

## Chapitre 5

### Synthèse des systèmes Introduction, Spécifications de synthèse

#### 5.1) Introduction

L'analyse temporelle et fréquentielle permettent de déterminer les performances de rapidité, précision et stabilité, dans les domaines (temporel et fréquentiel) de n'importe quel système physique. Tout système asservi pouvait présenter des défauts, une précision insuffisante, une stabilité trop relative (voire une instabilité), un temps de réaction trop lent, un dépassement trop important,...etc. au regard d'un cahier des charges. Donc, il est clair que le respect des spécifications du cahier de charges imposées par l'utilisateur ou par le fabriquant, ne peuvent être en général obtenues par un simple réglage d'un gain ou d'insertion d'intégrateurs. Dans la plus part des cas, il est indispensable d'insérer un correcteur (compensateur, régulateur), pour rattraper les défaillances en satisfaisant le cahier des charges imposé, dont l'objectif est d'améliorer un ou plusieurs de ces différents paramètres sans bien sur le faire au détriment des autres.

Tout automaticien sait, que pour annuler l'erreur statique par exemple, la FTBO doit comporter un ou plusieurs intégrateurs et doit présenter un gain statique  $K$  le plus élevé possible. Par contre pour obtenir un bon degré de stabilité il faut une marge de phase et une marge de gain suffisantes, d'où un gain statique faible.

Tout système asservi doit le plus souvent répondre à des critères de précision, rapidité et stabilité. Or un système satisfait rarement ces critères intrinsèquement, et il est alors nécessaire de corriger son comportement pour améliorer ses performances et satisfaire le cahier des charges.

Généralement, on caractérise les performances d'un système par la manière dont il répond à un certains nombres d'entrées typiques (impulsion=>réponse impulsionnelle pulsionnelle, échelon=> réponse indicielle, rampe=> réponse à une rampe, et sinusoïde=> réponse sinusoïdale ou harmonique). Si ces performances ne satisfont pas au cahier des charges fixé, il sera nécessaire d'ajouter un système de correction permettant de modifier et d'améliorer les performances du système commandé.

#### 5.2) Correction/compensation

Généralement, tout système automatique commandé ou piloté (asservissement) peut être mal amorti, lent, peu précis, présentant une tendance à la dérive et dans le cas extrême instable.

Prenons l'exemple du système à commander donné par sa réponse indicielle suivante :

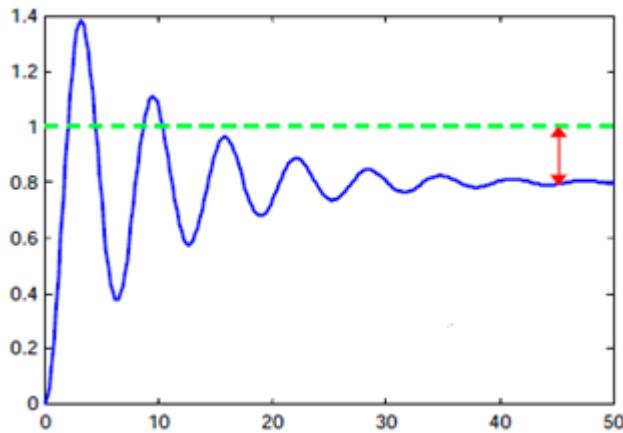


Figure 5.1 : Réponse indicielle d'un système à commander

Ce **système à commander** présente une **réponse oscillatoire et mal amortie** et un **écart** avec l'entrée en **régime établi** comme les illustre la figure ci-dessus.

Le **comportement désiré** de ce **système** (**Réponse oscillatoire, bien amortie et une erreur statique nulle**) est illustré par la figure ci-dessous :

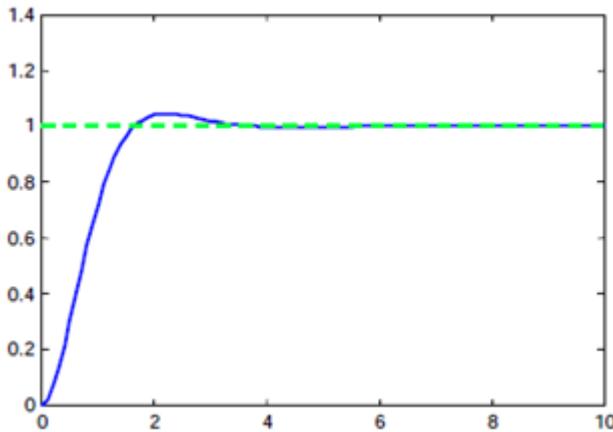


Figure 5.2 : Réponse indicielle désirée du système à commander

**Pour corriger le comportement du système, il faut introduire un correcteur dans la chaîne de commande.**

Récapitulant donc, afin d'améliorer les **performances** (**précision, stabilité et rapidité**) d'un **système asservi**, il va falloir agir sur l'**écart** entre la **sortie**  $s(t)$  du **système réel** et une **valeur désirée** pour cette sortie appelée **consigne**  $e(t)$ , par l'introduction d'un **correcteur** dans la **boucle de commande**, afin de **corriger** sa valeur avant de **piloter le système**.

L'objectif principal d'un **asservissement** est d'amener le **système** à suivre un **comportement** fixé par un **cahier de charges**. Comment faire pour le réaliser? Utiliser un dispositif complémentaire : le **correcteur en boucle fermée**. La structure globale d'un tel **asservissement (correction cascade ou série)**, la plus utilisée et sera détaillée dans ce cours) sera donc de la forme suivante :

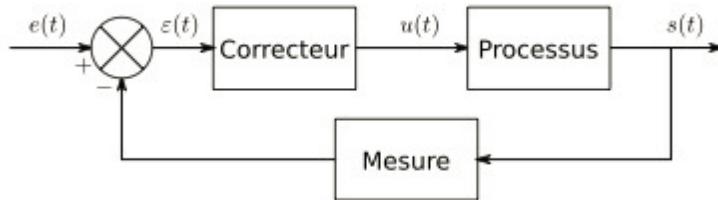


Figure 5.3 : Correction cascade (série)

Les **correcteurs** ont pour rôle de contrer les **défauts** d'un **système**, en termes de **rapidité**, de **précision** et de **stabilité**. A chaque **défaut** correspond un **correcteur**, mais nous verrons qu'un type de **correction** peut faire apparaître un **comportement indésirable**, qu'il faudra alors également corriger.

Les **correcteurs** doivent permettre de réaliser donc le meilleur **compromis** entre les **performances précision, stabilité et rapidité** du **système** étudié. Il est utile de distinguer entre deux rôles principaux d'un **système de commande** :

- **Suivi de consignes** : lorsque la **consigne varie**, on souhaite que la **sortie du système commandé** la **suive 'correctement'**. Cet objectif correspond à la maîtrise de la **dynamique** entre la **consigne** et la **sortie du système commandé**. C'est le rôle d'un **suiveur (asservissement)**.
- **Réjection des perturbations** : dans les spécifications de **poursuite**, la prise en compte des **perturbations** n'apparaît pas clairement. Pourtant on devine que cet effet risque de ne pas être négligeable. C'est la raison pour laquelle on se fixe généralement un objectif supplémentaire appelé **objectif de régulation** définissant l'aptitude du **système commandé** à **rejeter les perturbations**.. C'est le rôle d'un **régulateur**.

### 5.2.1) Indices de performance d'un système de commande

Les **performances** d'un **système de commande** sont décrites en termes de plusieurs types de critères:

- 1) **La stabilité**: Les **pôles** sont-ils tous à partie réelle négative (**demi-plan gauche**)?
- 2) **Les spécifications de la réponse temporelle en régime transitoire**:

P: **dépassemement** (en %), en anglais : overshoot,  
 $T_p$ : **Temps de dépassement**,  
 $T_s$ : **Temps de réponse** à 2% (ou 5%),  
 $K_p$ : **Constante d'erreur de position** (vis-à-vis l'échelon),  
 $K_v$ : **Constante d'erreur de vitesse** (vis-à-vis la rampe),

- 3) **Les spécifications de la réponse fréquentielle**:

BW (Band Width): **Bandé passante**,  
 $M_m$ : **Gain à la résonance**,  
MG : **Marge de gain**,  
 $M\varphi$  :**Marge de phase**,

- 4) **L'atténuation des perturbations**.

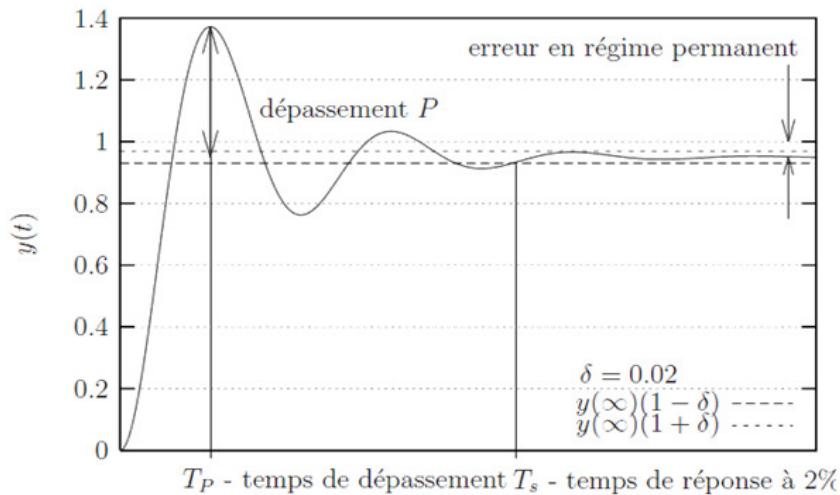


Figure 5.4 : Indices tirées de la réponse indicielle

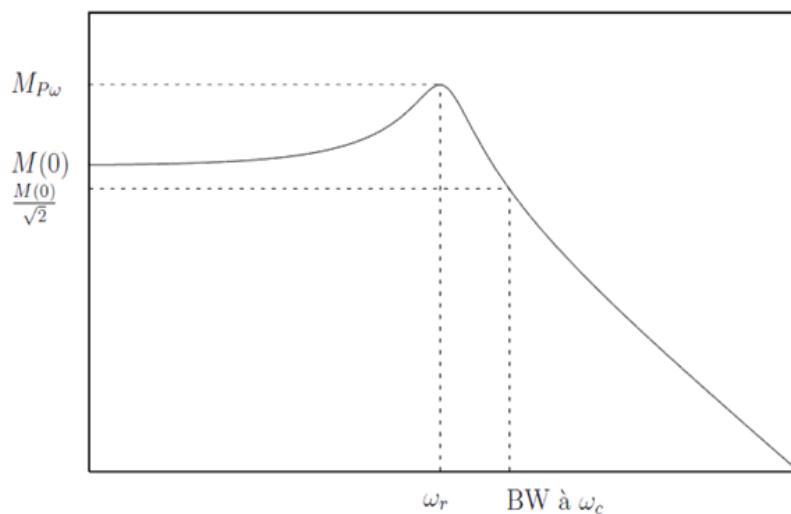


Figure 5.5 : Indices tirées de la réponse fréquentielle ou harmonique

### 5.2.2 Cahier de charge (Exigences de l'asservissement)

Les **exigences (performances ou caractéristiques)** sont exprimées sous la forme d'un **cahier de charges** par le fabricant ou par l'utilisateur dont. La **synthèse** d'un **asservissement** doit toujours répondre au **cahier des charges**. Un **cahier des charges** d'une **boucle de régulation**, impose en **boucle fermée (synthèse du correcteur)** :

- 1) **Stabilité** : Il faut que le système en boucle fermée soit stable. On analyse la stabilité par les critères de **Routh** et de **Nyquist** ou autres.
- 2) **Robustesse (Marges de stabilité)** : Si **marges de stabilité faibles**  $\Rightarrow$  **système proche de l'instabilité** en BF, **réponse oscillatoire mal amortie, fort dépassement**. On réglera les **marges de stabilité** aux valeurs satisfaisantes :  $MG \geq 10dB$  et  $M\varphi \geq 45^\circ$
- 3) **Forme de la réponse indicielle en BF** : peut être :
  - a. **Apériodique** (**HBF** doit avoir des **pôles réels**),

- b. **Oscillatoire** ( $HBF$  doit avoir des **pôles complexes conjugués**).
- 4) **Précision en régime permanent** : Par exemple une valeur max sur l'erreur de position  $\epsilon_p < \text{Seuil}$ . Pour avoir une **bonne précision**, deux solutions :
- Augmenter le gain en basses fréquences du système non bouclé**,
  - introduire des intégrateurs (si nécessaire)**.
- Mais, risque de rendre le **système instable en BF** !
- 5) **Rapidité** : Valeur max sur le temps de monté  $t_m < \text{Seuil}$ . Pour **augmenter la rapidité du système** en BF, il faut **élargir sa bande passante** en BF. Augmenter la BP en BF  $\Leftrightarrow$  augmenter la **pulsation de coupure** à 0dB  $\omega_{co}$  de  $HBOC(s) = C(s)H(s)G(s)$  (FT de la **chaîne directe du système à commander**, avec :  $C(s)$  c'est la **fonction de transfert du correcteur**,  $H(s)$  c'est la **fonction de transfert de l'actionneur** et  $G(s)$  c'est la **fonction de transfert du système à commander**), généralement on prend que  $HBOC(s) = C(s)G(s)$ .
- 6) **Rejet de perturbations** : annuler l'effet de la perturbation sur la sortie.

- **Cas d'un système de 1<sup>er</sup> ordre en BF.**

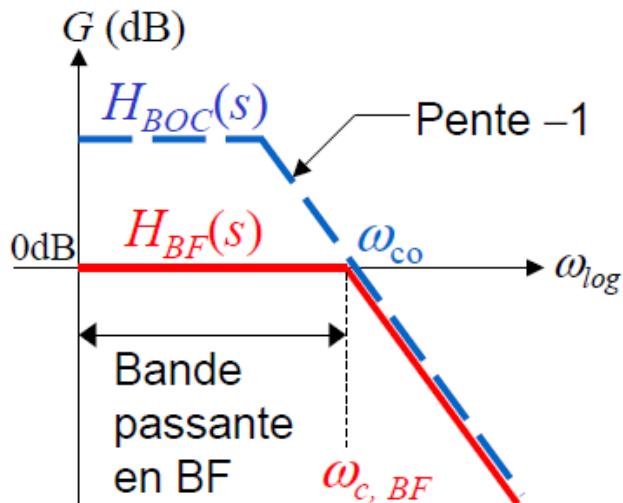


Figure 5.6 : Diagramme de Gain de Bode d'un système de 1<sup>er</sup> ordre en BF

$\omega_{c,BF} \approx \omega_{co}$  ; La relation temps de montée-BP :  $t_m f_{c,BF} \approx 0.35$  Avec :  $f_{c,BF} = \frac{\omega_{c,BF}}{2\pi}$ ,  $\omega_{c,BF} = \frac{1}{T_{BF}}$

- **Cas d'un système de 2<sup>ème</sup> ordre en BF**

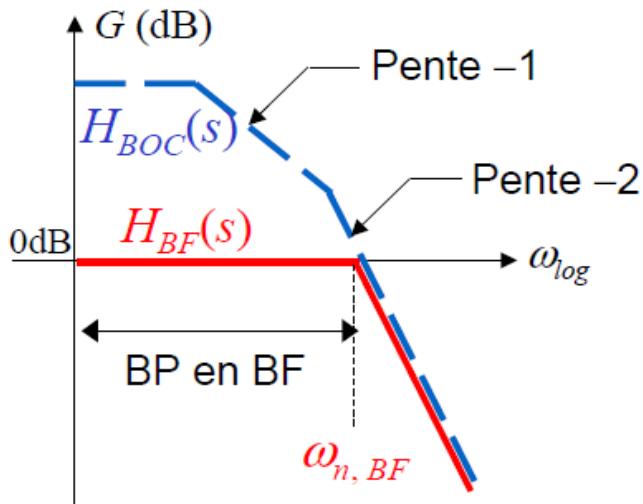


Figure 5.7 : Diagramme de Gain de Bode d'un système de 2<sup>ème</sup> ordre en BF

$$w_{n,BF} = w_{n,0} \sqrt{1 + k_0} \approx w_{co} \quad \text{Pour : } 0.2 < \xi_{BF} < 0.8 \quad \text{On a : } 2 < w_{n,BF} t_m < 4$$

### 5.2.3) Structures des corrections

La figure 5.3 illustre une **correction série sans actionneur**. Le rôle de **l'actionneur** est de surmonter le **signal commande** généré par le **correcteur** pour exciter le **système** en vue d'une **correction**. La figure ci-dessous illustre bien une **correction série avec actionneur**.

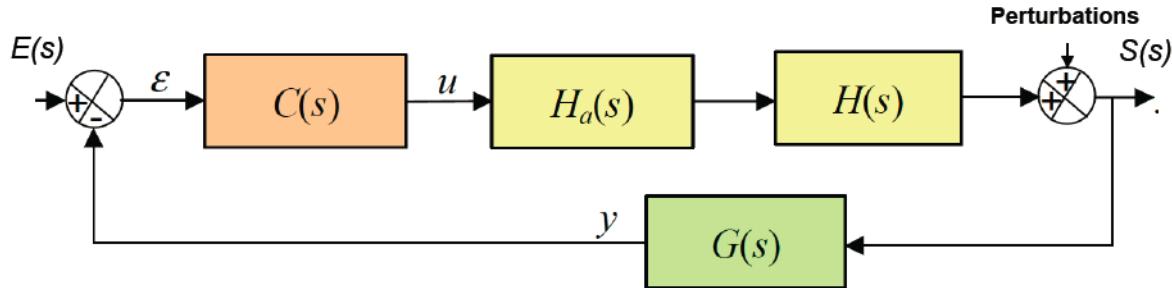


Figure 5.8 : Correction série avec actionneur

**$C(s)$**  : Correcteur,  **$H_a(s)$**  : actionneur,  **$H(s)$**  : Système,  **$G(s)$**  : capteur.

#### 5.2.3.1) Correction série :

Le **correcteur** est placé dans la **chaîne d'action directe du système**, en aval du **comparateur** et juste avant ou en amont de **l'actionneur** (figure 5.8). L'**entrée du correcteur** c'est l'**écart  $\varepsilon(t)$** - l'**erreur** entre la **consigne** et la **sortie du système**- et sa **sortie** est le **signal commande  $u(t)$** .

Le rôle du **correcteur** est d'élaborer le **signal de commande  $u$**  approprié à partir du **signal d'erreur  $\varepsilon$**  entre la **consigne** et la **sortie mesurée** et ramenée au **comparateur** par le **capteur** (figure 5.8).

