

## Transformées de Laplace et Représentation des systèmes asservis

### 2.1) Introduction

L'étude des **systèmes asservis** mène obligatoirement à la résolution des **équations différentielles modélisant** des phénomènes naturels mêmes artificiels. Cependant, la résolution n'est pas toujours simple, surtout si l'ordre de l'**équation différentielle** est supérieur à deux ( $n>2$ ). Pour remédier à ce problème et faciliter par la suite la résolution en simplifiant au mieux les calculs, l'**automaticien** peut se servir toujours des outils mathématiques qui peuvent être des clefs puissants. Parmi ces outils, la **transformée de Laplace**.

Malgré les difficultés de la mise en **équations différentielles entrées/sorties** (connaissance du processus) et malgré aussi que ces équations ne sont que des approximations négligeant des termes d'ordre plus élevés. L'**automaticien** doit trouver l'expression de la **sortie** connaissant l'**entrée** pour n'importe quel **système** en fonction du temps, pour qu'il puisse connaître les **régimes permanents et transitoires**. Pour se faire, il existe deux méthodes:

\* **Méthode classique:** consiste à résoudre l'**équation différentielle** décrivant le **système**, en trouvant la **réponse forcée** et la **réponse libre** (voir cours **équation différentielle**). Cette méthode n'est pas toujours évidente pour trouver la solution et elle mène souvent à des situations difficiles ou vers impossible de trouver la solution cherchée, surtout si le **système** c'est à dire l'**équation différentielle** est d'ordre supérieur à deux( $n>2$ ). Souvent, la manipulation **d'équations différentielles** peut devenir très vite laborieuse.

\* **Méthode opérationnelle:** Basée sur le **calcul opérationnel** ou essentiellement sur l'utilisation de **transformée de Laplace**, qui permet la transformation du **domaine temporel** en un **domaine complexe (fréquentiel)** connu par le **domaine de Laplace** en transformant la variable temps ( $t$ ) en une autre variable complexe ( $p$ ), dépendant de la **pulsation**  $w$  ( $w=2\pi f$ , où  $f$  est la **fréquence** égale à l'**inverse de la période**).  $p=\sigma+jw$  variable du **domaine de Laplace**.

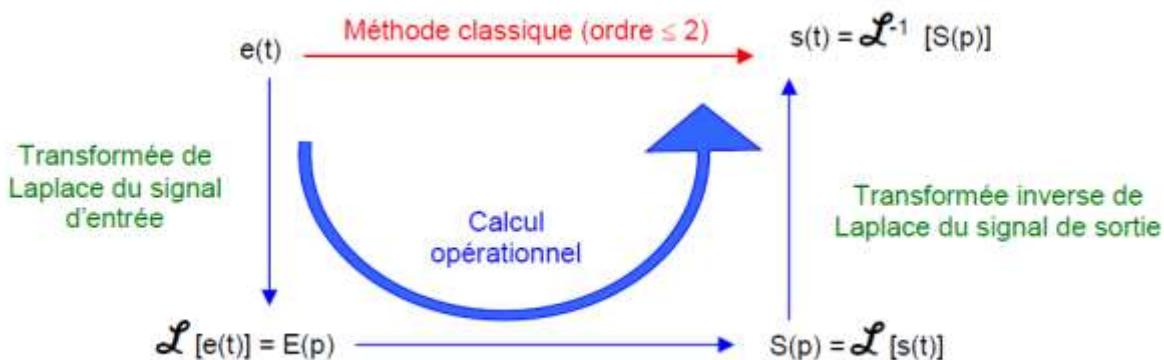


Figure 2.1. Détermination de la sortie du système

La transformée de Laplace convertit des équations intégro-différentielles en équations algébriques, simplifiant l'analyse et la synthèse des systèmes. Les méthodes temporelles d'analyse des systèmes et les méthodes fréquentielles sont duals. La transformée de Laplace constitue donc une méthode puissante pour résoudre les équations différentielles linéaires, certaines équations intégrales et équations aux dérivées partielles. Elle réduit le problème de résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants à un problème algébrique décomposable en fractions polynomiales rationnelles simples de la variable  $p$ . La résolution du système revient alors à trouver les racines d'un polynôme.

## 2.2) Définition de la transformée de Laplace

Soit  $h(t)$  un signal (fonction) causal(e), c'est à dire,  $h(t)=0$  pour  $t < 0$ , alors la transformée de Laplace de  $h$  est l'application  $L$  définie par:

$$L[h(t)] = H(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} h(t) dt \quad (2.1)$$

On dit que  $H(p)$  est l'image de  $h(t)$  dans le domaine symbolique ou de Laplace ( $p=\sigma+j\omega$ , variable du domaine de Laplace et  $\omega=2\pi f$  où  $f$  est la fréquence) et que  $h(t)$  est l'image de  $H(p)$  dans le domaine temporel.

On se limite dans ce cours uniquement à cette définition de la transformée de Laplace, parce que tous les systèmes étudiés dans cette matière sont caractérisés par des fonctions régies par des signaux continus causaux.

## 2.3) Condition suffisante d'existence

$$H(p) \text{ existe en } p=\sigma+j\omega \quad \text{si} \quad \int_0^{+\infty} |h(t)| e^{-\sigma t} dt \text{ existe d'où:}$$

Si  $h(t)$  est bornée dans tout intervalle fini et si pour  $t \geq t_0 > 0$ ,  $(h(t))$  est une fonction (signal) exponentiel à l'infini) on a:

$$|h(t)| \leq A e^{-kt} \quad A > 0 \text{ et } k \text{ réel} \quad (2.2)$$

Alors  $H(p)$  existe pour  $\sigma = \text{Re}(p) > k$

On démontre qu'il existe  $\sigma_0$  tel que l'intégrale soit absolument convergente pour  $\sigma > \sigma_0$  et ne le soit pas dans le cas contraire.  $\sigma_0$  s'appelle l'abscisse de convergence absolue ou abscisse de sommabilité.

## 2.4) Propriétés

On suppose que  $F(p) = L\{f(t)\}$  et  $G(p) = L\{g(t)\}$ .

