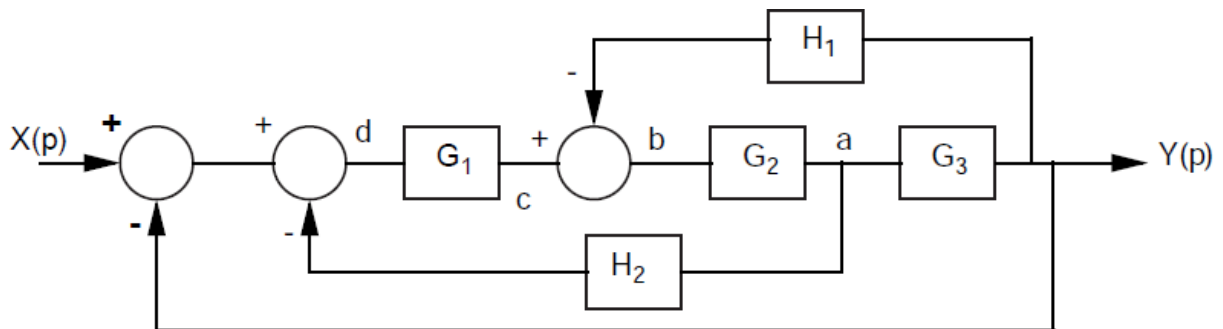


La fonction de transfert de système est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_2(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$$

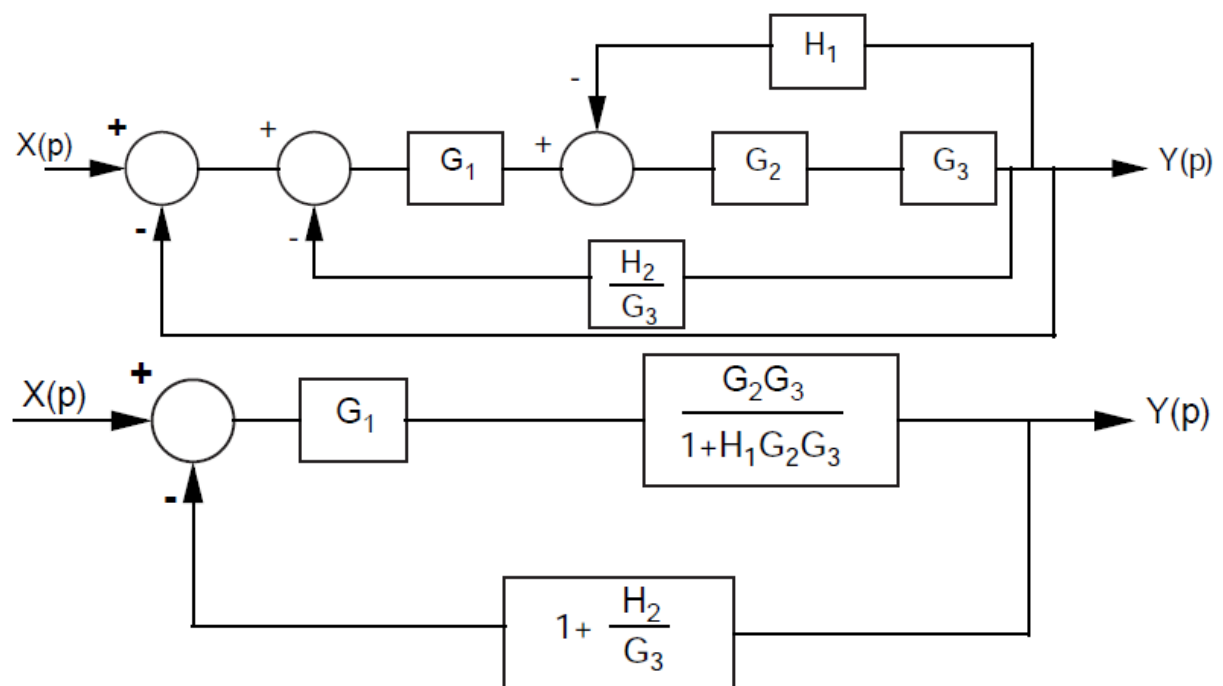
Exemple :

Soit le **schéma fonctionnel** suivant :



Simplifier ce **schéma fonctionnel** et en déduire la **fonction de transfert** du système.

Solution



La fonction de transfert de système est :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + H_1(p)G_2(p)G_3(p) + H_2(p)G_1(p)G_2(p) + G_1(p)G_2(p)G_3(p)}$$