Remarque :

- La correction série reste la plus utilisée et la plus facile à mettre en œuvre ;

- On se ramènera dans ce cas à un **asservissement retour unitaire** en plaçant le **capteur** en bout de **chaîne directe**.

La figure 5.9, illustre une **Correction série à retour unitaire**

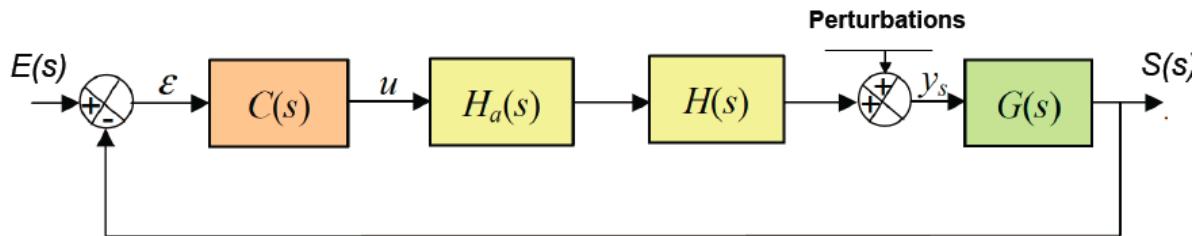


Figure 5.9 : Correction série à retour unitaire

### 5.2.3.2) Correction parallèle :

Le **correcteur** est placé dans la **chaine de retour interne** en amont du **système**. C'est le **retour** de la **sortie d'actionneur** à la **chaine d'action directe du système**, en aval du **comparateur** et juste en amont de l'**actionneur** (figure 5.10). L'**entrée du correcteur** c'est un **écart**  $\varepsilon \varepsilon(t)$ - l'**erreur** entre l'**écart**  $\varepsilon(t)$  et le **signal commande (sortie du correcteur)**-, et sa **sortie** est le **signal commande u(t)**.

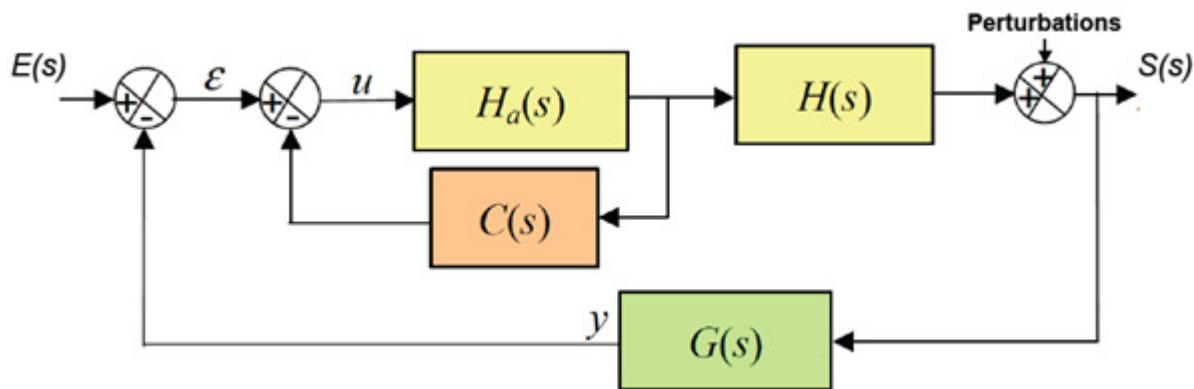


Figure 5.10 : Correction parallèle

$C(s)$  : Correcteur,  $H_a(s)$  : actionneur,  $H(s)$  : Système,  $G(s)$  : capteur.

### 5.2.3.3) Correction série-parallèle :

Cette **correction** se caractérise par l'utilisation des deux **correcteurs**  $C_1(s)$  **correcteur série** et  $C_2(s)$  **correcteur parallèle**.  $C_1(s)$  est placé dans la **chaine d'action directe du système**, en aval du **comparateur** et juste avant ou en amont de la **boucle interne**.  $C_2(s)$  est placé dans la **chaine de retour interne** en amont du **système**. C'est le **retour** de la **sortie d'actionneur** à la **chaine d'action directe du système** (figure 5.11).

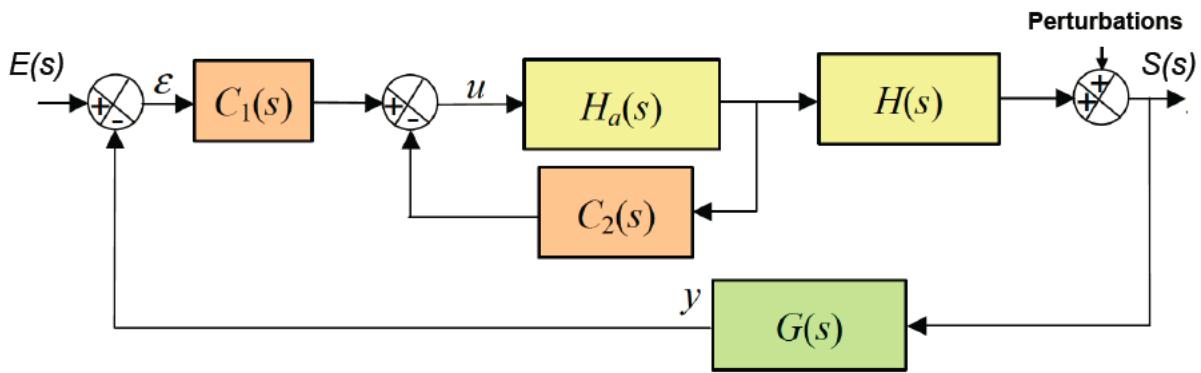


Figure 5.11 : Correction série-parallèle

$C(s)$  : Correcteur,  $Ha(s)$  : actionneur,  $H(s)$  : Système,  $G(s)$  : capteur.

#### 5.2.3.4) Correction par anticipation :

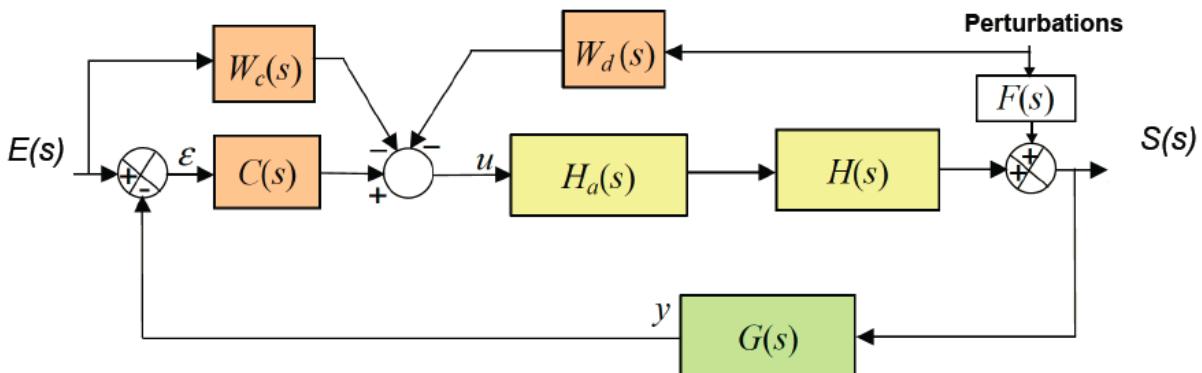


Figure 5.12 : Correction par anticipation

$C(s)$  : Correcteur,  $Ha(s)$  : actionneur,  $H(s)$  : Système,  $G(s)$  : capteur,  $F(s)$  perturbations,  $W_i(s)$  : prédicteurs (i=c ou d).

$$S(s) = \frac{C(s)H_a(s)H(s) - W_c(s)H_a(s)H(s)}{1 + C(s)H_a(s)H(s)G(s)}E(s) + \frac{F(s) - W_d(s)H_a(s)H(s)}{1 + C(s)H_a(s)H(s)G(s)}D(s) \quad (5.1)$$

$D(s)$  C'est la **perturbation**.

⇒ **Compensation de la perturbation :**

L'équation (5.1) montre que si la **perturbation**  $D(s)$  est **mesurable**, elle est totalement éliminée en choisissant le **correcteur**  $W_d$  tel que :

$$F(s) - W_d(s)H_a(s)H(s) = 0 \rightarrow W_d(s) = \frac{F(s)}{H_a(s)H(s)} \quad (5.2)$$

⇒ **Anticipation de la consigne**

Le but de l'**asservissement** est que la **sortie**  $s(t)$  **suive la consigne**  $e(t)$  c'est-à-dire  $s(t) = e(t)$ . Si  $d(t) = 0$  on a :

$$S(s) = E(s) \rightarrow \begin{cases} C(s)H_a(s)H(s)G(s) = 0 \\ C(s)H_a(s)H(s) - W_c(s)H_a(s)H(s) = 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

$$W_c(s) = \frac{1}{H_a(s)H(s)G(s)} \quad (5.4)$$

Remarques :

- Les **correcteurs**  $W_d$  et  $W_c$  ne sont pas en général **réalisables physiquement** (contrainte de **causalité** non satisfaite). On réalise alors une approximation en ajoutant des **pôles**.
- Une **correction par anticipation réalisable physiquement** n'affecte pas la **stabilité** du **système**.
- Le **modèle du système** doit être **précis** pour une **bonne correction par anticipation**.
- En général, la **perturbation** n'est pas **mesurable** d'où la difficulté de la compenser.

#### 5.2.4) Effets des correcteurs (Black et Bode)

Le type du **correcteur** dépend de son action sur la **fonction de transfert du système en boucle ouverte FTBO(s)** dans le domaine de **Black** (ou **Bode**).

On distingue alors deux types de **correcteurs** :

- Les **correcteurs «translatants»**,
- Les **correcteurs «déformants»**.

##### 5.2.4.1) Correcteurs translatants:

Comme leur nom l'indique, ils ne font que translater uniformément le lieu de Black (Bode) en gain (dB) de la **fonction de transfert du système en boucle ouverte FTBO(s)** sans modifier la phase.

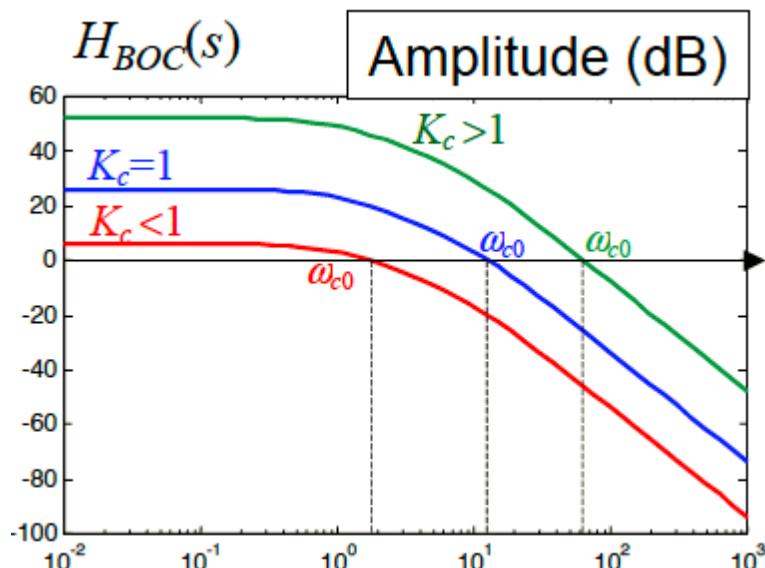


Figure 5.13 : Effets d'un correcteur translatant sur la courbe de gain de Bode

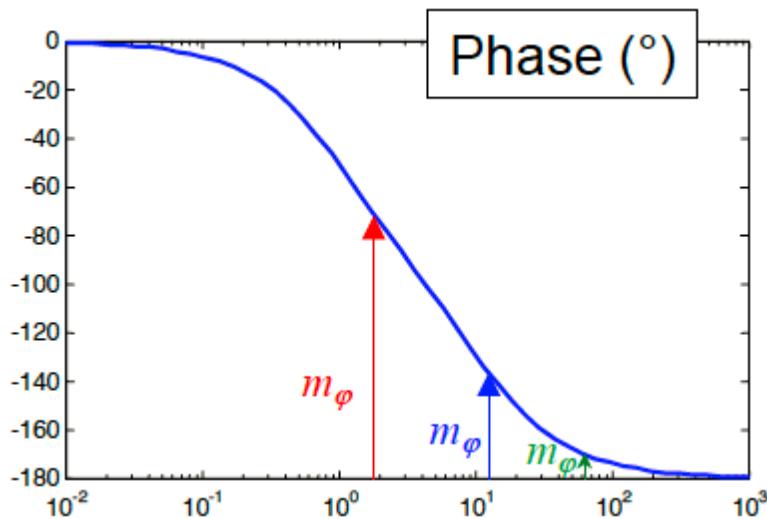


Figure 5.14 : Effets d'un correcteur translatant sur la courbe de phase de Bode

### 5.2.4.1) Correcteurs déformants:

Comme leur nom l'indique, ils ne font que translater uniformément le lieu de Black (Bode) en gain (dB) de la **fonction de transfert du système en boucle ouverte FTBO(s)** sans modifier la phase.

Leur action sur le **lieu de Black (Bode)** est plus complexe ; en fonction de la **fréquence du signal d'entrée, gain (en dB) et phase** peuvent être modifiés

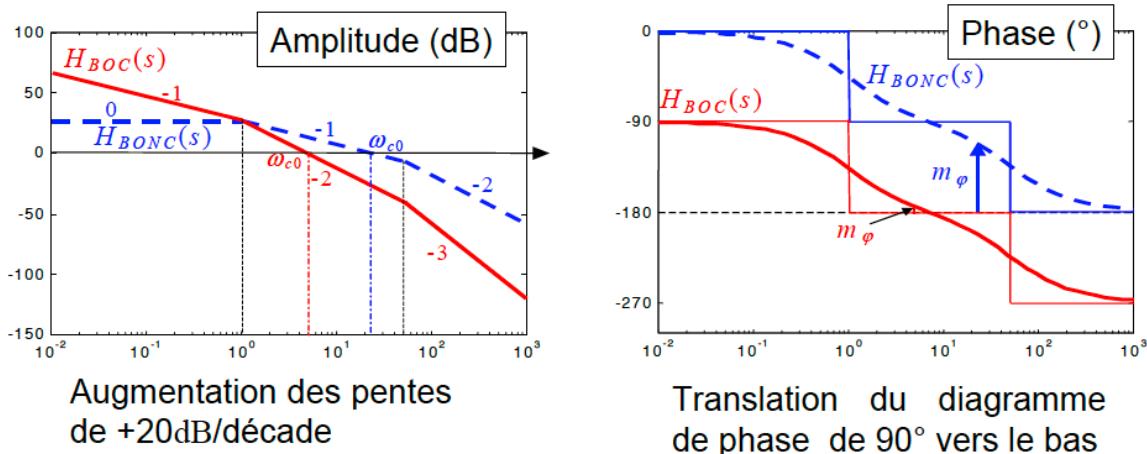


Figure 5.15 : Effets d'un correcteur déformant sur les courbes (gain, phase) de Bode

## 5.3) Type des correcteurs selon leurs actions (PID)

Au XVIII<sup>e</sup> siècle, les **régulateurs à rétroaction** mécanique étaient utilisés dans l'industrie pour **contrôler les processus**. En général, ils combinaient deux des **actions** de l'ensemble **proportionnel-intégral-dérivé**, mais jamais les trois. À cette époque, ils **contrôlaient la vitesse de l'actionnement** des **moteurs à vapeur** afin d'assurer une plus grande **stabilité** au fonctionnement des machines industrielles.

En 1911, l'entrepreneur et inventeur **Elmer Sperry** crée la **régulation PID** (proportionnelle-intégrale-dérivée), qui associe les **trois actions**. Sperry a développé cette **régulation** pour la **Marine américaine** afin **d'automatiser le pilotage des navires**. Quelques années après l'invention, l'ingénieur **Nicolas Minorsky** publia la première analyse théorique de cette **régulation**, décrivant le **comportement** dans une **équation mathématique** qui sert de base au calcul jusqu'à nos jours.

Bien que des **techniques de contrôle et régulation plus avancées** soient disponibles au marché, les régulateurs PID sont toujours les plus utilisés dans les processus industriels à nos jours. Citons l'industrie pétrochimique, l'industrie de la pâte à papier, la production de produits laitiers ou le traitement de l'eau. Le fait que cette **régulation**, si **correctement réglée** (en mode manuel), puisse **anticiper, réduire, voire éliminer** du bruit, la rend encore très souhaitable. Le **réglage manuel des paramètres PID** nécessite parfois une expertise et une connaissance théorique préalable de la part de l'opérateur pour choisir la meilleure **régulation** pour son processus. Selon **Aström et Hägglund** (1995), environ **90 % des boucles de commande** dans les procédés industriels fonctionnent avec ce **régulateur (PID)**.

Lorsque le **système** ne satisfait pas naturellement les **performances attendues (cahier des charges)**, il est possible de modifier son **comportement** en **boucle fermée** sans modifier le **processus**. Il s'agit d'adapter la **consigne d'entrée du processus** en fonction de l'évolution de l'**écart à la consigne**  $\varepsilon(t)$ . C'est le rôle du **correcteur** (figures 5.3, 5.8 et 5.9).

Il est implanté dans la partie **commande**, généralement positionné entre le **comparateur** et la **chaîne d'action**, pour assurer :

- Une **correction efficace des perturbations** (il est placé avant la **perturbation**),
- la "fraîcheur" de l'information de **sortie du comparateur** : ce **signal** n'a pas été modifié par les différents constituants du système. Ses caractéristiques sont entièrement contrôlées et réglables (technologie électronique ou informatique).

La **fonction de transfert du correcteur** est alors :  $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)}$  (5.5)

Le **correcteur** présente plusieurs avantages :

- Il est peu coûteux et il est facilement modifiable car il manipule des **grandeur de commandes**, c'est à dire à faible énergie.
- Il est influent car il agit directement sur la **commande du processus**. Ce n'est cependant pas une solution miracle car il ne pourra jamais **compenser des défauts** de conception majeurs du **processus**.

### 5.3.1) Choix de type de la correction

Le **correcteur** est présent pour adapter les **performances** du **système** lorsque celui-ci présente des **défauts** et qu'il ne respecte pas les **critères du cahier des charges**. À chaque **défaut**, une **correction** est adaptée.

Lorsqu'un **système** présente **plusieurs défauts** simultanément, **plusieurs corrections combinées** permettent bien souvent de résoudre chaque **défaut**, même si elles sont plus complexes à dimensionner, car il ne faut pas détériorer les autres caractéristiques !

Il est clair pour tout **automaticien** qu'une bonne **précision** nécessite :

- Un **gain de boucle ouverte élevé**.
- La présence d'**au moins d'un intégrateur dans la chaîne de commande**.