### 2.4.1) Unicité

La transformée de Laplace est unique.

Toute fonction temporelle  $f(t)$  possède une image unique  $F(p)$  ou une transformée de Laplace unique; et réciproquement.

### 2.4.2) Linéarité

La transformée de Laplace est linéaire et elle vérifie bien le théorème de superposition.

$$L\{0\} = 0 \quad (2.3)$$

$$L\{k \cdot f(t)\} = k \cdot F(p) \quad (2.4)$$

$$L\{f(t) + g(t)\} = F(p) + G(p) \quad (2.5)$$

### 2.4.3) Déivation – Intégration

Dans le domaine de la transformée de Laplace avec des conditions initiales nulles la déivation temporelle se transforme en une multiplication et l'intégration temporelle en une division par la variable  $p$ .

$$\text{Déivation: } L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0); \text{ avec le plus souvent, } f(0) = 0. \quad (2.6)$$

Plus généralement

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (2.7)$$

$$\text{Intégration: } L\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{1}{p} F(p) \quad (2.8)$$

La transformée de Laplace de la primitive de  $f$  est donc:  $\frac{1}{p} F(p)$ .

### 2.4.4) Déivation dans le domaine de Laplace

$$F(p) = L\{f(t)\} \Rightarrow L\{-tf(t)\} = \frac{F(p)}{p} \quad (2.9)$$

Plus généralement

$$L\{-t^n f(t)\} = \frac{d^n F(p)}{dp^n} \quad (2.10)$$

### 2.4.5) Facteur d'échelle

Dans le domaine transformé de Laplace un rétrécissement fréquentiel lui correspond un élargissement temporel (zoom).

$$L\{f(a \cdot t)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \quad (2.11)$$

### 2.4.6) Retard et Amortissement

Dans le **domaine transformée de Laplace** une **translation temporelle** lui correspond une **modulation fréquentielle** et vice versa.

$$L\{f(t - \tau)\} = e^{-p\tau} F(p) \quad (2.12)$$

$$L\{e^{wt} f(t)\} = F(p + w) \quad (2.13)$$

### 2.4.7) Théorème des valeurs finales et initiales

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) \quad (2.14)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p) \quad (2.15)$$

### 2.4.8) Convolution

Le produit de **convolution** de deux fonctions  $f$  et  $g$  est :

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \Rightarrow Y(p) = F(p).G(p) \quad (2.16)$$

Un produit de **convolution temporel** se traduit par une **multiplication** dans le **domaine transformée de Laplace**.

En mathématiques, le **produit de convolution** de deux fonctions, est une autre fonction, obtenue avec un calcul d'intégrales, et généralisant l'idée de **moyenne glissante**. En statistique, on utilise une formule particulièrement voisine pour définir la **corrélation croisée**.

Le **produit de convolution** permet de trouver la **réponse d'un système linéaire à un signal d'entrée**. Soit le **système linéaire de réponse impulsionnelle**  $h(t)$ , d'entrée  $e(t)$  et de sortie ou de réponse  $s(t)$ , donné par le **schéma fonctionnel** suivant:

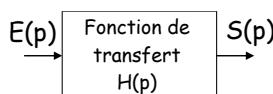


Figure 2.2: Schémas fonctionnel

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t - \tau)d\tau \Rightarrow S(p) = E(p).H(p) \quad (2.17)$$

Un **système linéaire** est totalement défini par sa **réponse impulsionnelle, indicielle** ou par sa **fonction de transfert (réponse fréquentielle)**.

Le produit de convolution est la base de l'opération de **filtrage** (opération fondamentale en traitement du signal).

Physiquement, il permet de trouver la **sortie** d'un **système** en effectuant la **sommation pondérée** par la **fonction du filtrage du système linéaire (réponse impulsionnelle)** des valeurs passées et présentes d'un **signal d'entrée**.

## 2.5) Transformées usuelles

Signal causal (temporel)	Transformée de Laplace
Échelon	$\frac{1}{p}$
Dirac	1
Rampe	$\frac{1}{p^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{p^2 + w^2}$
$\sinh(wt)$	$\frac{w}{p^2 - w^2}$
$e^{-at} \sin(wt)$	$\frac{w}{(p+a)^2 + w^2}$
$\cos(wt)$	$\frac{p}{p^2 + w^2}$
$\cosh(wt)$	$\frac{p}{p^2 - w^2}$
$e^{-at} \cos(wt)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + w^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1+\tau p)}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$

## 2.6) Transformée de Laplace Inverse

L'inversion de la transformation de Laplace s'effectue par le biais d'une intégrale dans le plan complexe (2.18). À l'aide du théorème des résidus, on démontre la formule de Bromwich-Mellin :

$$L^{-1}[H(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(p) e^{pt} dp \quad (2.18)$$

L'intégration se fait entre deux bornes complexes dont la partie réelle est une constante  $\sigma$  supérieure au seuil de convergence de  $H(p)$ .

En pratique néanmoins, la formule de Bromwich-Mellin est peu utilisée, et on calcule les **inverses** des transformées de Laplace à partir des **tables de transformées de Laplace**. En effet, pour trouver la

transformée de Laplace inverse d'une fonction compliquée, on décompose cette fonction en éléments simples c.-à.-d. en une somme de termes plus simples pour lesquelles nous connaissons les transformées inverses et par la suite, on peut utiliser la table de transformation.

$H(p)$  peut se mettre sous cette forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (2.19)$$

[Où  $\Pi$ : Somme des produits  $p_i$  : Pôles de la fonction  $z_i$  : Zéros de la fonction]

Il y a quatre cas à distinguer : 1) Pôles réels et distincts, 2) Pôles complexes et distincts, 3) Pôles réels et multiples et 3) Pôles complexes et multiples.