Comme, il est logique pour tout **automaticien** qu'une bonne **stabilité** nécessite :

- Un gain de boucle ouverte faible.
- L'absence d'un intégrateur dans la chaîne de commande. Ces conditions étant opposées, il s'agit à l'automaticien de faire des meilleurs compromis.

Dans cette partie, on s'intéresse à la **correction** par **correcteurs** classiques (PID) en **série** (**cascade**) où le **contrôleur** (correcteur ou régulateur) est le cœur de toute **boucle de commande**. Les figures 5.3, 5.8 et 5.9 où le **correcteur** est placé dans la **chaîne directe du système** en se basant sur l'**erreur entre la consigne et la sortie**, le **correcteur** calcule la **commande** pour que la **sortie suive la consigne**. Le rôle du correcteur comme était mentionné, consiste à modifier les **performances du système** initial (**précision, stabilité, rapidité**) pour les améliorer.

Parmi ces **correcteurs**, il y'en a ceux qui modifient le **gain du système en BO (précision)** et d'autres qui agissent sur la **marge de phase (stabilité, rapidité)**.

- **Correcteurs qui modifient le gain** : Proportionnel (P), intégral (I), proportionnel-intégral (PI) et à retard de phase.
- **Correcteurs qui modifient la marge de phase** : Proportionnel dérivé (PD) et à avance de phase.
- **Correcteur réalisant les trois actions** : Proportionnel-intégral-déivateur (PID).

Soit l'exemple d'un **moteur linéaire asservis en position** (figure 5.16). Les évolutions de la **consigne de position**  $e(t)$  en échelon, de la **position réelle**  $s(t)$  (réponse indicielle du système), de l'**écart**  $\varepsilon(t)$  et de la **tension de commande**  $u(t)$  du moteur **avant et après correction (proportionnelle)** sont illustrées par les courbes de la figure 5.17. Les courbes en trait plein pour le **système non corrigé** et celles en trait pointillé pour le **système corrigé**.

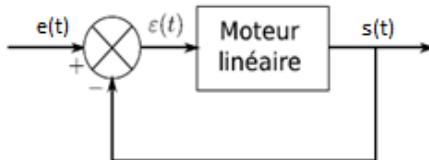
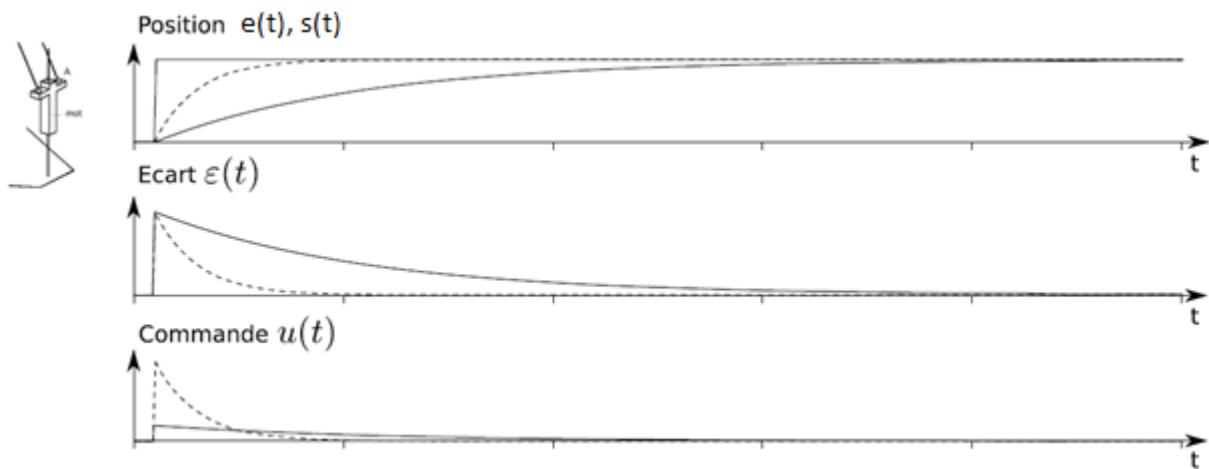


Figure 5.16 : Schéma bloc du moteur linéaire asservi en position, non corrigé



Les courbes en trait plein montrent bien les **défauts** qui présente le **moteur** (**défaut de rapidité, défaut de précision et défaut de stabilité**). Dans la suite, on essaye **corriger** ces **défauts** en ajoutant

des **actions élémentaires** (proportionnalité, intégration et dérivation) dans la **chaine d'action directe** (correction série).

### 5.3.1.1) Le moteur est trop lent (défaut de rapidité): action proportionnelle

La **position réelle**  $e(t)$  du **moteur** converge **trop lentement** vers la **consigne**  $s(t)$ . Une solution simple consiste alors à "faire croire" au **moteur** que l'**écart à la consigne** est  $K$  fois plus grand que l'**écart réel** pour **amplifier sa réaction**. On applique une **consigne en entrée du processus** égale à  $K$  fois l'**écart mesuré**. C'est la **correction** par l'**action proportionnelle**.

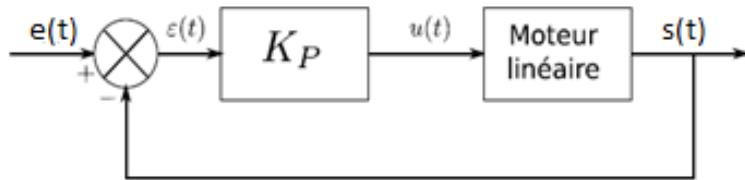


Figure 5.18 : Asservissement du moteur par l'action proportionnelle

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) \rightarrow U(s) = K_p \varepsilon(s) \quad (5.6)$$

Après une **correction proportionnelle**, on remarque bien, que la **réponse du système corrigé** (trait pointillé) est beaucoup **plus rapide** que celle du **système non corrigé** (trait plein). La courbe de **commande**  $u(t)$  montre bien que pour un **écart**  $\varepsilon(t)$  donné, la **correction proportionnelle** démultiplie la **commande** envoyée au **moteur** (figure 5.17).

### 5.3.1.2) Le moteur n'est pas précis (défaut de précision) : action intégrale

Le **système** ne **converge** pas vers la valeur de **consigne**, soit parce qu'il n'est pas **précis**, soit parce qu'il est soumis à des **perturbations**.

Les **systèmes non précis** sont ceux qui ont besoin d'énergie pour maintenir la **grandeur de sortie** à la valeur de **consigne**. Par exemple pour un **asservissement de vitesse**, le **moteur** doit être alimenté en énergie pour maintenir la **vitesse de consigne**. Or une **correction proportionnelle** conduit à une **commande nulle** (donc **aucun apport d'énergie**) lorsque la valeur de **consigne** est **atteinte**. On comprend donc, que cette **correction** est **insuffisante** pour rendre ce type de **systèmes précis**, sauf à avoir un **gain très élevé**.

Pour **amener la valeur de sortie à la consigne**, la partie **commande** doit donc **augmenter la grandeur de commande** tant qu'une **erreur subsiste**. Une solution est de **commander** le moteur en fonction du **cumul des écarts mesurés**. C'est la **correction intégrale** (figure 5.19).

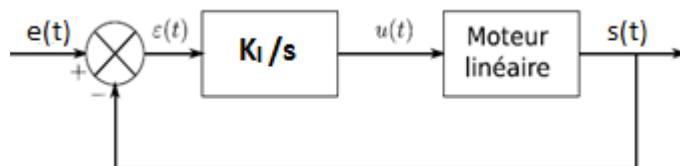


Figure 5.19 : Asservissement du moteur par l'action Intégrale

$$u(t) = K_I \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \rightarrow U(s) = \frac{K_I}{s} \varepsilon(s) \quad (5.7)$$

La figure 5.20 illustre l'évolution de la **réponse indicielle  $s(t)$**  du **système non corrigé** (trait continu) et **corrigé par une action intégrale pure** (trait pointillé).

On voit bien que la **commande  $u(t)$**  augmente tant que l'**écart  $\varepsilon(t)$**  est positif et que le **système corrigé** est **précis**. Par contre, le **temps de réponse** est largement augmenté (la **commande** augmente lentement car il faut attendre d'avoir intégré l'**écart** depuis un certain temps) et un **dépassement** apparaît, signe d'une dégradation de la **stabilité**. Pour cette raison, une **correction par action intégrale** est rarement utilisée seule. On lui adjoint généralement une action proportionnelle à fin de ne pas trop dégrader la **rapidité** et la **stabilité**.

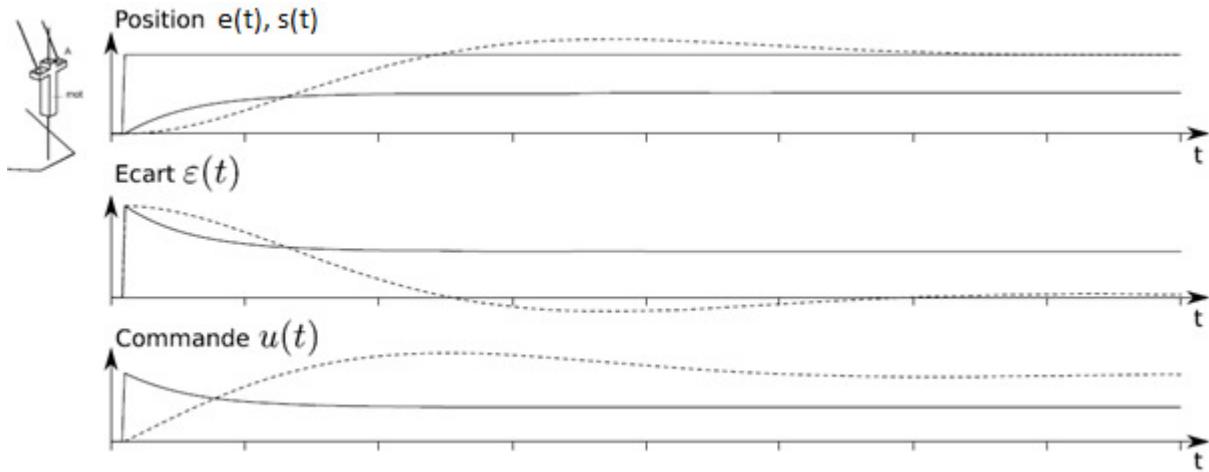


Figure 5.20 : Consigne de position  $e(t)$  (échelon), position réelle (réponse indicielle)  $s(t)$ , écart  $\varepsilon(t)$  et la tension de commande  $u(t)$  avant et après correction par action intégrale

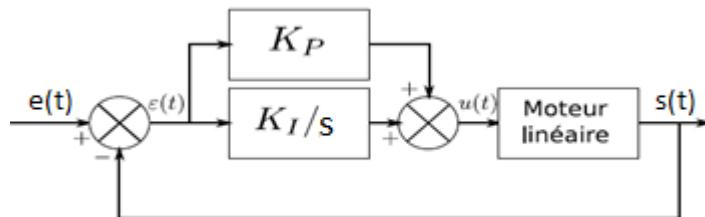


Figure 5.21 : Asservissement du moteur par l'action proportionnelle-intégrale

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + K_I \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \rightarrow U(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} \right) \varepsilon(s) \quad (5.8)$$

La courbe de la **réponse indicielle du système  $s(t)$**  avec **correction proportionnelle-intégrale** montre bien que le **système est précis**, guère **moins rapide** que le **système non corrigé** et **stable** (pas de **dépassement**). **L'action proportionnelle** agit essentiellement au début du mouvement et **l'action intégrale** n'a pas encore réagi (*il faut intégrer l'écart durant un certain temps*). Le système donc arrive à être **rapide** grâce à **l'action proportionnelle**. **L'action intégrale** permet à la **réponse indicielle du système  $s(t)$**  de converger vers la **consigne  $e(t)$** . elle apporte l'énergie permanente nécessaire pour assurer la **précision**, ce que ne peut pas faire **l'action proportionnelle** qui s'annule nécessairement lorsque l'**écart devient nul**.

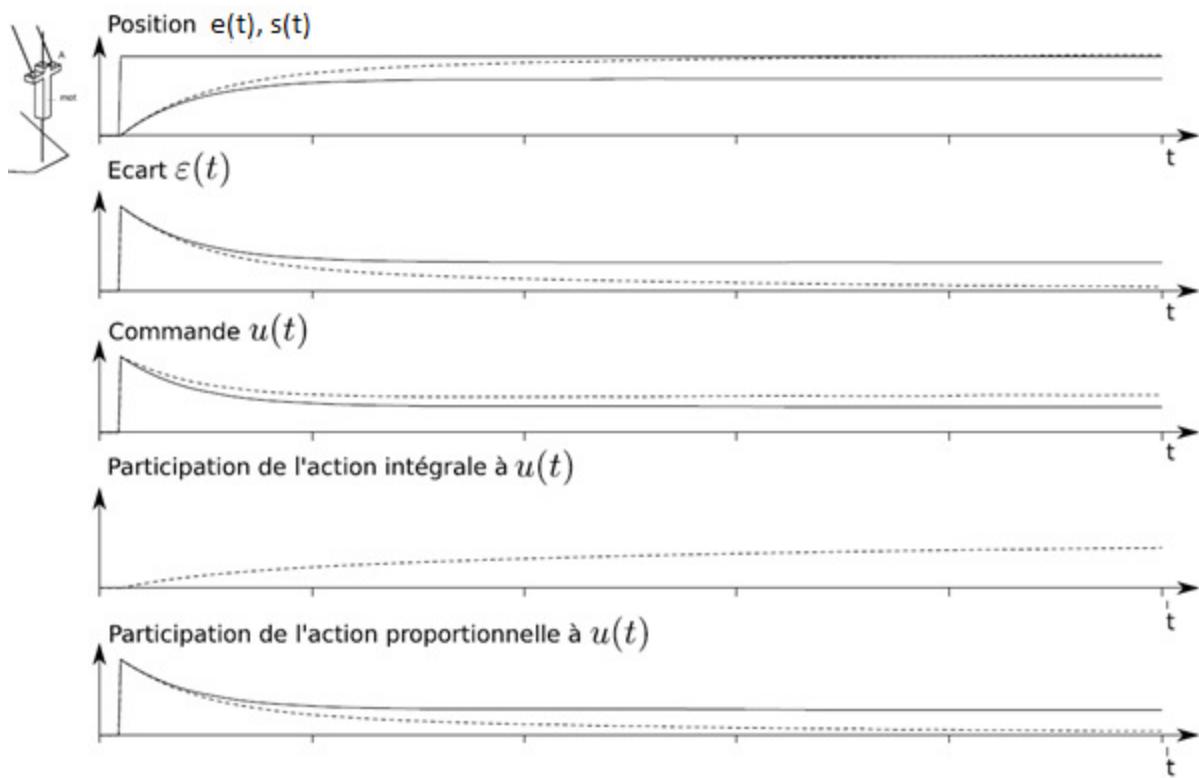


Figure 5.22 : Consigne de position  $x_c(t)$  (échelon), position réelle (réponse indicelle)  $x(t)$ , écart  $\varepsilon(t)$  et la tension de commande  $u(t)$  avant et après correction par action Proportionnelle-intégrale

### 5.3.1.3) Le moteur n'est pas assez stable (défaut de stabilité) : action dérivée

Le **système** oscille trop avant de **converger**. Cela provient généralement d'une **grande inertie** du **système**. Une **commande sans correction** conduit à une **commande positive** tant que le **système** n'a **pas dépassé la consigne**. Si le **système** a **accumulé beaucoup d'inertie** lorsqu'il atteint la **consigne**, il va alors dépasser cette **consigne** et l'**écart** devenu **négatif** doit relancer le **système** dans le sens opposé.

Il est logique d'**anticiper** et de **ralentir** à l'approche de la valeur de consigne, c'est-à-dire **diminuer la commande**, lorsque l'**écart diminue rapidement**. Il s'agit d'une **correction par action dérivée**.

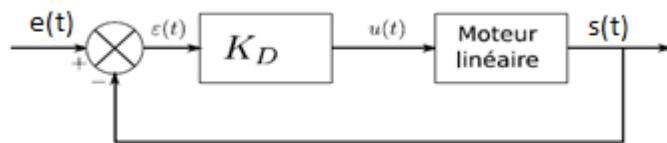


Figure 5.23 : Asservissement du moteur par l'action dérivée

$$u(t) = K_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \rightarrow U(s) = K_D \cdot s \cdot \varepsilon(s) \quad (5.9)$$

L'**action dérivée pure** (figure 5.23) n'est jamais utilisée car elle conduit à une **diminution de la classe du système** en **boucle ouverte** et donc une **dégradation directe de la précision du système**. Pour la majorité des **systèmes**, si l'**entrée** est constante et que la **sortie** a convergé vers une valeur quelconque, alors l'**écart**  $\varepsilon(t)$  est constant et la **commande**  $u(t)$  est nulle.

Le **système** n'est pas capable de voir la distance qui le sépare de la consigne. On utilise donc **l'action dérivée** en complément d'une autre **action**, par exemple une action **proportionnelle-dérivée** (figure 5.24).

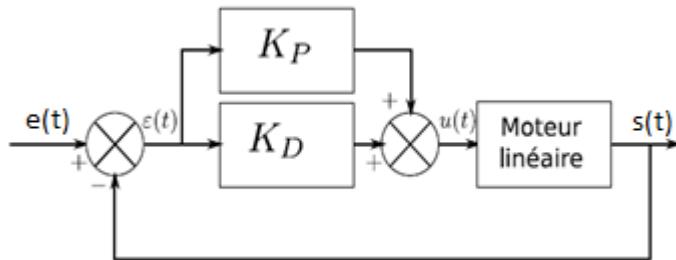


Figure 5.24 : Asservissement du moteur par l'action proportionnelle-dérivée

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + K_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \rightarrow U(s) = (K_p + K_D \cdot s) \varepsilon(s) \quad (5.10)$$

La **réponse** d'un **système** peu **stable** avec et sans **correction** est donnée sur la figure 5.25.

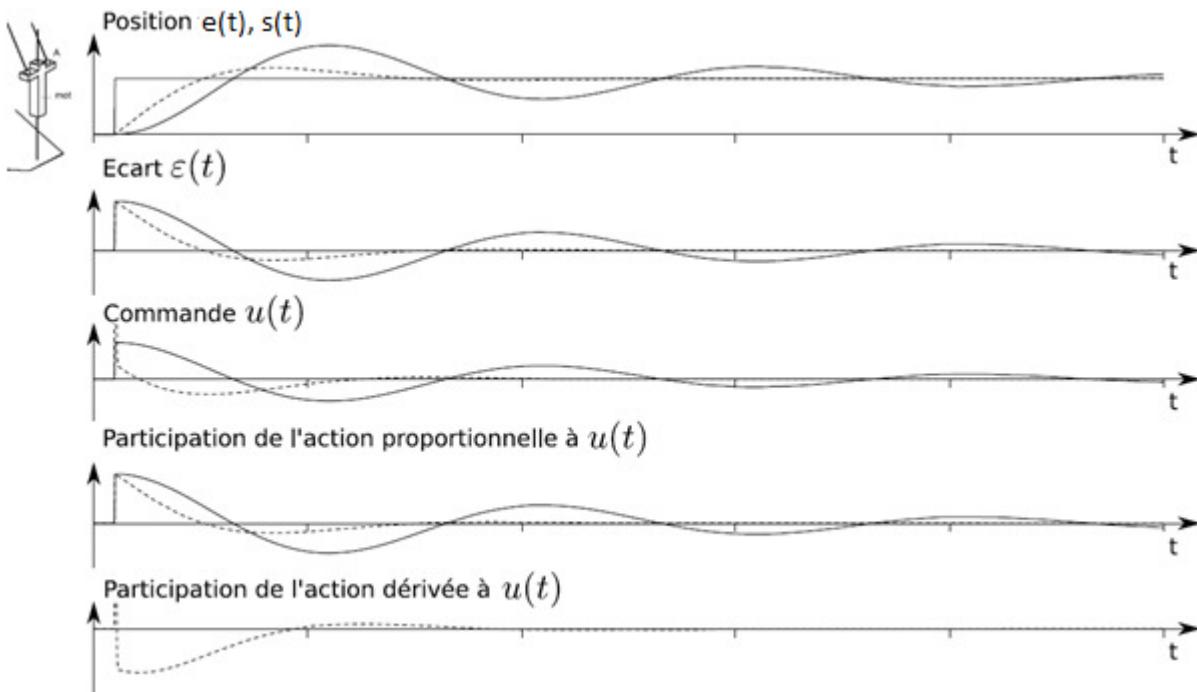


Figure 5.25 : Consigne de position  $x_c(t)$  (échelon), position réelle (réponse indicielle)  $x(t)$ , écart  $\varepsilon(t)$  et la tension de commande  $u(t)$  avant et après correction par action proportionnelle-dérivée

Les courbes de la figure 5.25 sont tracées pour  $K_p = 1$ , donc les différences entre les **réponses** (corrigée ou non corrigée) sont uniquement dues à l'apport de **l'action dérivée**. On remarque que le **système** présente beaucoup moins de **dépassement** et qu'il s'est amélioré en terme de **rapidité** (la convergence étant moins oscillante).

La participation de **l'action dérivée** se fait en deux temps :

- à  $t = 0$ , lorsque **l'écart** subit un **échelon**, **l'action dérivée** impose un Dirac en **commande** (ce qui met le **système** en mouvement plus brutalement que par **l'action proportionnelle** seule et diminue le **temps de montée**),

- à  $t > 0$ , lorsque le **système** prend de la vitesse, l'**action dérivée** limite la valeur de la **commande** et agit ainsi comme un **frein** (ou une **viscosité**) artificiel évitant d'accumuler trop d'inertie (ce qui diminue le **temps d'oscillation** à convergence).

**Remarque:** sur un **système réel**, la saturation des composants d'amplification d'énergie va nécessairement limiter l'action du Dirac, et donc limiter la mise en mouvement très rapide du **système**. Le **gain** sur la **rapidité** est donc essentiellement dû à la limitation des **oscillations**, mais pas à la diminution du **temps de montée**.

### 5.3.2) Correcteur proportionnel (P)

Le **correcteur proportionnel** élémentaire est le **correcteur de base** (figure 5. XX).

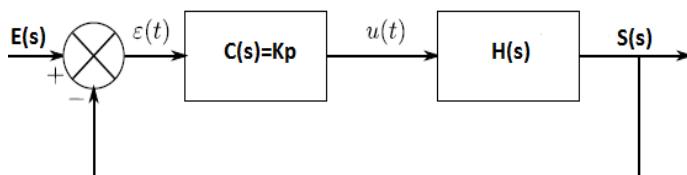


Figure 5.26 : Asservissement par correcteur proportionnel

Le **correcteur proportionnel** est caractérisé par la relation **proportionnelle** entre la **commande** (entrée du **système**) et l'**erreur** entre la **sortie** mesurée et la **consigne** et une **fonction de transfert constante** donnée par :

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) \rightarrow C(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p \quad (5.11)$$

Le **correcteur proportionnel** consiste simplement à jouer sur le facteur de gain  $K$  de la boucle. Ce **correcteur** ne modifie pas la **phase**, mais augmente le **gain** de la **FTBO** de  $20\log K_p$ , ce qui permet d'améliorer la **précision** du **système** à condition de rester dans la limite de la **stabilité** du **système**.

\*\*\* ➔ Si la **fonction de transfert en boucle ouverte** du **système non corrigé**  $H(s)$  ne possède pas d'intégration :

$$H(s) = \frac{K_s N(s)}{s^\alpha D(s)} \text{ avec : } \alpha=0 \rightarrow H(s) = \frac{K_s N(s)}{D(s)} \text{ avec : } N(0)=D(0)=1 \text{ et } K_s \text{ le } \text{gain statique} \quad (5.12)$$

La fonction de transfert du système corrigé s'écrit alors :

$$BO_c(s) = H_c(s) = K_p H(s) = K_p \frac{K_s N(s)}{D(s)} \quad (5.13)$$

Vue que l'**erreur indicielle** ou de position d'un système ne possédant pas d'intégration est de la forme :

$$\varepsilon_i = \varepsilon_p = \frac{E_0}{1+K} \text{ avec : } K=K_p K_s \quad (5.14)$$

Le correcteur proportionnel permet donc, en augmentant le gain de la FTBO, d'améliorer la précision du système à condition de rester dans la limite de la stabilité du système. Les figures 5.29 et 5.30 montrent l'effet du correcteur proportionnel sur un système du second ordre.

On remarque, lorsque le **gain augmente** automatiquement :

⇒ Pour la réponse temporelle :

- L'**erreur indicielle** ou l'**erreur de position** diminue ;
- la **sortie** est de plus en plus oscillante ;

- le **dépassemement** augmente ;
  - la **pseudo-période**  $T_p$  diminue ( $w_p$  augmente) ;
  - le **temps de montée** diminue ;
- ⇒ Pour la réponse fréquentielle :
- **déplacer verticalement** (vers le haut ou le bas) d'un certain nombre de décibels (dB) la courbe de **gain du diagramme de Bode** associé au processus sans toucher à la **courbe de phase**. Le **lieu de black** est aussi décalé vers le haut (la **phase reste inchangée**).
  - Il est à noter, qu'une **augmentation du gain de la fonction en boucle ouverte** entraîne une **diminution de la marge de phase**.

On constate de même que l'augmentation du **gain** de la FTBO augmente la **bande passante**, le **temps de montée** et donc réduit d'autant la **rapidité** des **systèmes**.

\*\*\* → Si la **fonction de transfert en boucle ouverte** du **système non corrigé**  $H(s)$  comporte une **intégration**, équation (5.12) avec :  $\alpha=1$ .

La **fonction de transfert du système corrigé** s'écrit alors :

$$BO_c(s) = H_c(s) = K_p H(s) = K_p \frac{K_s N(s)}{s D(s)} \quad (5.15)$$

Le **système** est déjà naturellement **précis** pour une **entrée en échelon** (erreur indicielle ou de position est nulle). Le **correcteur proportionnel** n'a donc pas d'effet direct sur l'**erreur indicielle ou de position**, par contre en **décalant la courbe de gain vers le haut**, le **système** peut devenir **oscillant** voire **instable**.

On sait aussi que l'**erreur de traînage** est de la forme :  $\varepsilon_T = \varepsilon_V = \frac{A}{K}$  avec :  $K=K_p K_s$  (5.16)

La **correction proportionnelle** permet donc pour un **système classe  $\alpha = 1$**  de diminuer l'**erreur de traînage ou de vitesse**.

**Remarque :** Dans tout ce qui suit, on suppose que la **fonction de transfert du système commandé** est  $H(s)$  de **gain**  $G_{dB}$  et de **phase**  $\varphi$ .

La **fonction de transfert du système corrigé** est donnée :

$$H_{BOC}(s) = FTBO'(s) = K_p H(s) \rightarrow \begin{cases} G'_{dB} = 20 \log K_p + G_{dB} \\ \varphi' = \arg(K_p) + \arg(H(s)) = \varphi \end{cases} \quad (5.17)$$

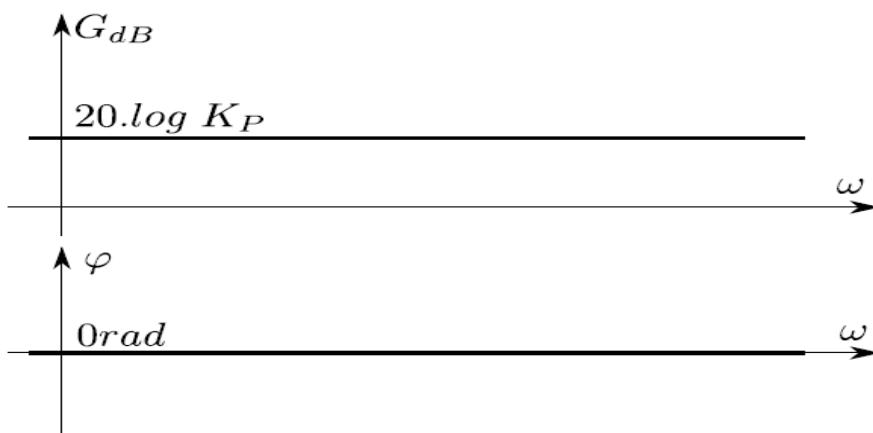
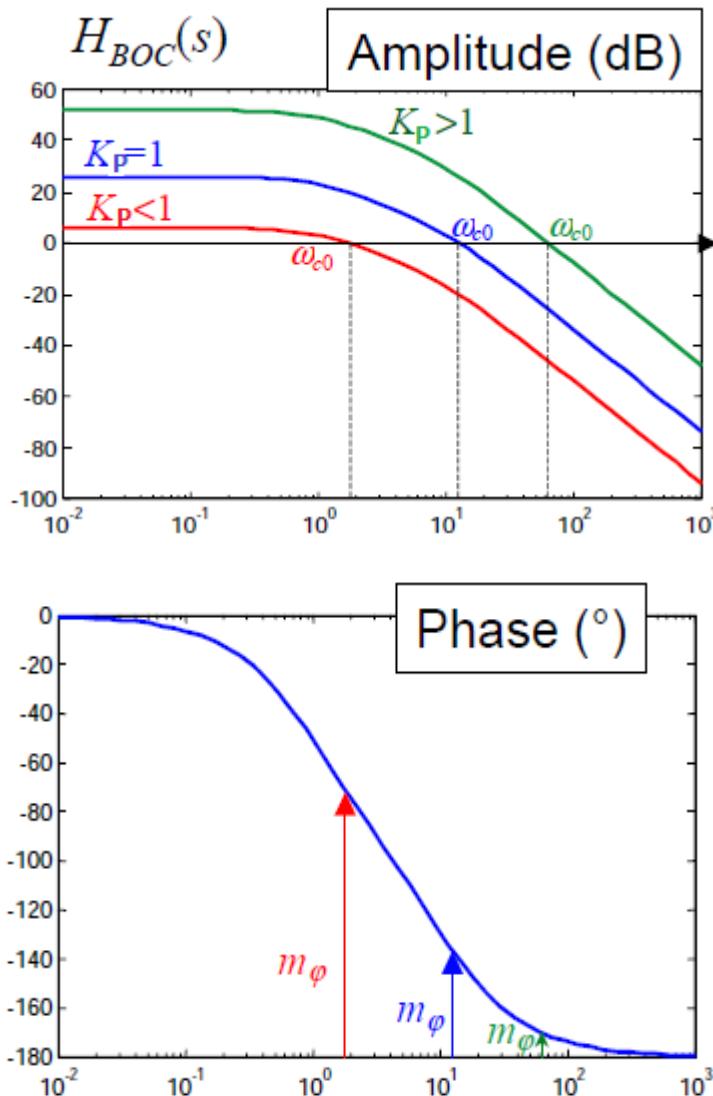


Figure 5.27 : Diagramme de Bode du correcteur proportionnel

Figure 5.28 : Diagramme de Bode des FTBO corrigée ( $K_p > 1$  ou  $< 1$ ) non corrigée ( $K_p = 1$ )

#### Si $K_p > 1$ (amplification)

- ⇒ Amélioration de la **précision** du **système** en **boucle fermée**.
- ⇒ Translation du diagramme de **gain de Bode** vers le haut.
- ⇒ Augmentation de  $\omega_{co}$  → Augmentation de la **rapidité**.
- ⇒ Diminution de la **marge de phase** (dégradation de la **stabilité** en **boucle fermée**).

#### Si $K_p < 1$ (atténuation)

- ⇒ Diminution de la **précision** du **système** en **boucle fermée**.
- ⇒ Translation du diagramme de **gain de Bode** vers le bas.
- ⇒ Diminution de  $\omega_{co}$  → Diminution de la **rapidité**.
- ⇒ Augmentation de la **marge de phase** (amélioration de la **stabilité** en **boucle fermée**).

**Le correcteur proportionnel** tend à augmenter la **rapidité** pour deux raisons :

- d'une part car l'augmentation à toutes les fréquences du **gain** conduit à fournir plus d'énergie au **système** commandé, et donc à le déplacer plus **rapidement**. Cette action peut toutefois se renverser car une **commande** trop **amplifiée** peut rendre le **système** **oscillant** et donc moins rapide à converger.

- d'autre part car en **augmentant le gain** de la FTBO, la **pulsation de coupure** est **augmentée**, ce qui laisse passer dans la boucle des **fréquences plus élevées**. La **réponse du système** contient donc plus de **hautes fréquences** ce qui favorise une **meilleure rapidité**.

La **stabilité** est cependant dégradée : La **marge de gain** est directement touché (diminution de  $20\log K_p$ ) et bien que la **phase** ne soit pas affectée, la **pulsation de coupure** est **augmentée** si bien que la **marge de phase** sera aussi **diminuée**.

Donc, le **correcteur P** ne permet pas de régler indépendamment la **rapidité**, la **précision** et les **marges de stabilité**.

**Exemple 01:** Soit le **système asservi** suivant :

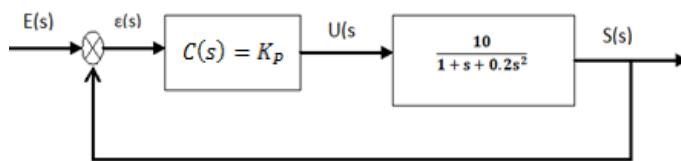


Figure 5.29 : Asservissement d'un système par un correcteur proportionnel

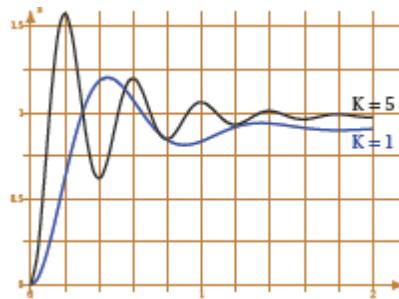


Figure 5.30 : Réponses du système avant et après une correction proportionnelle

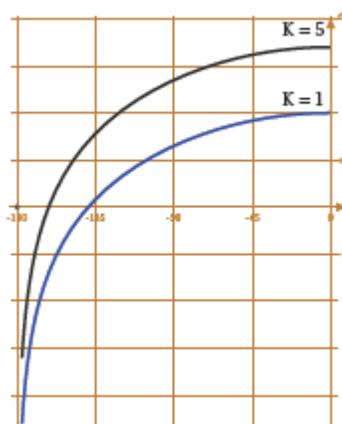


Figure 5.31 : Aback de Black du système avant et après une correction proportionnelle

**Exemple 02:** Soit le **système d'asservissement de position**, constitué d'un moteur à courant continu asservi en position. La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par :

$$H(s) = \frac{1}{s(1+\tau s)} \quad (5.18)$$

On recherche pour cet **asservissement** une **rapidité maximale** et une **marge de phase de  $M\varphi=60^\circ$** .

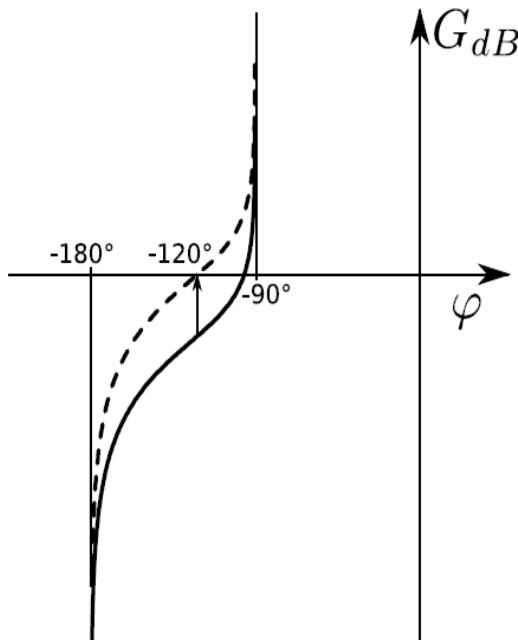


Figure 5.32 : Abaque de Black pour un asservissement de position par correcteur proportionnel

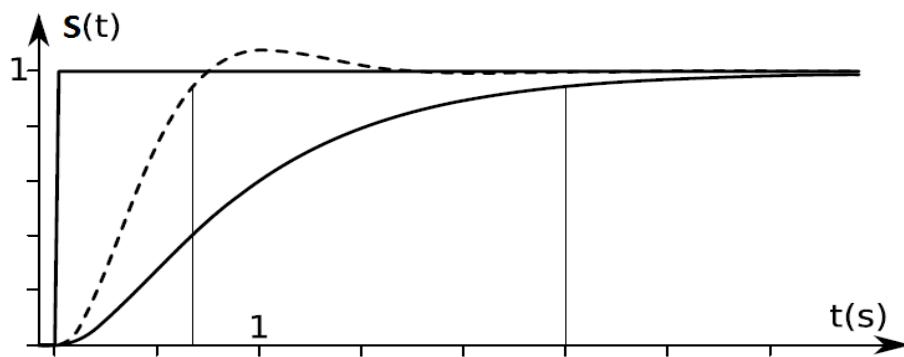


Figure 5.33 : Réponses temporelles obtenues avec et sans correction

Le **correcteur proportionnel** va translater verticalement le gain de la FTBO. Il faut donc déterminer  $w_c$  tel que la **phase** soit égale à  $-180^\circ + 60^\circ$ , qui sera le point de mesure de la marge de phase une fois le **système corrigé**. Donc on aura :  $M\varphi = 60^\circ \rightarrow \varphi = -120^\circ$

$$\rightarrow \arg(H(jw)) = -120^\circ$$

$$\rightarrow \arg(jw) + \arg(1 + j\tau w) = 120^\circ$$

$$\rightarrow \arctan(\tau w_c) = 30^\circ$$

$$\rightarrow w_c = \frac{\tan 30^\circ}{\tau} \quad (5.19)$$

$$\text{Le gain en } w_c \text{ vaut : } G_{dB} = -20 \log w_c \sqrt{(1 + \tau^2 w_c^2)} \quad (5.20)$$

L'objectif est de ramener ce point à  $G'_{dB}=0$  une fois **corrigé** :

$$G'_{dB} = 20\log K_p + G_{dB} = 0 \rightarrow K_p = w_c \sqrt{(1 + \tau^2 w_c^2)} \quad (5.21)$$

Pour un moteur de **constante de temps**  $\tau = 0.2s$ , les **réponses temporelles** avec et sans **correction** sont données figure 5.33. La **correction** trouvée est de  $K_p = 3.16$ . On observe une nette **amélioration** de la **rapidité** (le **temps de réponse** passant de **2.5 s à 0.7s**) sans une dégradation pénalisante de la **stabilité**.