### 2.6.1) Pôles réels simples

Si les pôles sont réels et distincts de la fonction  $H(p)$ , on peut la décomposer de la manière suivante:

$$H(p) = \frac{C_1}{p - p_1} + \frac{C_2}{p - p_2} + \dots + \frac{C_n}{p - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{p - p_i} \quad \text{Où : } C_i = (p - p_i)H(p) \Big|_{p=p_i} \quad (2.20)$$

Ainsi, on peut prendre la transformée inverse de chacun des termes pour obtenir :

$$h(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} \quad (2.21)$$

Exemple :  $H(p) = \frac{p+1}{p^3 + 5p^2 + 6p}$

Les pôles de cette fonction de transfert sont 0, -2 et -3, ainsi sa décomposition en éléments simples est comme suit :

$$H(p) = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p+2} + \frac{C_3}{p+3} \quad \text{Où : } C_i = (p - p_i)H(p) \Big|_{p=p_i} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{6}; C_2 = \frac{1}{2} \text{ et } C_3 = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow h(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + C_3 e^{p_3 t} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{2}{3} e^{-3t}$$

### 2.6.2) Pôles complexes simples

Les pôles complexes résultent en des formes quadratiques au dénominateur de  $H(p)$ . Ainsi, on décompose  $H(p)$  d'une manière un peu différente de la précédente :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p + p_1)(p^2 + ap + b)} = \frac{C_1}{p + p_1} + \frac{C_2 p + C_3}{p^2 + ap + b} + \dots$$

Où :  $C_1 = (p - p_1)H(p) \Big|_{p=p_1}$

Les coefficients  $C_2$  et  $C_3$  sont calculés comme suit :

On multiplie (2.22) par le plus petit commun dénominateur (Ex:  $(p + p_1)(p^2 + ap + b)$ ).

On résout l'équation en regroupant les termes en «p», et par la suite par simple déduction...

Pour simplifier la présentation, considérons le cas d'une **paire des pôles complexes conjugués** et le reste des **pôles** étant **simples**. En supposant que les **pôles**  $p_1$  et  $p_2$  sont **complexes et conjugués**.  $H(p)$  peut s'écrire par l'équation (2.20). Si les **pôles**  $p_1$  et  $p_2$  sont données par :

$$p_{1/2} = -\xi w_0 \pm jw_0 \sqrt{(\xi^2 - 1)} \quad (2.23)$$

Les **résidus** associés sont donnés par :

$$C_1 = ke^{j\theta} \text{ et } C_2 = ke^{-j\theta} \text{ Avec: } k = \lim_{p \rightarrow p_1} H(p)(p + p_1) \text{ et } \theta = \arg \left\{ \lim_{p \rightarrow p_1} H(p)(p + p_1) \right\} \quad (2.24)$$

La contribution de ces **pôles** à la **réponse impulsionnelle** du **système** est donnée par :

$$ke^{j\theta} + ke^{-j\theta} = ke^{-\xi w_0 t} \left[ e^{j(w_0 t \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \theta)} + e^{-j(w_0 t \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \theta)} \right] = 2ke^{-\xi w_0 t} \cos \left[ w_0 t \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \theta \right] \quad (2.25)$$

Et la **réponse impulsionnelle** est donnée alors par :

$$h(t) = 2ke^{-\xi w_0 t} \cos \left[ w_0 t \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \theta \right] + C_3 e^{p_3 t} + C_4 e^{p_4 t} + \dots + C_n e^{p_n t} \quad (2.26)$$

Exemple :  $H(p) = \frac{p + 5}{(p^2 + 1)(p + 2)}$

Les **pôles** de cette **fonction de transfert** sont  $\pm j$  et  $-2$ , ainsi la **décomposition** en **éléments simples** de  $H(p)$  est comme suit :

$$H(p) = \frac{C_1}{p - j} + \frac{C_2}{p + j} + \frac{C_3}{p + 2} \quad \text{Où: } C_i = (p - p_i)H(p) \Big|_{p=p_i}$$

$$\Rightarrow C_1 = 1.14e^{j105.26} ; C_2 = 1.14e^{-j105.26} \text{ et } C_3 = \frac{3}{5}$$

Et la **réponse impulsionnelle** est donnée alors par :

$$\Rightarrow h(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + C_3 e^{p_3 t} = \frac{3}{5} e^{-2t} + 2,28 \cos(t + 105.26)$$

### 2.6.3) Pôles réels et multiples

Si les **pôles** sont **réels** et un des **pôles** se répète  $k$  fois, on peut **décomposer**  $H(p)$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 H(p) &= \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p + p_1)^k (p + p_{k+1})(p + p_{k+2}) \dots (p + p_n)} \\
 &= \frac{C_1}{p - p_1} + \frac{C_2}{(p - p_1)^2} + \dots + \frac{C_k}{(p - p_1)^k} + \frac{C_{k+1}}{p - p_{k+1}} + \dots + \frac{C_n}{p - p_n}
 \end{aligned}$$

Où pour les pôles simples : (2.27)

$$C_i = pH(p) \Big|_{p=p_i}$$

Et pour les  $k$  pôles multiples, on a :

$$C_{k-i} = \frac{1}{i!} \left[ \frac{d^i}{dp^i} \left\{ (p - p_i)^k H(p) \right\} \right]_{p=p_i} \quad \text{Où : } i = 0, 1, \dots, k-1$$

**Exemple :**  $H(p) = \frac{p+3}{(p+2)(p^2+2p+1)}$

Les **pôles** de cette **fonction de transfert** sont -1 avec un ordre de multiplicité d'ordre égale à 2 et -2, ainsi sa **décomposition en éléments simples** est comme suit :

$$H(p) = \frac{C_1}{(p+1)^2} + \frac{C_2}{p+1} + \frac{C_3}{p+2}$$

En utilisant (2.27)  $\rightarrow C_1=2, C_2=-1$  et  $C_3=1$

Et la **réponse impulsionale** est donnée alors par :

$$\rightarrow h(t) = 2te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}$$

#### 2.6.4) Pôles complexes et multiples

Le cas des **pôles complexes multiples** se traite de la même manière que le cas des **pôles réels multiples**.

### 2.7) Représentation de système par équation différentielle/Fonction de transfert

Soit un **système linéaire** d'**entrée**  $e(t)$  et de **sortie**  $s(t)$ , décrit par l'**équation différentielle** suivante :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j e(t)}{dt^j} \quad (2.28)$$

$\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  et  $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$  des coefficients constants.