### 5.3.2) Correcteur intégral (I)

#### 5.3.2.1) Correcteur intégral pur (I)

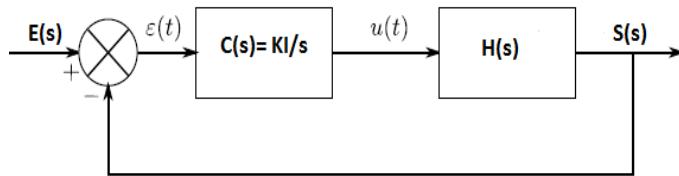


Figure 5.34 : Asservissement par un correcteur intégral

Pour un **intégrateur pur** ou **idéal**, la loi de **commande**  $u(t)$  est de la forme :

$$u(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau = K_I \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \rightarrow U(s) = \frac{K_I}{s} \varepsilon(s) \quad (5.22)$$

$T_I$  : **Constante de temps d'intégration** et  $K_I = \frac{1}{T_I}$  **constante d'intégration**.

Le **gain** et la **phase** de ce **correcteur** sont respectivement **-20 dB/décade** et  $\frac{-\pi}{2}$  : ce **correcteur** décale la **phase** de  $\frac{-\pi}{2}$ , et augmente le **gain dans les basses fréquences**, sa **pulsation de coupure** étant  $w_c = K_I$ .

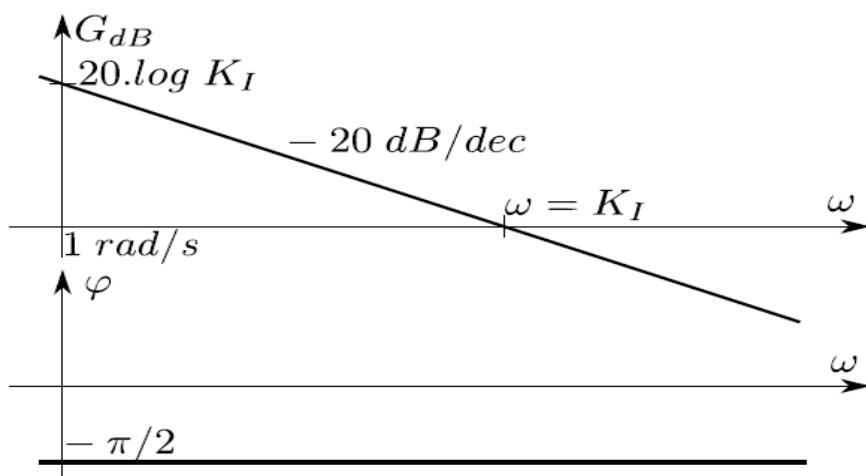


Figure 5.35 : Diagramme de Bode du correcteur intégral

- Ce **correcteur** a pour objectif d'ajouter un **pôle nul** à la **fonction de transfert en boucle ouverte**.
- A remarquer qu'un **système** dont la **fonction de transfert en boucle ouverte** possède un **pôle nul** sera caractérisé par une **erreur de position nulle**.

- On peut dire, bien que cela n'ait aucun sens d'un point de vue physique, que le **gain statique du système en boucle ouverte** tend vers l'**infinie**, ce qui corrobore la nullité de l'**erreur statique en boucle fermée**, qui est **inversement proportionnelle** au **gain statique en boucle ouverte** et diminue l'**erreur de vitesse** (si le **système non corrigé** est de **classe 0**).
- Le **correcteur intégral** est censé **améliorer la précision du système asservi** et permet un **rejet asymptotique des perturbations constantes**.
- Le **correcteur intégral** diminue la **pulsation de coupure** à 0dB  $\omega_{co}$ , la **rapidité du système en boucle fermée** et provoque un **ralentissement du système**.
- Réduction de la **marge de phase**  $\Rightarrow$  dégradation de la **stabilité** voire **l'instabilité**.

Mais la question qui se pose étant la suivante : Ce **correcteur** modifie-t-il les autres **performances** ?

- Les modifications apportées à la **fonction de transfert** influencent sans doute les autres **performances du système**.
- En effet, ce **correcteur** introduit un **déphasage de  $\frac{-\pi}{2}$**  et risque de rendre le **système instable (diminution de la marge de phase)**.
- Par ailleurs il dégrade aussi les autres **performances** :  
Augmenter le **temps de montée**  $\Rightarrow$  **ralentir le système en BF**.
- En ce qui concerne la **réalisation électronique** de ce type de **correcteur**, un **réseau passif (circuit RC)** ne permet pas de le réaliser, cependant **une bonne approximation** peut être réalisée par un **montage intégrateur à base d'amplificateurs opérationnels**.

La **fonction de transfert du système corrigé** est donnée :

$$H_{BOC}(s) = FTBO'(s) = \frac{K_I}{s} H(s) \rightarrow \begin{cases} G'_{dB} = 20 \log K_p - 20 \log w + G_{dB} \\ \varphi' = \arg\left(\frac{K_I}{jw}\right) + \arg(H(s)) = \varphi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (5.23)$$

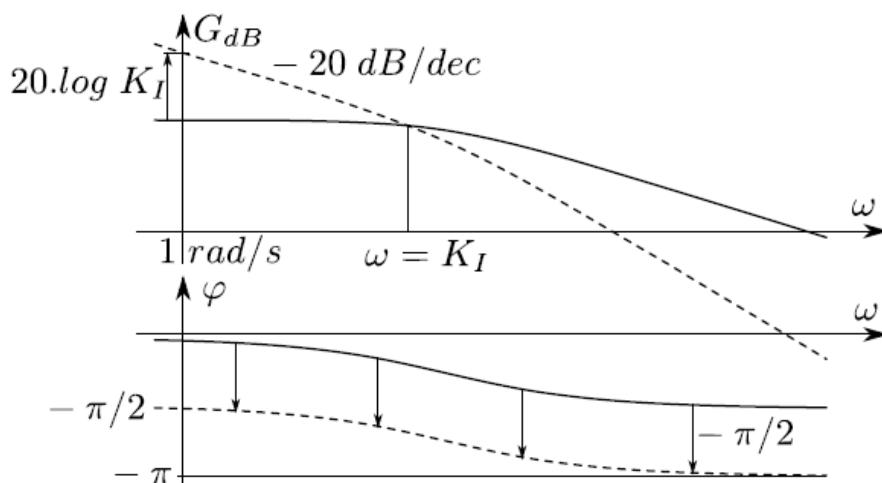


Figure 5.36 : Diagramme de Bode des FTBO corrigée et non corrigée par intégrateur

Le **correcteur intégral pur**:

- **Amplifie les basses fréquences et diminue les hautes fréquences (supérieures à la pulsation de coupure  $w_c=K_I$ ).**
- **retarde la phase de  $\frac{\pi}{2}$ .**

Les **diagrammes de Bode de la FTBO corrigée** sont donnés en figure 5.36. L'amplification infinie des **basses fréquences** a pour conséquence de faire converger le **système** vers la valeur de **consigne** et permet d'assurer la **précision du système**.

On peut rapprocher cette observation de **l'erreur statique** d'un système en  $\frac{1}{1+K}$ . Si **K** tend vers l'infini, automatiquement l'erreur tend vers 0.

Cette étude fait apparaître un inconvénient majeur pour ce **correcteur** : la phase est diminuée de  $\frac{\pi}{2}$  ce qui **dégrade** très fortement la **stabilité**. La **marge de phase** est directement réduite de  $\frac{\pi}{2}$  et la **marge de gain** sera aussi réduite dans la mesure où la **pulsation de coupure** assurant une **phase de  $-\pi$**  va diminuer. Ce **correcteur** est donc souvent **associé** à une **action proportionnelle**.

**Exemple 01:** Reprenons le **système asservi** de l'exemple précédent :

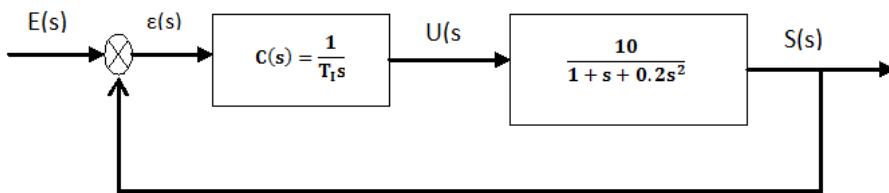


Figure 5.37 : Asservissement d'un système par un correcteur intégral

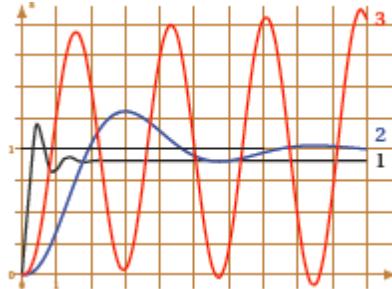


Figure 5.38 : Réponses du système avant et après une correction intégrale

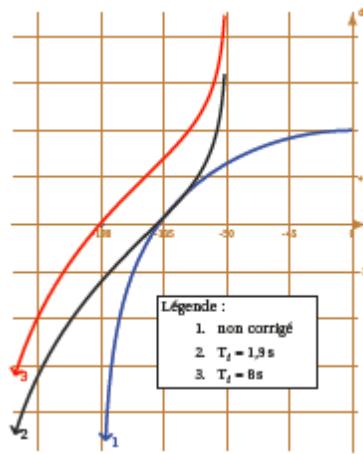


Figure 5.39 : Aback de Black du système avant et après une correction intégrale

Le **correcteur** apporte une **intégration** dans la **chaîne de commande**. Cette **intégration** dans la **FTBO** permet **d'annuler l'erreur de position**, l'intérêt principal de ce type de **correcteur** est donc d'améliorer la **précision**. Il introduit malheureusement un **déphasage** de  $-\frac{\pi}{2}$  et risque de donc rendre le **système instable** par **diminution** de la **marge de phase**.

On retrouve ces effets, sur l'exemple des figures 5.38 et 5.39, le **système non corrigé, n'est pas précis**, l'intégration rend le **système précis** mais peut aussi le rendre **instable**. On constate aussi sur la **réponse temporelle** que l'intégrateur diminue le **temps de réponse** du système (**diminution de la bande passante**).

### 5.3.2.2) Correcteur proportionnel intégral pur (PI)

Le correcteur intégrateur idéal (irréalisable) est en général associé au correcteur proportionnel. La loi de commande de ce correcteur est alors de la forme :

$$u(t) = K_P \left( \varepsilon(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)$$

Ce correcteur est une combinaison des correcteurs P et I et il est utilisé en industrie.

$$C(s) = K_P + \frac{K_P}{T_I s} = K_P \left( 1 + \frac{K_I}{s} \right) = K_P \frac{1 + T_I s}{T_I s}$$

**Plus  $T_I$  est grande, plus l'action intégrale est faible.**

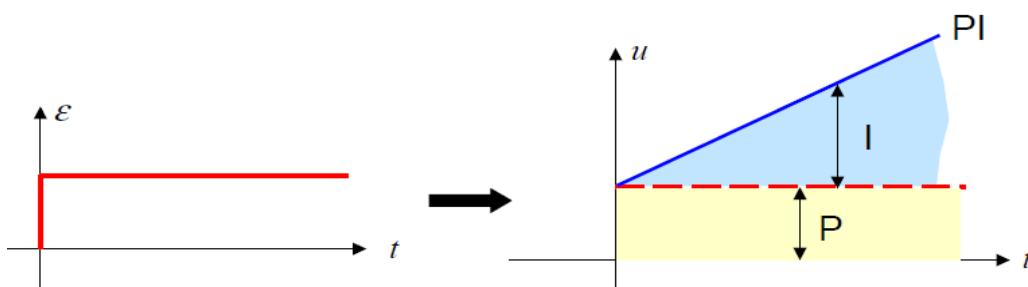


Figure 5.40 : Interprétation graphique des actions proportionnelle et intégrale pour un échelon

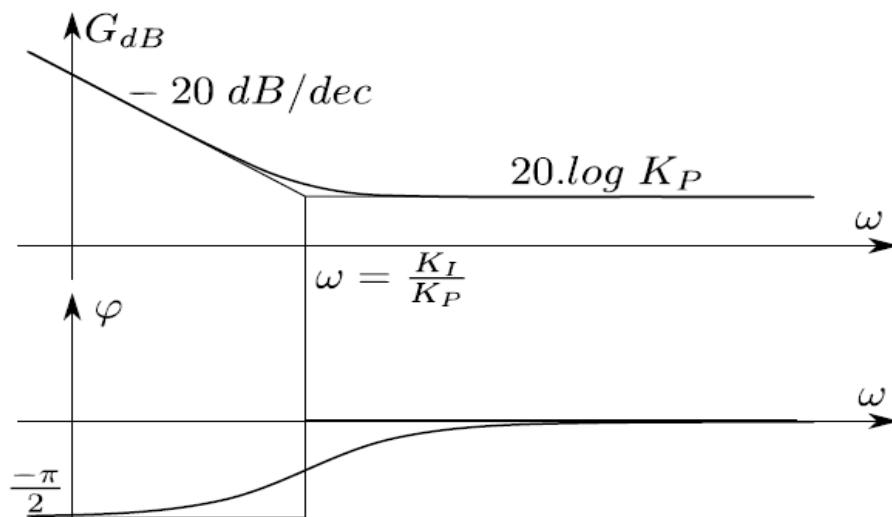


Figure 5.41 : Diagramme de Bode du correcteur proportionnel intégral

Ce correcteur ne diminue plus la phase pour  $\omega \gg \frac{K_I}{K_P}$ . Il amplifie toujours les basses fréquences ce qui assure la précision (voir figure 5.41).

Ce correcteur possède deux paramètres de réglage :

- $K_p$  n'agit que sur le gain, la courbe de gain est translatée en fonction de  $K_p$  ;
- $T_I$  la constante d'intégration agit principalement sur la phase pour les pulsations inférieures  $\frac{K_I}{K_P}$ , les courbes sont translatées le long de l'axe des pulsations.

Les diagrammes de la figure 5.42 montrent l'action du correcteur sur la FTBO. Pour éviter une action néfaste du correcteur sur la marge de phase, il faut choisir  $\frac{K_I}{K_P} \ll \omega_c$ . Par suite, en choisissant  $K_p = 1$ , les marges de stabilité sont peu modifiées.

La précision est augmentée (correcteur de classe 1) sans modifier la stabilité.

Ce correcteur permet de trouver le juste compromis entre stabilité et précision.

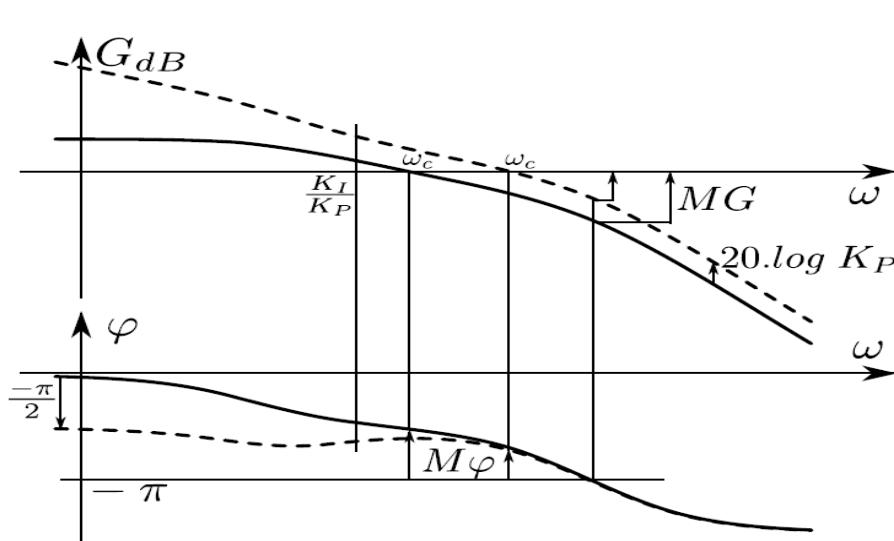


Figure 5.42 : Diagramme de Bode des FTBO corrigée et non corrigée par correcteur proportionnel intégral

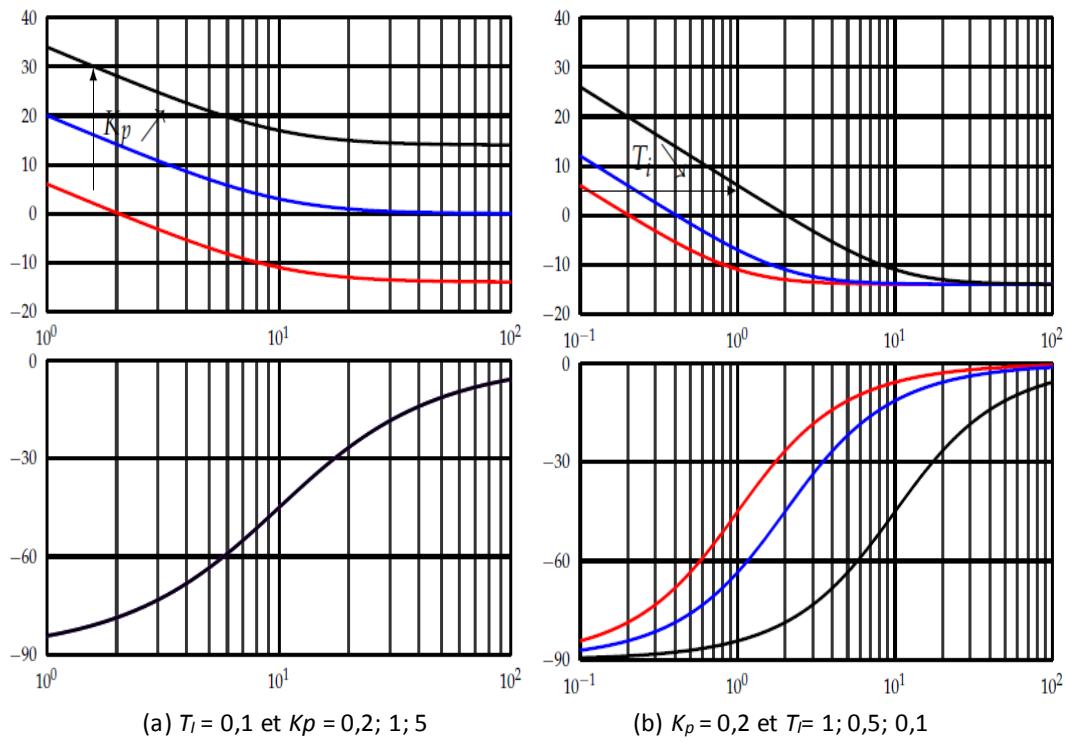


Figure 5.43 : Influence des paramètres  $K_p$  et  $T_I$  (diagramme de Bode du correcteur proportionnel intégral)

Le correcteur P.I. permet donc d'améliorer aussi bien :

- Le comportement statique : par la présence de l'intégration dans la FTBO et le gain en basse fréquences ( $w_c \ll \frac{1}{T_I}$ ) infini  $\rightarrow$  L'erreur statique de position ou erreur indicielle est nulle (système de classe 0).
- Le gain du système corrigé ne sera pas modifié en hautes fréquences si ( $\frac{1}{T_I} \ll w_{c0}$ )  $\rightarrow \omega_{c0}$  ( $\rightarrow$  rapidité) non modifiée
- Le comportement dynamique : le numérateur ( $1 + T_I$ ) apporte une phase positive dans la zone critique, celle-ci permet d'améliorer la marge de phase en pondérant l'effet négatif de l'intégration. La phase du système corrigé n'est modifiée qu'en basses fréquences (au contraire de I). La marge de phase n'est pas modifiée si  $\frac{1}{T_I} \ll w_{c0}$

Un choix judicieux du **gain  $K_p$**  et de la **constante d'intégration  $T_I$**  permet ainsi d'améliorer le **comportement du système** sans trop dégrader la **stabilité** et la **rapidité** comme le montre l'exemple de la figure 5.44.