Le problème, c'est de trouver l'**expression de la réponse du système** (sortie)  $s(t)$  connaissant l'**entrée**  $e(t)$ . La solution directe est de résoudre l'**équation différentielle** (2.28), si c'est possible?

La relation évoquée plus haut entre l'**entrée**  $e(t)$  et la **sortie**  $s(t)$  d'un **système** est un **opérateur de convolution** dont le noyau est la **réponse impulsionnelle**  $h(t)$  du **système**. Sauf dans le cas d'un **système stable** ou **marginalement stable**, celle-ci n'est pas une distribution tempérée (dans le cas de variables continues) ou une suite à croissance lente (dans le cas de variables discrètes), et n'admet donc pas de transformée de Fourier. Il est donc nécessaire d'en considérer la **transformée de Laplace** ou la **transformée en Z**, selon que les variables sont continues ou discrètes.

L'application de la **transformée de Laplace** à l'équation (2.28), avec les **conditions initiales** supposées nulles, donne (fig .2.2):

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) S(p) = (b_n p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) E(p) \quad (2.29)$$

Le **rapport sortie /entrée** donne la **fonction de transfert**  $H(p)$  (**transmittance**) du **système** (2.30).

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (2.30)$$

Les racines ( $z_i$ ) du **numérateur**  $N(p)$  sont les **zéros** de la **fonction de transfert** et les racines ( $p_i$ ) du **dénominateur**  $D(p)$  sont appelées **pôles** ou **modes** ou **valeurs propres**.

La **fonction de transfert** ne représente le **système** que partiellement, puisqu'elle ne prend pas en compte les **conditions initiales** (ou aux **limites**). Plus exactement, elle est obtenue en supposant que ces **conditions initiales** (ou aux **limites**) sont nulles. Il en résulte une perte d'information, qui fait que la **fonction de transfert** ne représente que la partie **commandable** et **observable** du **système**.

Physiquement, la **fonction de transfert** d'un **système** est sa **réponse impulsionnelle**. Elle ne dépend pas des entrées appliquées au **système**, car elle est le **rapport** entre les **valeurs de sortie** et les **valeurs d'entrée** dans le **plan complexe de Laplace**.

Néanmoins, elle est très importante pour l'**analyse des propriétés** de ce **système** et, historiquement, c'est cette représentation qui est apparue la première (voir **Histoire de l'automatique**). Il importe de bien connaître les possibilités qu'offre le formalisme des **fonctions de transfert**, ainsi que ses limites.

La notion de **fonction de transfert** n'a longtemps été définie que pour les **systèmes linéaires invariants**. La question s'est naturellement posée de savoir si cette notion pouvait s'étendre au cas des **systèmes linéaires à coefficients variables**. Ce n'est que récemment, par une méthode algébrique, que cette extension a été réalisée<sup>2</sup> avec des conséquences pratiques tangibles.

Le **système de fonction de transfert**  $H(p)$  est **stable BIBO** si, et seulement si ses **pôles** appartiennent tous au demi-plan gauche (dont, par convention, l'axe imaginaire est exclu). Il est **exponentiellement stable** si, et seulement si le **polynôme dénominateur** est de Hurwitz. D'après ce qui précède, le **système est exponentiellement stable** si, et seulement s'il est **stable BIBO** et stabilisable. On ne saurait trop insister sur le fait que ceci n'est vrai que parce que le **système** considéré est **observable**, et que ses seuls **modes cachés** possibles sont donc **ses pôles non commandables**.

Le **système** est dit à **minimum de phase** si ses **pôles** et ses **zéros** sont tous situés au **demi-plan gauche complexe de Laplace** (zone de la stabilité).

## 2.8) Fonction de transfert du retard pur (temps de calcul ou délai de transmission)

Soit le **système** retard pur, dont l'entrée  $e(t) = f(t)$ , la sortie  $s(t) = f(t-T)$  et de **fonction de transfert**  $H(p)$  ; illustré par la figure suivante.

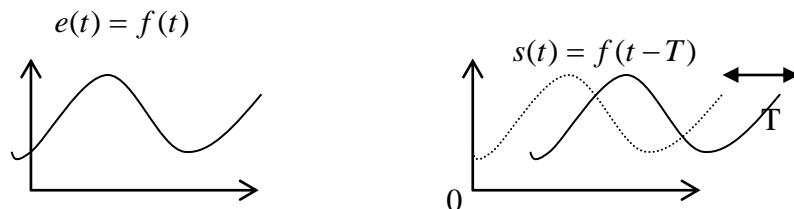


Figure 2.3: entrée et sortie d'un système retard pur

D'après le théorème du décalage temporel de la transformée de Laplace,  $L(f(t-T)) = e^{-Tp} L(f(t)) = e^{-Tp} F(p) \Rightarrow H(p) = e^{-Tp}$  (2.31)

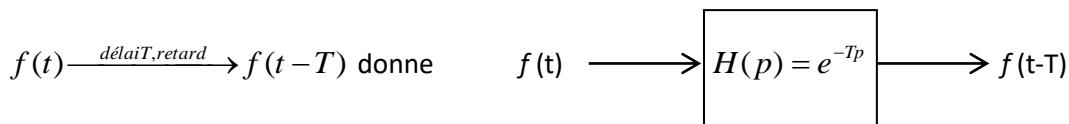


Figure 2.4: Système retard pur

## 2.9) Représentation d'un système ZPG (Zéros, pôles, gain)

Soit un **système** donné par sa **fonction de transfert**  $H(p)$ .

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{j=1}^n (p - p_j)} \quad (2.32)$$

- $z_i$  : ( $\deg(N) = m$ ) **zéros** de la **fonction de transfert**.
- $p_j$  : ( $\deg(D) = n$ ) **pôles** de la **fonction de transfert**.

Une **fonction de transfert** est entièrement définie par le **gain K**, qui détermine un facteur d'échelle, l'ensemble de ses **zéros**  $Z = \{z_i\}$  et de ses **pôles**  $P = \{p_j\}$ . Pour décrire un **système** donné par sa **fonction de transfert**, on peut se contenter de reporter dans le **plan complexe** la position de ses **zéros** (symbole o) et de ses **pôles** (symbole x).

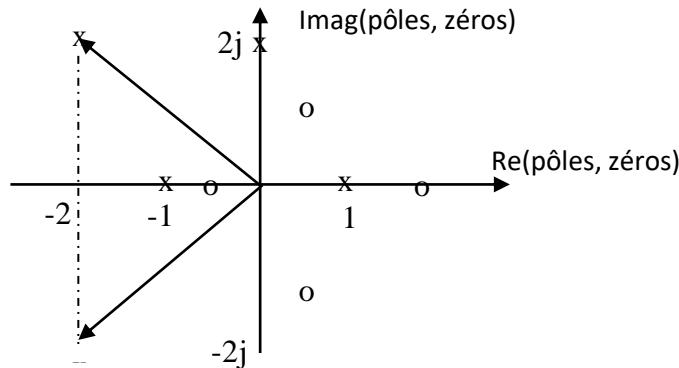


Figure 2.5: Plan complexe (ZPG)

## 2.10) Algèbre des schémas fonctionnels

Un **système complexe** se compose de plusieurs **sous-systèmes**. Afin d'alléger la manipulation et l'exploration de l'ensemble du processus, on utilise généralement, une **représentation graphique pratique**. C'est la **méthode d'algèbre des schémas fonctionnels** ou **diagrammes fonctionnels**.

Les **schémas fonctionnels** constituent une représentation **graphique abrégée** de systèmes physiques, indiquant les **relations fonctionnelles** existant entre leurs éléments. Ceci permet d'évaluer quelle est la contribution de chacun de ces éléments au comportement d'ensemble du système.

Un **schéma fonctionnel** peut comporter plusieurs **blocs**, où chaque **bloc** décrit une **fonction de transfert** d'un sous-système. Ainsi, le **système global** est remplacé par un **ensemble de blocs** représentant les **fonctions de transfert des sous-systèmes** qui les composent.

Le **bloc**, ou **élément**, est représenté par un **rectangle** avec **l'action de l'élément**. Il est parfois accompagné d'une description (par ex. déivateur, intégrateur, ..., etc.) et du symbole du **signal d'entrée** (ou variable de commande en automatique) et du **signal de sortie** (ou variable commandée). Le **bloc** est généralement associé à une **ligne d'action** représentant le cheminement d'un **signal** et d'un comparateur, ou **addition** (souvent représenté avec le signe + (addition) ou - (soustraction)) et un **point du branchement**.

## 2.11) Réduction/simplification des schémas fonctionnels

Quand on établit le **schéma fonctionnel** d'un **système complexe**, on obtient souvent une structure complexe. Cette structure est simplifiable grâce aux **règles réduction/simplification des schémas fonctionnels**.

### 2.11.1) Systèmes en série

La **fonction de transfert** résultante de deux **systèmes**  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$  montées en série (cascade), est le **produit** de deux **fonctions de transfert** de deux systèmes  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$ . Voir la figure (Fig. 2.6).

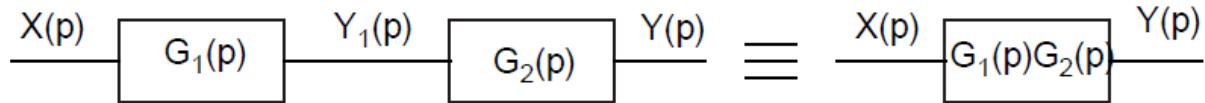


Figure 2.6: Association des systèmes en série

### 2.11.2) Systèmes en parallèle

La **fonction de transfert** résultante de deux **systèmes**  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$  montées en parallèle, est la **somme** de deux **fonctions de transfert** de deux systèmes  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$ . Voir la figure (Fig. 2.7).

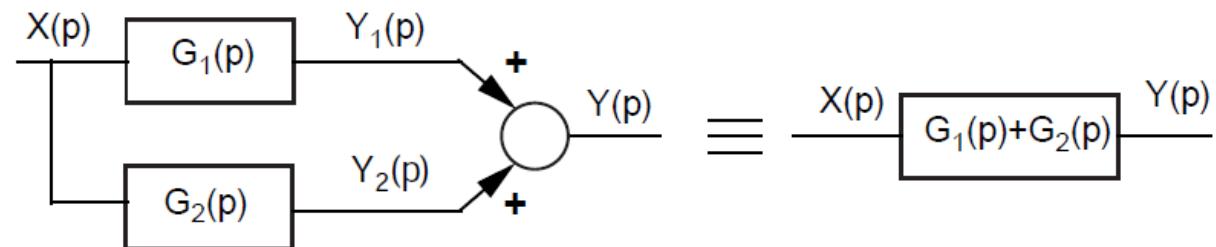


Figure 2.7: Association des systèmes en parallèle

### 2.11.3) Système en boucle fermé

La figure 2.8 montre comment calculer la **fonction de transfert** d'un **système en boucle fermé**.