#### Exemple :

Soit le système asservi suivant :

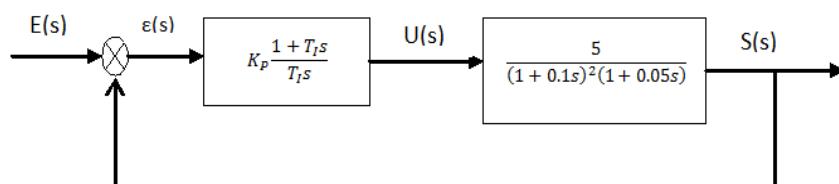


Figure 5.43 : Asservissement d'un système par un correcteur proportionnel intégral

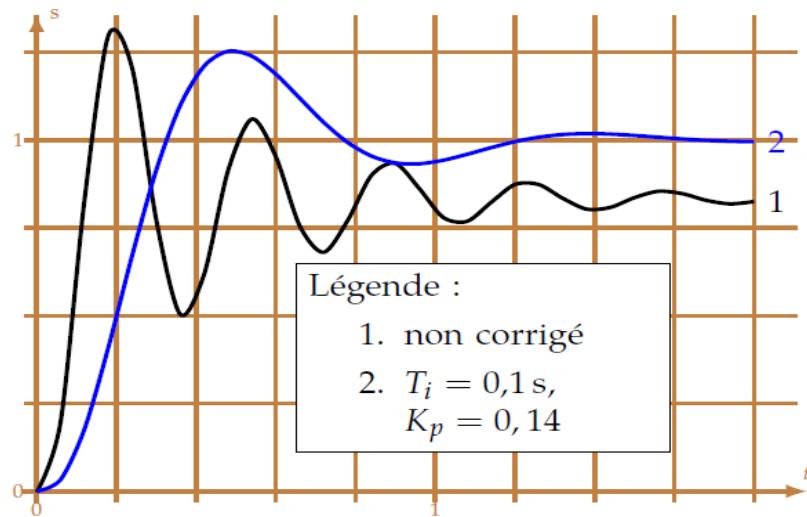


Figure 5.44 : Influence du correcteur PI sur la réponse indicielle du système

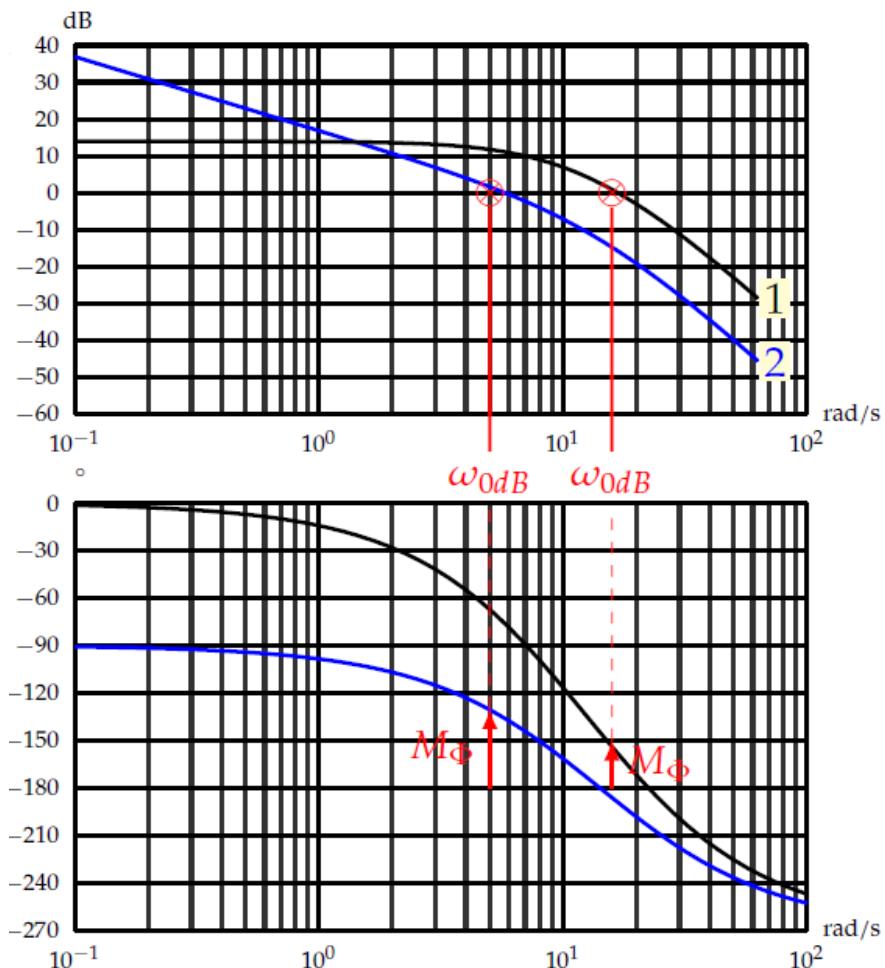


Figure 5.45 : Influence du correcteur PI sur le diagramme de Bode du système

**Exemple :**

Soit le système asservi suivant :

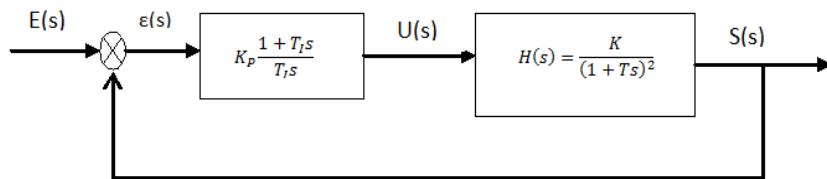


Figure 5.46 : Asservissement du système  $H(s) = \frac{K}{(1+Ts)^2}$  par un correcteur proportionnel intégral

On prend  $T=1$ , le problème c'est comment trouver  $C(s)$  correcteur proportionnel intégral ? Pour un **cahier de charges** : Erreur statique nulle et Marge de phase de  $60^\circ$  avec une bande passante  $[0 w_{c0}]$ .

Pour satisfaire  $m_\varphi=60^\circ$ , on joue sur  $K \rightarrow K=4$ .

Système non corrigé est de classe 0  $\rightarrow$  introduction d'un intégrateur en BO  $\rightarrow$  utilisation d'un correcteur PI.

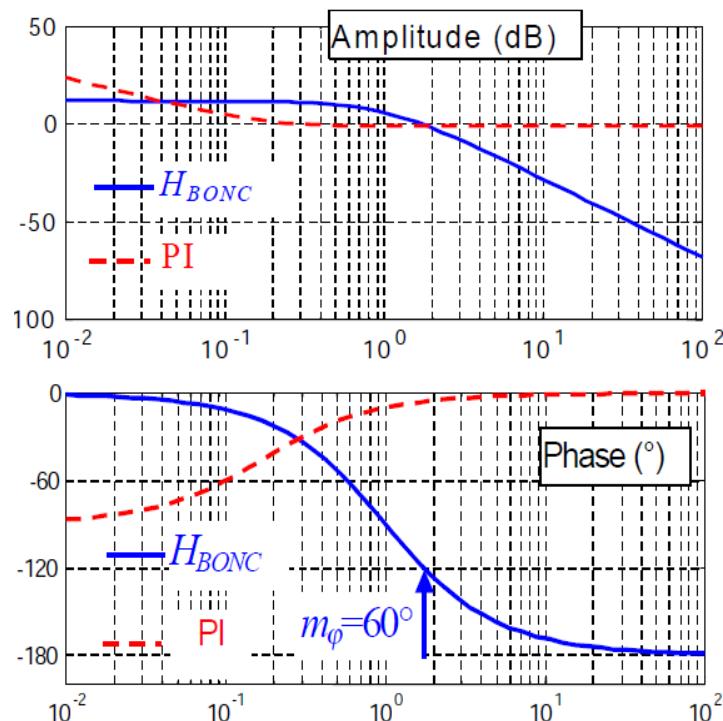


Figure 5.42 : Diagramme de Bode du système corrigé et non corrigé par correcteur PI

**Réglage du correcteur PI :**

Le correcteur PI est placé de façon à ne pas modifier sensiblement la marge de phase  $\frac{1}{T_I} \leq \frac{w_{c0}}{10}$

- Le diagramme de gain de  $H_{BOC}$  a une pente de  $-1$  aux basses fréquences  $\rightarrow$  annulation de l'erreur statique.
- Le correcteur PI a modifié légèrement le réglage de la marge de phase.

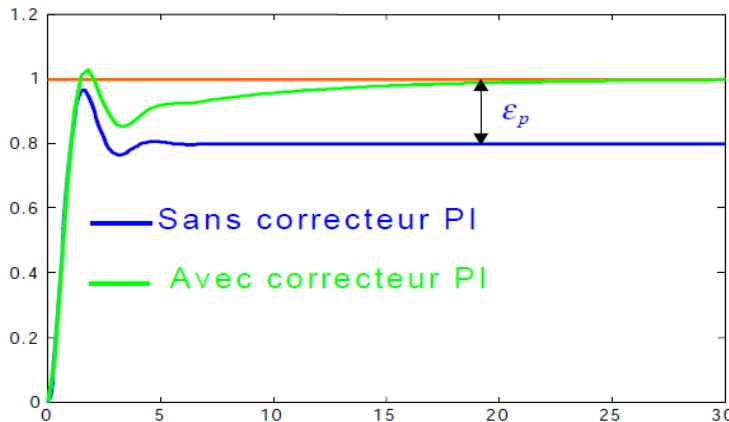


Figure 5.43 : Réponses temporelles du système corrigée et non corrigée par correcteur PI

- Le correcteur PI a annulé l'erreur statique.
- La réponse est lente pour atteindre la valeur de consigne. Pour y remédier, on baisse  $T_i$ , mais cela modifiera le réglage de la marge de phase.

### 5.3.2.3) Correcteur à retard de phase (RP)

Le correcteur à retard de phase est une forme approchée du correcteur PI. Il réalise une action intégrale (augmentation du gain en basses fréquences) sans introduire d'intégrateur.

La fonction de transfert de ce correcteur s'écrit :

$$C(s) = K_p \frac{1+\tau s}{1+\alpha \tau s} \quad \text{Avec : } \alpha > 1$$

En pratique, on choisit  $K_p = \alpha$ , pour améliorer la précision (en amplifiant les basses fréquences) sans toucher au comportement dynamique du système (rapidité et stabilité).

Introduction d'un déphasage négatif d'où le nom de correcteur à retard de phase.

- Le déphasage minimum introduit par le correcteur :

$$\varphi_{min} = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \text{ rad}$$

- pulsation minimale correspondante :

$$\omega_{min} = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$$

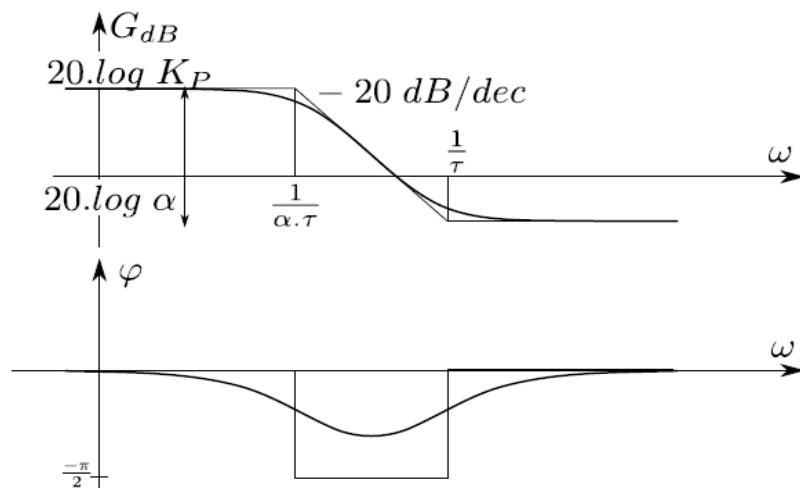


Figure 5.44 : Diagramme de Bode du correcteur à retard de phase

Les courbes de la figure 5.44 montrent que le gain a une asymptote de pente égale à  $-20 \text{ dB/décade}$  et un déphasage maximal  $\varphi_m$  obtenu pour la pulsation  $\omega_m$  correspondant au point d'inflexion de la courbe de gain. Ce correcteur à une action locale, en effet la courbe ci-dessus montre l'existence d'une phase toujours négative, ce qui justifie l'appellation correcteur à retard de phase et qui est généralement peu souhaitable, mais cela intervient dans une bande de fréquence approximativement égale à  $\left[\frac{1}{\alpha\tau}, \frac{1}{\tau}\right]$ .

Ce correcteur ne modifie pas la phase pour  $\omega \ll \frac{1}{\tau}$  et n'amplifie pas infiniment les basses fréquences.

Le minimum de phase est atteint pour  $\omega = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$ .

Les diagrammes de la figure 5.45 montrent l'action du correcteur sur la FTBO. Il faut choisir  $\tau$  à suffisamment basse fréquence pour ne pas diminuer la marge de phase.

On l'utilise surtout pour sa capacité à diminuer le module de la FTBO pour les hautes fréquences. Il doit être manipulé avec précaution, car il peut rendre le système instable. Il est souvent associé à un correcteur à avance de phase. Le correcteur à retard de phase est le correcteur complémentaire du correcteur à avance de phase.

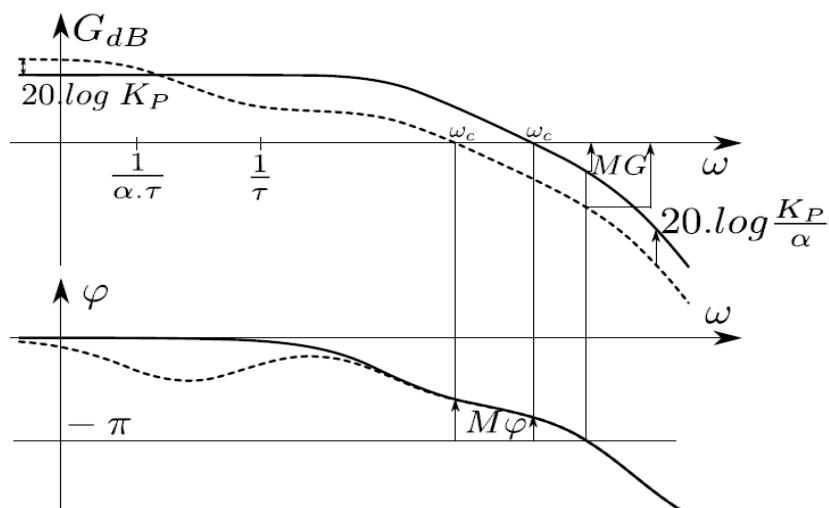


Figure 5.45 : Diagramme de Bode du système corrigée et non corrigée par correcteur à retard de phase

Le choix de  $K_p < \alpha$ , permet d'augmenter les marges de gain et de phase dans une certaine limite (en dégradant toutefois la rapidité). Attention car si  $\alpha$  est trop grand, la marge de phase peut être très mal située.

Il faut remarquer aussi que les basses fréquences ne sont plus infiniment amplifiées, si bien que le système n'est plus "exactement précis".

Les effets apportés par ce correcteur :

- Augmentation du gain en basses fréquences de  $20\log\alpha \rightarrow$  effet intégral  $\rightarrow$  diminution de l'erreur statique en BF (système de classe 0 en BO).
- Diminution de la bande passante à 0dB  $\omega_{co} \rightarrow$  système moins rapide en BF (augmentation de  $t_m$  ou de  $t_{r,5\%}$ )

Pour le réglage de ce correcteur :

- Introduire dans le correcteur un gain  $K'_p$  qu'on calcule pour avoir la marge de phase désirée.
- Calculer  $K_p = \alpha$  pour obtenir la précision imposée

- Choisir la constante de temps  $\tau$  telle que :  $\frac{1}{\tau} \ll w_{co}$  ( $\frac{1}{\tau} \leq 0.1w_{co}$ ) pour ne pas modifier la marge de phase et les performances dynamiques.

### Exemple :

Soit le système asservi donné par sa fonction de transfert en BO :

$$H(s) = \frac{0.3}{s(1+s)(1+0.2s)}$$

On veut régler ce système par un correcteur à retard de phase de manière à assurer une marge de phase  $M\varphi > 60^\circ$  et que l'écart permanent d'ordre 1 (écart en vitesse)  $\varepsilon_1 \leq 0.25$  pour une entrée en rampe de pente  $V_0$ .

=====→

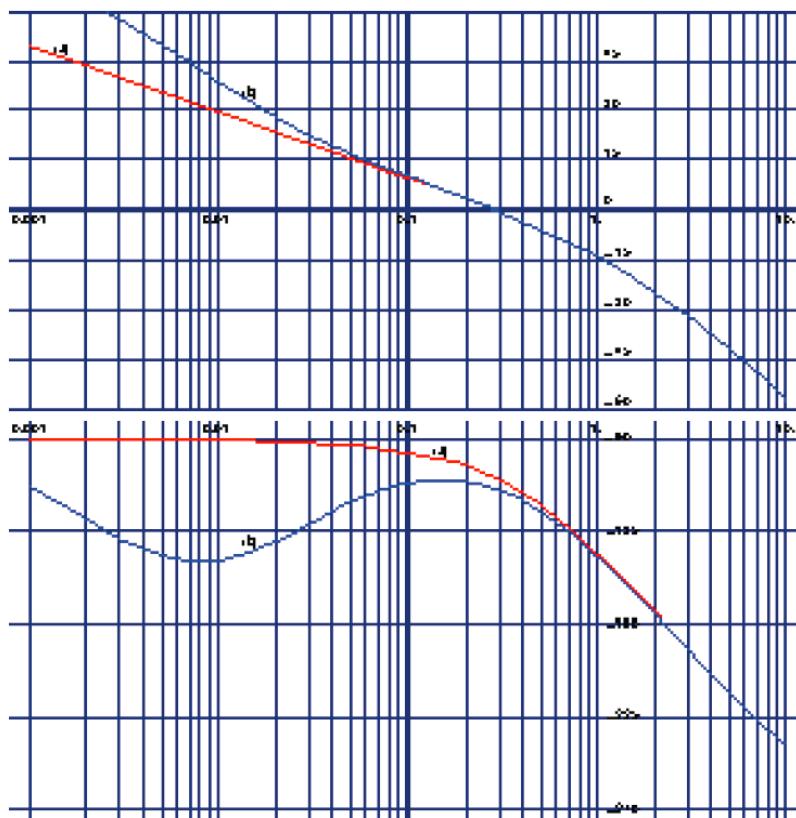


Figure 5.46 : Diagramme de Bode du système corrigée et non corrigée

Sur les courbes du diagramme de Bode (gain et phase), on lit facilement une marge de phase  $M\varphi \approx 70^\circ$ , une marge de gain de 26 dB et une bande passante  $w_c = 0.285$  rad/s.

L'erreur de position est obtenue par la relation  $e_p = \frac{1}{K_{BO}}$ . Pour obtenir cette erreur permanente en

ajustant le gain statique de la fonction de transfert en boucle ouverte il faudrait que celui-ci soit supérieur ou égal à 4, mais

dans ce cas on serait amené à réduire de manière trop importante la marge de phase  $M\varphi$ .

Il faut donc augmenter le gain statique de la fonction de transfert, pour les basses fréquences uniquement, et

garder le même gain statique pour les pulsations voisines de  $w_c$ .

On utilise un correcteur à retard de phase, de fonction transfert  $C(s) = K_P \frac{1+\tau s}{1+\alpha \tau s}$ .

On détermine ses coefficients de la manière suivante :

- l'erreur statique est donnée dans ce cas par la relation  $\frac{1}{K_{BO}} < 0.25$ ;
- la marge de phase obtenue précédemment reste supérieure à  $65^\circ$ ;
- la bande passante soit conservée à la valeur actuelle.

Sur le diagramme de BODE du correcteur à retard de phase, on constate : pour une pulsation égale à 10 fois la pulsation correspondant au maximum de déphasage, la diminution de phase est voisine de  $5^\circ$ . En conséquence il suffit de placer ce maximum une décade avant la pulsation de coupure que l'on souhaite conserver.

Le coefficient  $\alpha$  est donc égal à :  $\alpha = \frac{4}{0.33} = 13.33$ .

On prend :  $K_p = \alpha$ .

La constante de temps du correcteur doit vérifier :  $\frac{1}{\tau} = \frac{w_c}{10} \rightarrow \tau = 35.1s$

La fonction de transfert du correcteur s'écrit sous la forme :  $C(s) = 13.33 \frac{1+35.1s}{1+468s}$ .

### 5.3.3) Correcteur Dérivé (D)

#### 5.3.3.1) Correcteur Dérivé pur (D)

Soit l'asservissement par un correcteur Dérivé suivant :

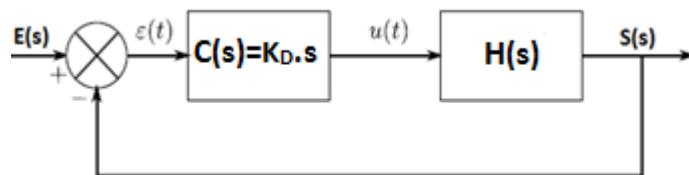


Figure 5.40 : Asservissement par un correcteur Dérivé

Pour un **dérivateur pur** ou **idéal**, la loi de **commande**  $u(t)$  est de la forme :

$$u(t) = T_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \rightarrow U(s) = K_D \cdot s \cdot \varepsilon(s) \quad (5.24)$$

$T_D$  : **Constante de temps de dérivation**.

Le **correcteur dérivateur idéal** est un **correcteur** purement théorique qui ne peut exister réellement (n'est pas **réalisable électroniquement**), en effet le **gain** de ce **correcteur** est **infini** lorsque la **pulsation** tend vers l'infini. Il ne respecte pas le **principe de causalité** (degré du **numérateur** est supérieur à celui du **dénominateur**). Néanmoins, il existe des **correcteurs** approchant, permettant d'avoir un **effet dérivé** (**correcteur dérivateur**).

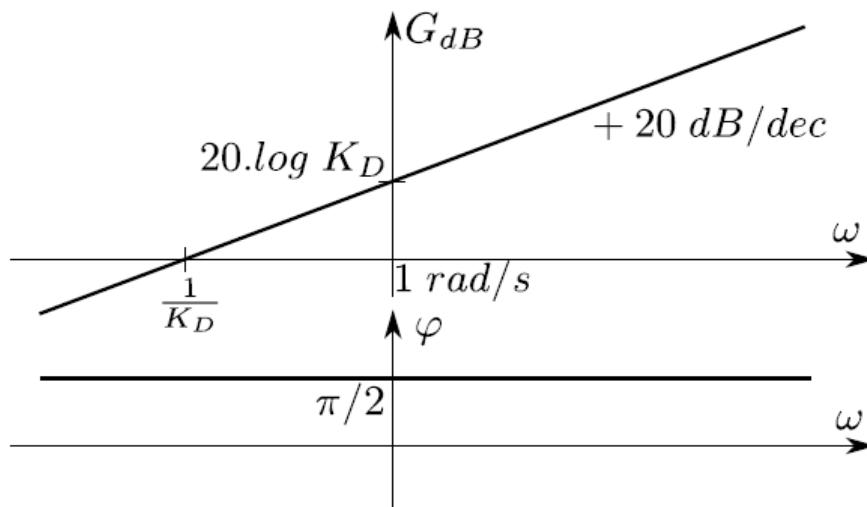


Figure 5.41 : Diagramme de Bode du correcteur dérivateur

Le **gain** et la **phase** de ce **correcteur** sont respectivement **+20 dB/décade** et  $\frac{+\pi}{2}$ .

Le correcteur dérivé

L'objectif de ce **correcteur** est d'ajouter un **zéro nul** à la **fonction de transfert en boucle ouverte**.

L'effet de l'introduction de ce **correcteur** dans la **boucle de commande** apporte donc une avance de phase de  $\frac{+\pi}{2}$  pour les basses fréquences, a un effet stabilisant en augmentant la marge de phase et diminue le **temps de montée** donc il a tendance à **accélérer** le **système en boucle fermée**.

Par ailleurs il agit aussi sur les autres **performances** du système.

Ce **correcteur** peut :

- **Augmenter la phase** de  $\frac{\pi}{2}$  ce qui améliore fortement les **marges de stabilité** et par la suite, ce **correcteur** peut avoir deux effets différents :
  - Si le **système** possède un **ordre élevé**, le **déphasage** peut tendre vers des **valeurs négatives importantes**, donc la **remontée de la phase** peut être sans effet sur l'amélioration de la **marge de phase**, voir la **dégrader** et même parfois rendre le **système instable**.
  - Si l'**ordre du système est faible**, la remontée de **phase** peut se traduire par une nouvelle courbe qui tend vers une valeur située largement au dessus de  $(-\pi)$ .
- **amplifier les hautes fréquences** (et entre autres les **bruits** !), en dégradant le **comportement** du système,
- réduire le nombre d'**intégrations** dans la **chaîne directe** (et donc **dégrade la précision** et **l'insensibilité aux perturbations**),
- L'**action de ce correcteur** sur la **FTBO** est donnée en figure 5.42. On observe que cette correction **augmente les marges de stabilité** tout en **augmentant la rapidité**.

La **fonction de transfert** du **système corrigé** est donnée :

$$H_{BOC}(s) = FTBO'(s) = K_D \cdot s \cdot H(s) \rightarrow \begin{cases} G'_dB = 20\log K_D + 20\log w + G_{dB} \\ \varphi' = \arg\left(\frac{K_D}{jw}\right) + \arg(H(s)) = \varphi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (5.25)$$

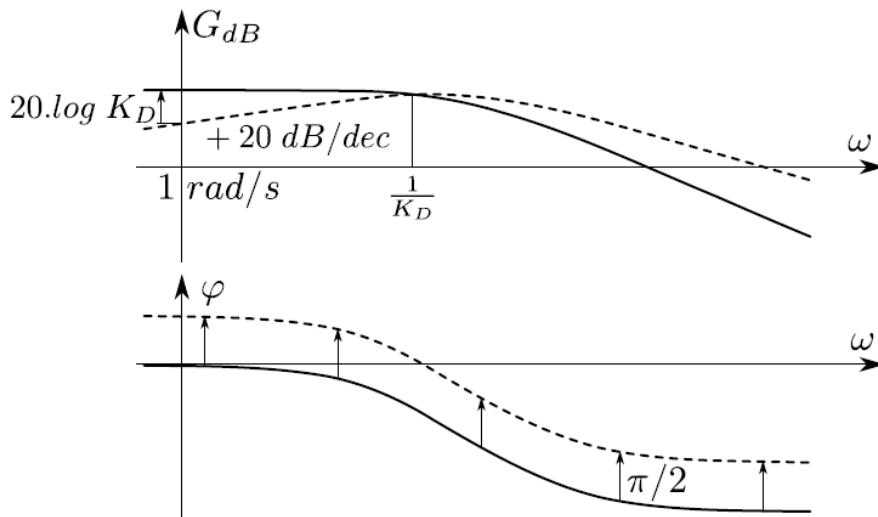


Figure 5.42 : Diagramme de Bode des FTBO corrigée et non corrigée par un déivateur

La présence d'un **déivateur** annule l'effet d'un **intégrateur (diminution de la classe)**, et rend ainsi le **système moins précis**. Ce dernier inconvénient impose l'utilisation conjointe d'un autre **correcteur**.

### 5.3.3.2) Correcteur Dérivé réel (D)

Le **correcteur déivateur idéal** est un **correcteur purement théorique**, son **gain est infini** lorsque la **pulsation** tend vers l'**infini** et il ne respecte pas le principe de **causalité** (le **degré du numérateur** est **supérieur** à celui du **dénominateur**).

Les circuits électroniques (à base d'amplificateurs opérationnels) permettent de réaliser une forme approchée du ce **correcteur déivateur** :

$$C(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{T_D \cdot s}{1 + \tau s} \text{ avec : } \tau \ll T_D$$

Le circuit se comporte comme un **déivateur pur** pour des **pulsations inférieures** à  $\omega_{lim}$  :  $\omega_{lim} \ll \frac{1}{\tau}$ .

Le **correcteur déivateur** apporte une **avance de phase** de **+90°** pour les **basses fréquences**. Il a un effet stabilisant en augmentant la **marge de phase**. Le **correcteur déivateur** ne s'utilise jamais seul, car il dégrade la **précision** en diminuant la **classe du système**.

### 5.3.3.3) Correcteur Proportionnel Dérivé (PD)

Reprendons l'**asservissement** de la figure 5.40, en changent seulement le **correcteur** par un **correcteur proportionnel déivateur**.

Pour un **déivateur PD**, la loi de **commande**  $u(t)$  est de la forme :

$$u(t) = K_P \varepsilon(t) + K_P T_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \rightarrow U(s) = (K_P + K_P T_D s) \cdot \varepsilon(s) = (K_P + K_D s) \cdot \varepsilon(s) \quad (5.26)$$

$T_D$  : **constante de dérivation**, plus cette constante est grande, plus l'**action dérivée est importante**.

$$K_D = K_P T_D$$

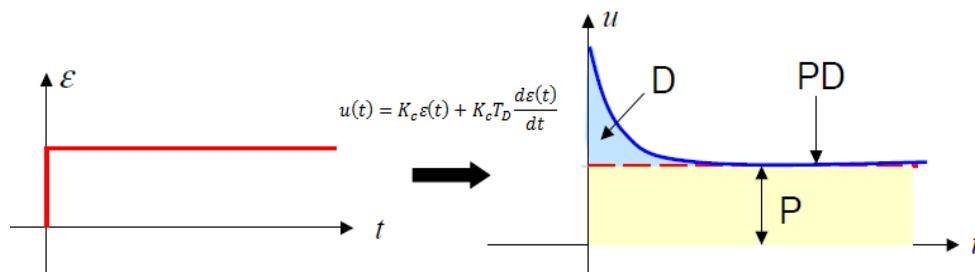


Figure 5.43 : Interprétation graphique des actions proportionnelle et Dérivé pour un échelon

La commande est proportionnelle à l'erreur et à la variation de l'erreur.

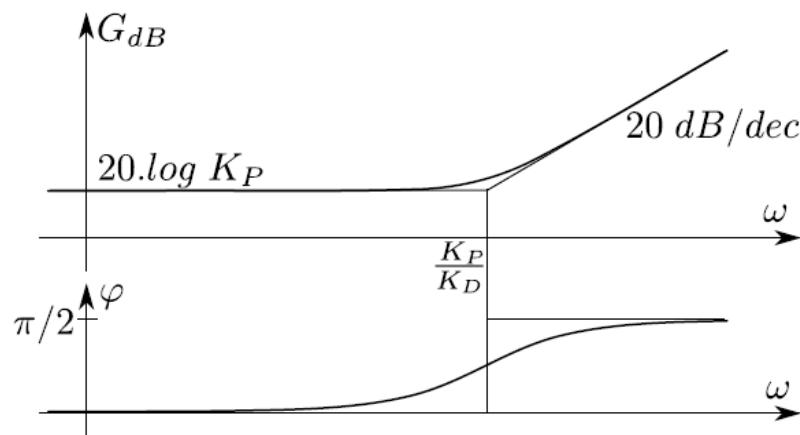


Figure 5.44 : Diagramme de Bode du correcteur proportionnel dérivateur (PD)

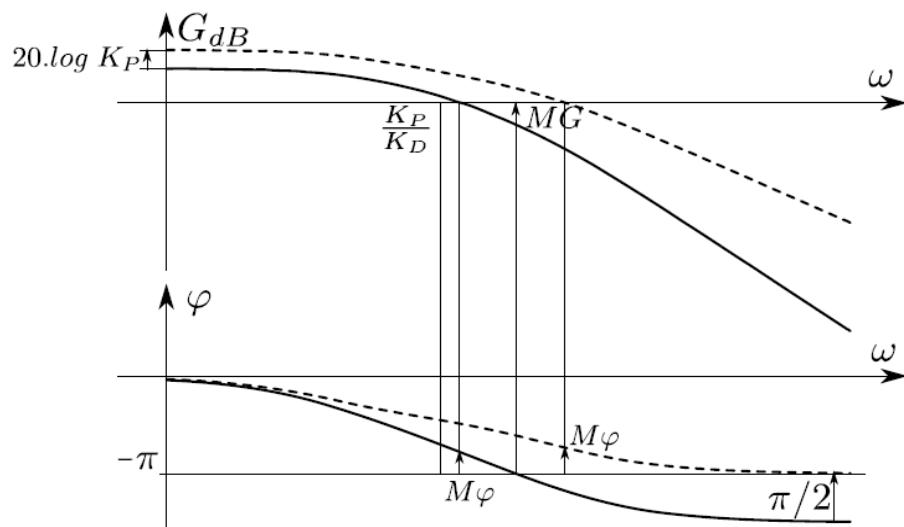


Figure 5.45 : Diagramme de Bode des FTBO corrigée et non corrigée par un correcteur proportionnel dérivateur idéal (PD)

Les figures 5.44 et 5.45 montrent que ce correcteur :

- augmente la phase de  $\frac{\pi}{2}$  pour  $\omega \gg \frac{K_p}{K_d}$ , => amélioration de la stabilité (marge de phase).

- amplifie les **hautes fréquences** et en particulier les **bruits** de mesure (**sensibilité aux bruits**) dès qu'ils correspondent à des **pulsations supérieures** à sa **pulsation de cassure** => **élargissement de la bande passante en BF**,
- augmente les **marges de stabilité** tout en augmentant la **rapidité** –c.à.d.  $t_{r,5\%}$  et  $t_m$  diminuent- (la **pulsion du coupure**  $w_{co}$  augmente),
- permet d'obtenir une **précision statique** identique un **système** plus **stable** par **apport de phase** ;
- **ne réduit pas** le nombre **d'intégrations** dans la **chaîne directe**,
- n'est toujours pas **réalisable** physiquement car le **degré** du **numérateur** est **supérieur** à celui du **dénominateur** ! Il ne respecte pas le principe de causalité.

À la différence du **correcteur proportionnel intégral**, qu'il suffisait de placer à suffisamment **basse fréquence** pour qu'il ne modifie pas le **comportement dynamique**, ce **correcteur** est beaucoup plus délicat à dimensionner car pour être efficace, il doit agir là où sont mesurées les **marges de stabilité**. En effet, si la **pulsion de cassure** est trop haute (**plus haute que la pulsation de coupure de la FTBO non corrigée**), l'**apport de 90° de phase à haute fréquence** n'améliore pas pour autant la **marge de phase**. Si la **pulsion de cassure** est trop **basse**, la **pente** du **diagramme de Bode des gains** de la **FTBO corrigée** est plus faible que celle **non corrigée** aux alentours de la **pulsion de coupure**, ce qui reporte la nouvelle **pulsion de coupure** à une **fréquence** beaucoup **plus haute** et **annule** le **avantage des 90° de phase**.