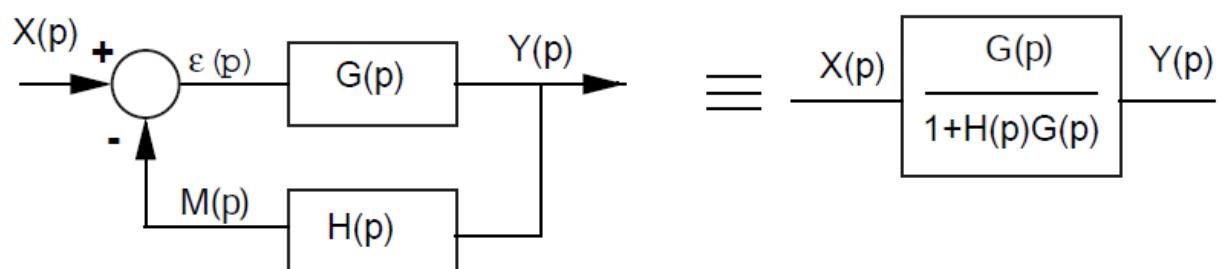


Figure 2.8: Système en boucle fermé

### 2.11.4) Transformation d'un comparateur en sommateur

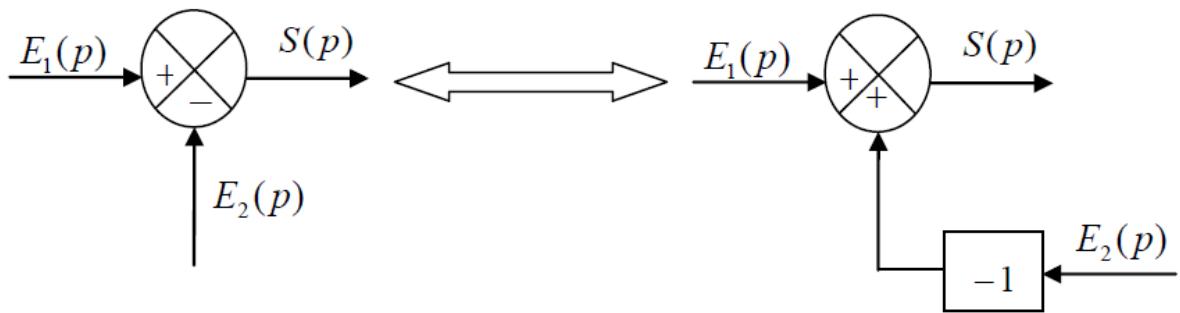


Figure 2.9: Transformation d'un comparateur en sommateur

### 2.11.5) Déplacement d'un sommateur avant

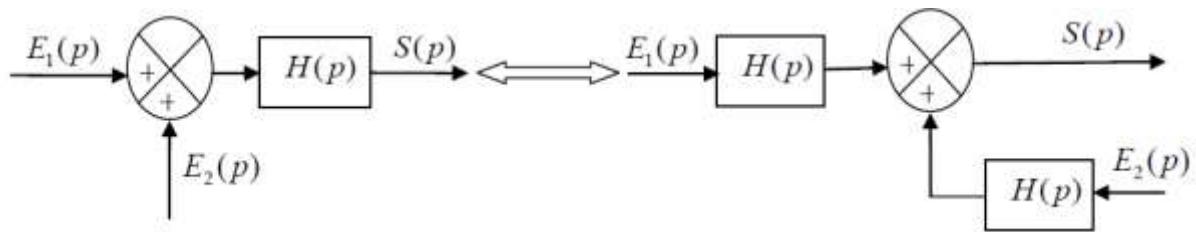


Figure 2.10 : Déplacement d'un sommateur avant

### 2.11.6) Déplacement d'un sommateur arrière

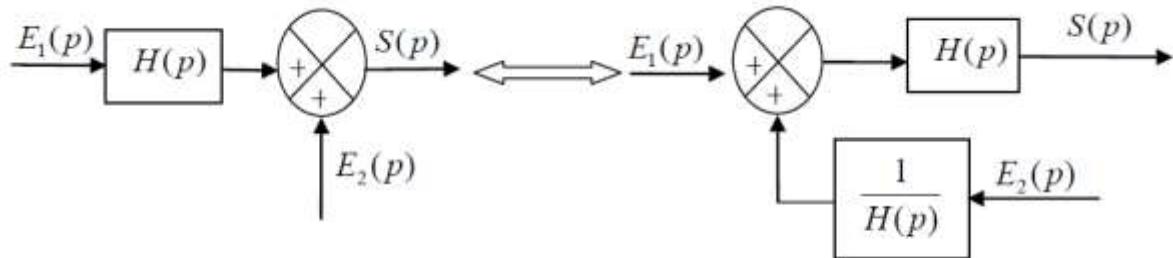


Figure 2.11 : Déplacement d'un sommateur arrière

### 2.11.7) Déplacement d'un point de prélèvement (capteur) arrière

La figure 2.8 montre comment déplacer un point de prélèvement arrière.

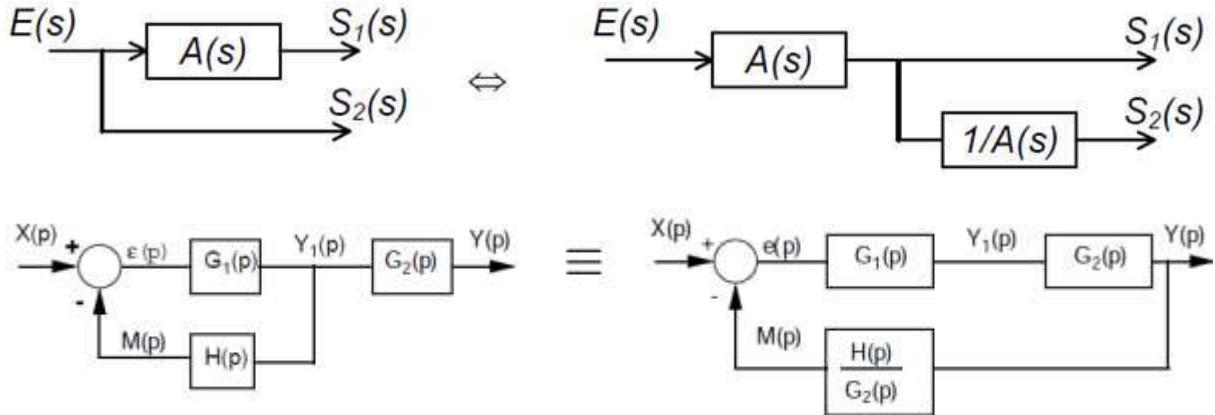


Figure 2.12: Déplacement d'un point de prélèvement arrière

### 2.11.8) Déplacement d'un point de prélèvement (capteur) avant

La figure 2.9 montre comment déplacer un point de prélèvement avant.

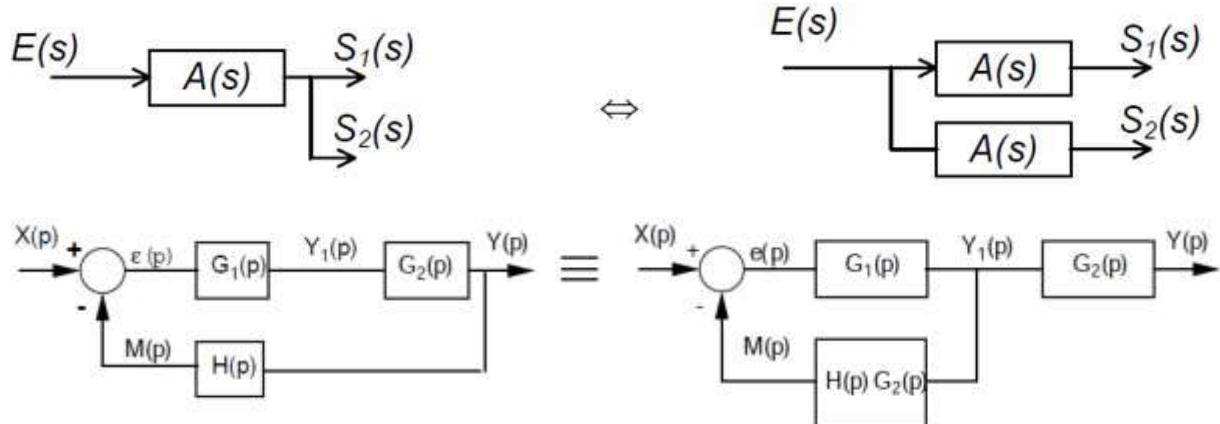
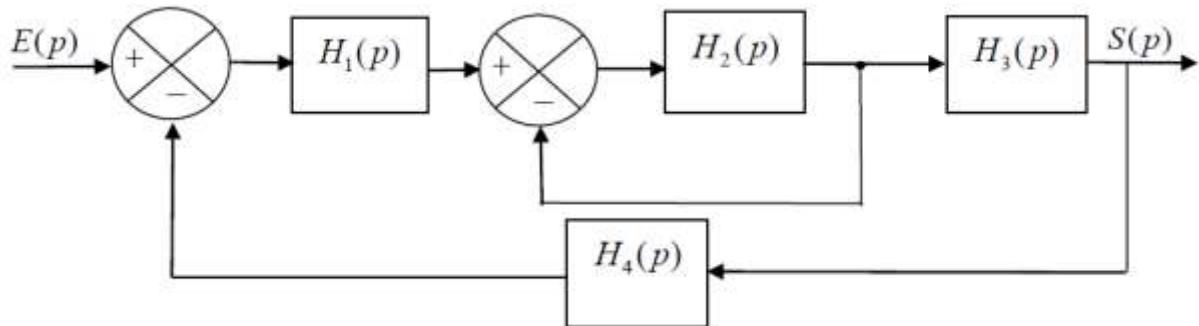


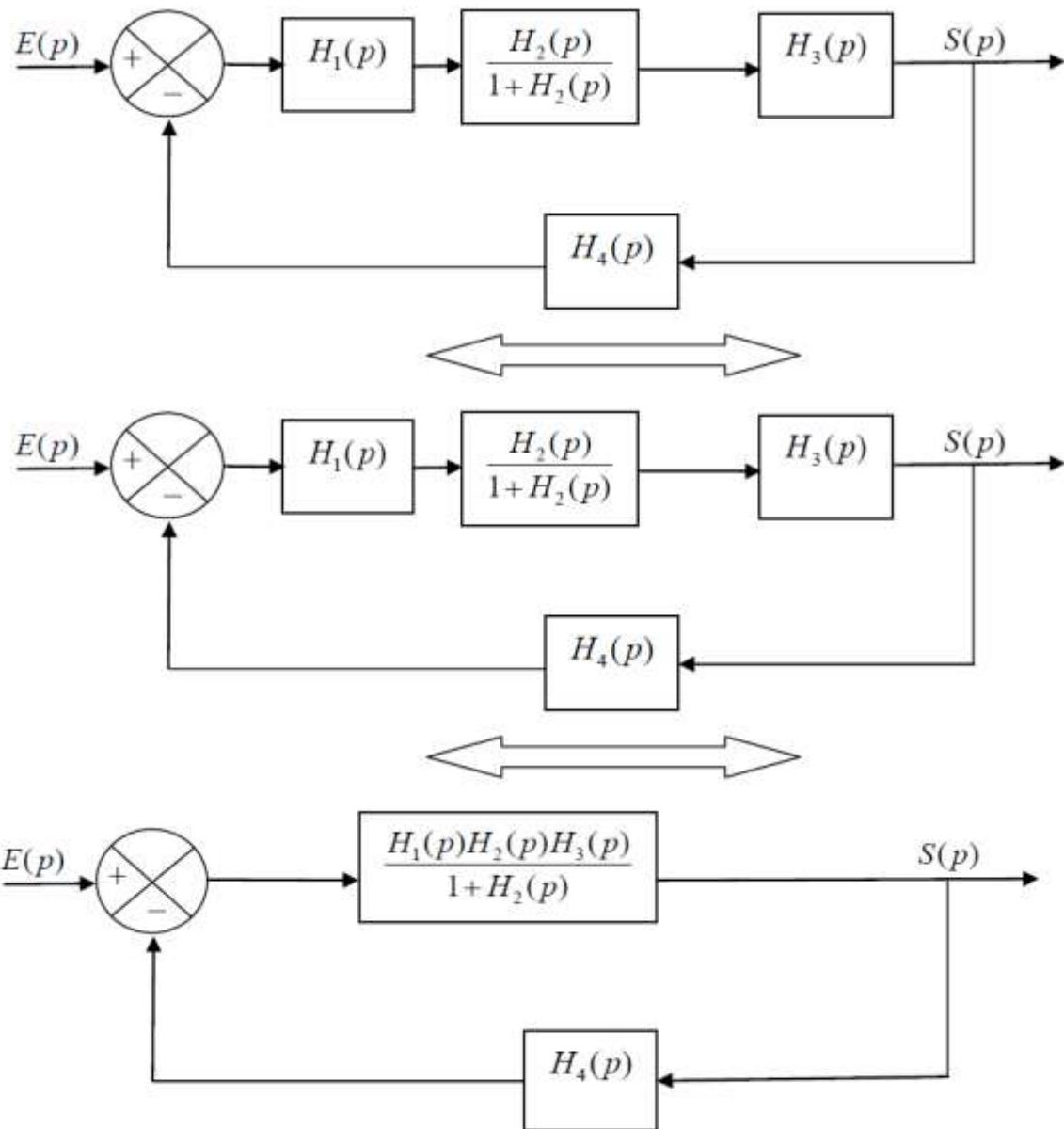
Figure 2.13: Déplacement d'un point de prélèvement avant

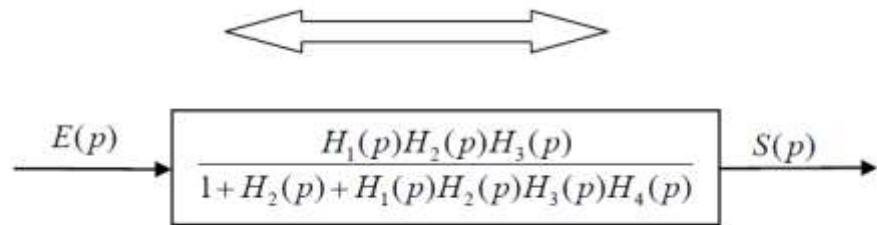
**Exemple :**

Soit le **schéma fonctionnel** suivant :



Simplifier ce **schéma fonctionnel** et en déduire la **fonction de transfert** du **système**.

**Solution**

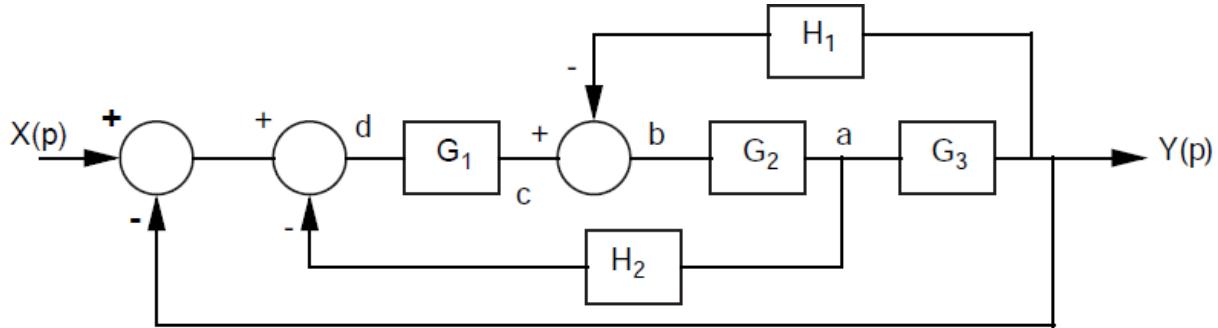


La fonction de transfert de système est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1 + H_2(p) + H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$$

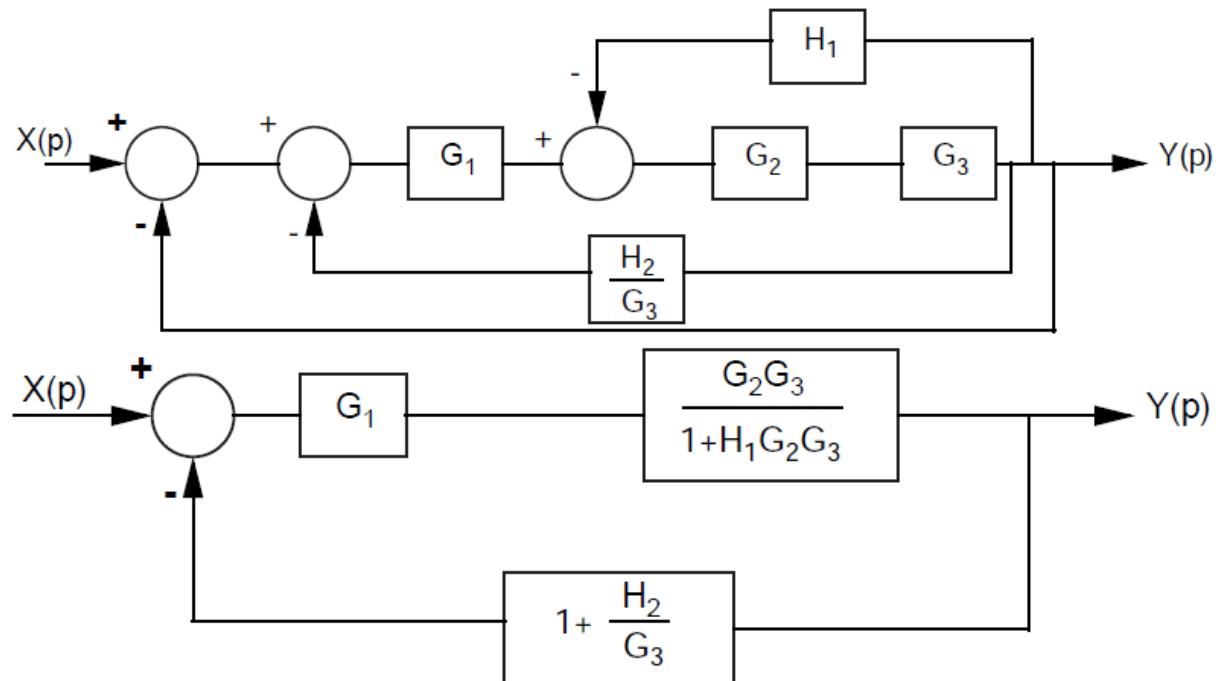
**Exemple :**

Soit le **schéma fonctionnel** suivant :



Simplifier ce **schéma fonctionnel** et en déduire la **fonction de transfert du système**.

**Solution**



La fonction de transfert de système est :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + H_1(p)G_2(p)G_3(p) + H_2(p)G_1(p)G_2(p) + G_1(p)G_2(p)G_3(p)}$$