Il faut donc **ajuster la pulsation de cassure** juste au niveau des **fréquences de mesure des marges**. Les figures 5.46 et 5.47 montrent un **système non corrigé** (trait continu), **corrigé** par une **correction proportionnelle dérivée optimale** (trait pointillé ; pulsation de cassure à 4 Hz) et **corrigé** par deux **corrections proportionnelle dérivée** dont les **pulsations de cassure** sont juste avant (2 Hz) et juste après (8 Hz) la **valeur optimale** (traits mixtes).

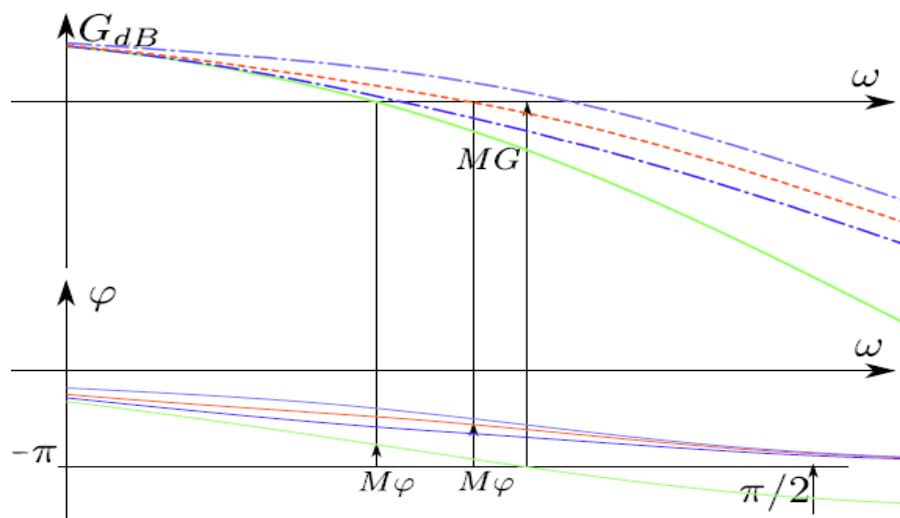


Figure 5.46 : Diagramme de Bode des FTBO corrigée et non corrigée d'un système par un correcteur proportionnel déivateur idéal (PD) bien réglé

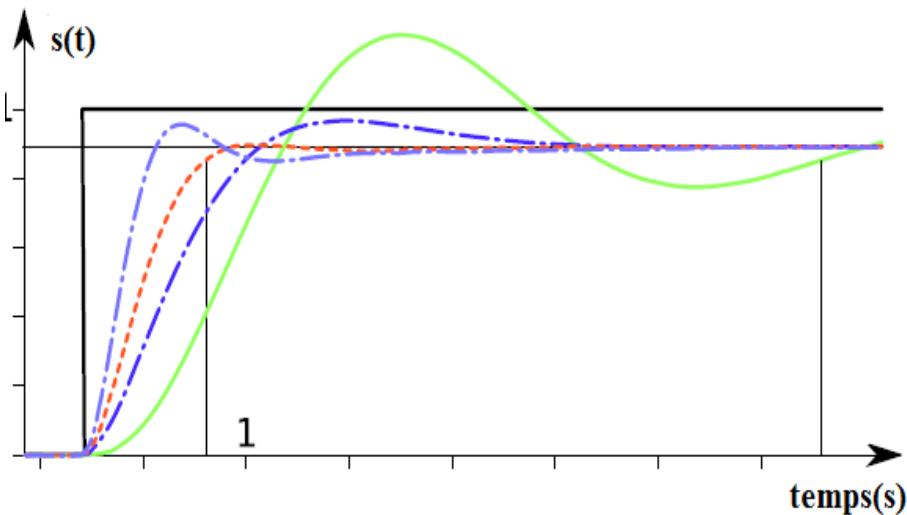


Figure 5.47 : Réponses indicielles pour différents réglages du correcteur proportionnel déivateur idéal (PD)

On remarque bien que le point de mesure de la **marge de phase** varie sensiblement. Le **réglage optimal** conduit à une **FTBF sans résonnance** tandis que les **réglages moins optimaux** présentent **une résonnance**. Les **réponses indicielles** confirment les **observations** dans le **domaine fréquentiel**. De part et d'autre du **réglage optimal**, un **dépassement** sensible est observé (même si la qualité globale est améliorée par rapport au **système non corrigé**).

Généralement pour le **réglage**, on doit :

- Régler  $K_p$  pour avoir  $\omega_{co}$  imposé,
- Régler  $T_d$  ou  $K_d$  pour avoir  $m_\phi$  imposée,
- Vérifier a posteriori  $\omega_{co}$  et  $m_\phi$ .

Comme le **déivateur idéal**, il ne peut exister de même un tel **correcteur (PD) idéal** ne peut aussi exister pour les raisons citées précédemment.

#### 5.3.3.4) Correcteur à Avance de Phase (AP)

Le **correcteur à avance de phase** est une **forme approchée** du **correcteur PD** qui est physiquement **irréalisable** (condition de **causalité** non vérifiée). Il ne réduit pas le nombre **d'intégrations** dans la **chaîne directe**. La fonction de transfert de ce correcteur s'écrit :

$$C(s) = K_p \frac{1+\alpha s}{1+\tau s} \quad \text{Avec : } \alpha > 1$$

**Remarque :** si  $\alpha$  est très grande on retrouve un **correcteur proportionnel déivateur réel**.

Introduction d'un **déphasage positif** d'où le nom de **correcteur à avance de phase**.

- **Le déphasage maximal** (la cloche) introduit par le **correcteur** :

$$\varphi_{max} = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \text{ rad}, \varphi_{max} > 0$$

- **pulsation correspondante** :

$$\omega_{max} = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$$

C'est un **correcteur réalisable** de type **passe-haut**, provoque un **déphasage** de  $\varphi_{max}$  et donne un **gain fini aux hautes fréquences**.

Ces **contraintes** peuvent être satisfaites par l'introduction d'un tel **correcteur** :

- Augmentation de la **marge de phase** (comme l'indique le nom du **correcteur**).
- Augmentation de la **bande passante** (augmentation de la **rapidité** càd **diminution de  $t_r$** ).
- **Erreurs en régime permanent imposées.**

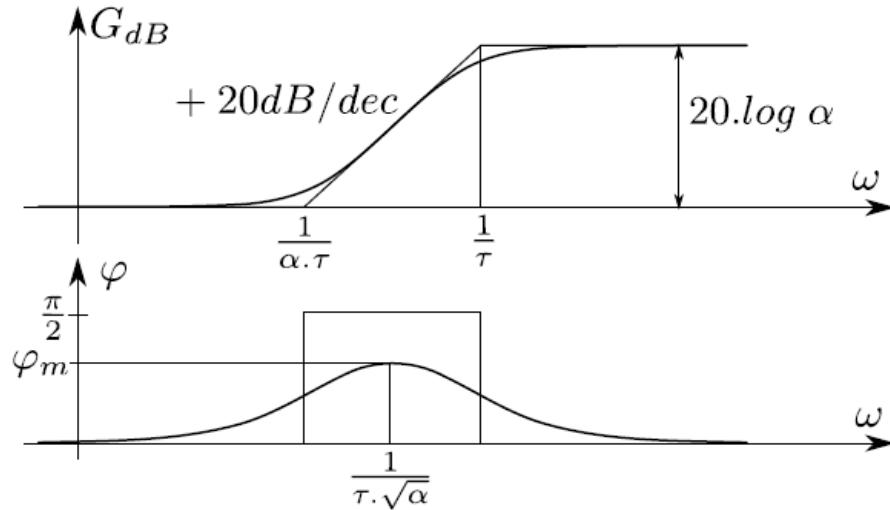


Figure 5.48 : Diagramme de Bode du correcteur proportionnel déivateur (PD)

La figure 5.48 montre que le **maximum de phase** est atteint pour  $\omega = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$  et que ce **correcteur réalisable** qui n'a qu'une **action locale**, permet :

- **D'augmenter la phase** de  $\frac{\pi}{2}$  pour  $\frac{1}{\alpha\tau} < \omega < \frac{1}{\tau}$ .
- De **n'amplifier pas les hautes fréquences** mais risquer d'avoir une **sensibilité aux bruits** à cause de **l'élargissement de la BP**.
- Une **Augmentation de la marge de stabilité** à cause de **l'action de dérivation**.
- Une **Augmentation de la bande passante** à 0dB  $\omega_c$  ce qui rend le système plus rapide en BF (diminution de  $t_m$  ou de  $t_{r,5\%}$ ).

Tout comme le **correcteur proportionnel dérivé**, le **correcteur à avance de phase** est complexe à régler car il doit être placé dans la gamme de fréquence où sont mesurées les marges. Il y a donc une inter-dépendance forte des paramètres. On peut proposer par exemple la méthode classique suivante :

- Calculer  $\alpha$  pour avoir l'**avance de phase** désirée  $\varphi_{max} = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ .
- Calculer  $\tau$  de façon à placer la cloche à la pulsation  $\omega_{co}$  désirée c.à.d. :  $\omega_{max} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} = \omega_{co}$ .
- Le gain fréquentiel est augmenté de  $20\log\alpha$  à partir de  $\omega=10/\tau$ . Ceci décale la pulsation  $\omega_{co}$  du système corrigé en BO.
- Calculer  $K_p$  pour ramener  $\omega_{co}$  à la bonne valeur (de manière à obtenir un gain de la boucle ouverte corrigée égal à 1 pour la pulsation  $\omega_{co}$ ).

Il est en général associé à un correcteur P.I. qui assure la précision, le correcteur à avance de phase va permettre de diminuer les effets négatifs du correcteur P.I. (oscillations) en augmentant la marge de phase.

#### Exemple :

Soit le système asservi donné par sa fonction de transfert en BO :

$$H_{BO NC}(s) = \frac{K}{s(1 + Ts)}$$

On veut régler ce système par un correcteur à avance de phase.

La fonction de transfert du système en BO corrigée est donnée par :

$$H_{BOC}(s) = C(s)H_{BONC}(s) = K_P \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} \frac{K}{s(1 + Ts)}$$

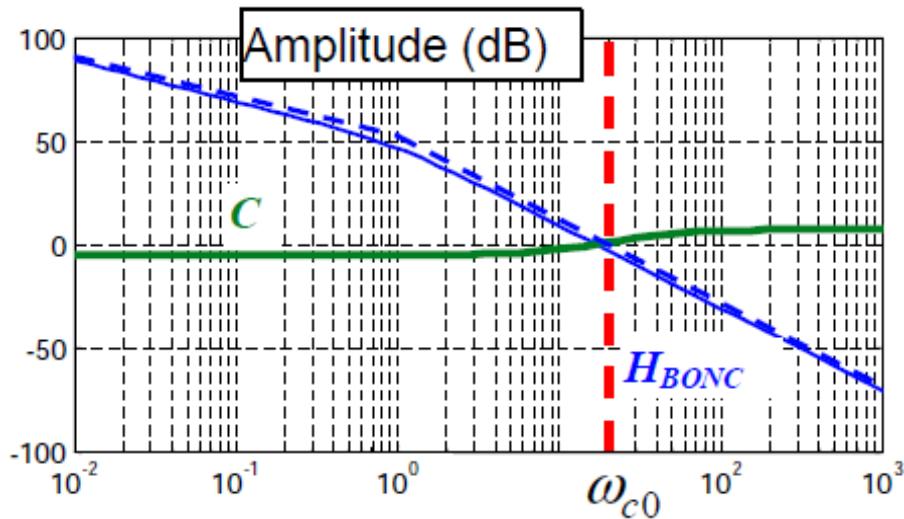


Figure 5.49 : Diagramme de Bode du système non corrigé (gain)

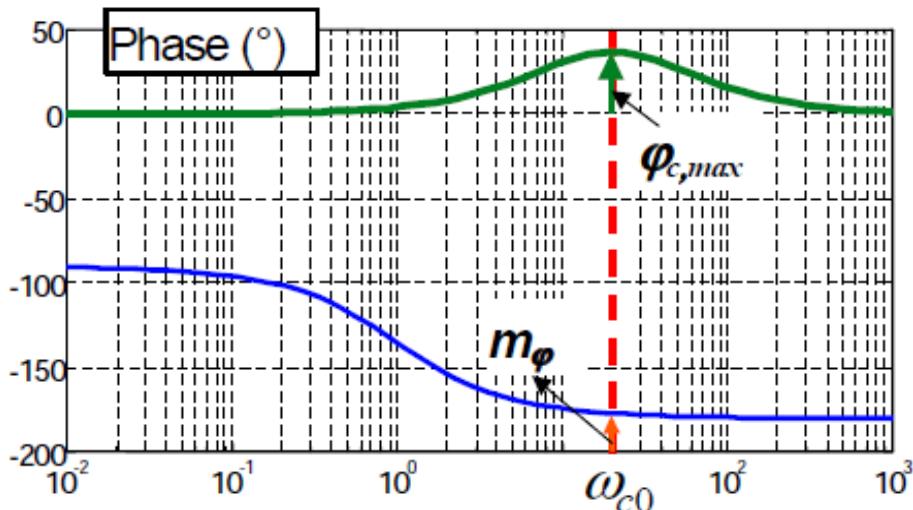


Figure 5.50 : Diagramme de Bode du système non corrigé (phase)

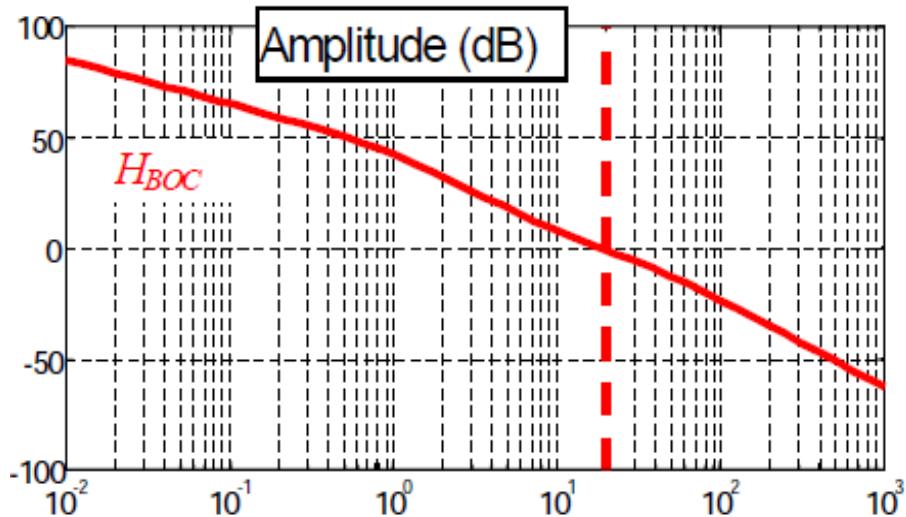


Figure 5.51 : Diagramme de Bode du système corrigé (gain)

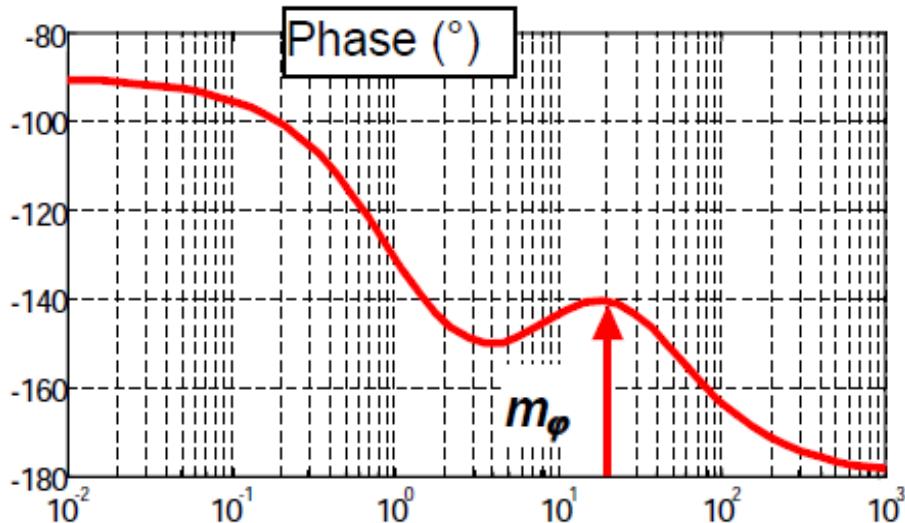


Figure 5.52 : Diagramme de Bode du système corrigé (phase)

### Exemple :

Soit le système asservi donné par sa fonction de transfert en BO :

$$H_{BONC}(s) = \frac{0.5}{s(1+s)(1+2s)}$$

On veut régler ce système par un correcteur à avance de phase de manière à assurer une marge de phase minimale  $M\phi_{min}$  de  $45^\circ$  et un écart statique permanent  $\epsilon_0 = 0$ .

==>

On corrige ce processus par un correcteur à avance de phase de la forme :  $C(s) = K_P \frac{1+a\tau s}{1+\tau s}$

$$H_{BOC}(s) = K_P \frac{1+a\tau s}{1+\tau s} \frac{0.5}{s(1+s)(1+2s)}$$

Le problème c'est de trouver les paramètres du correcteur satisfaisant le cahier de charges imposé !?

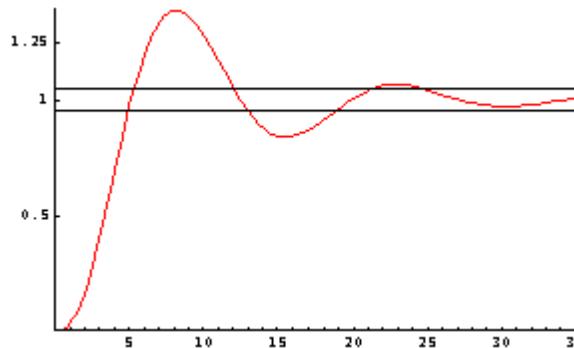


Figure 5.53 : Réponse indicielle du système non corrigé

Sur la réponse indicielle du système non corrigé (figure 5.53), le temps de réponse est égal à 24.6s, valeur trop importante pour le cahier des charges imposé.

Généralement on peut approcher, au voisinage de la bande passante, un système quelconque par un système de 2<sup>ème</sup> ordre et par la suite on utilise les caractéristiques établies pour ce type des systèmes. Les résultats sont bien sûr approchés, mais ils permettent d'obtenir des valeurs initiales. Le cahier des charges impose une marge de phase de 45°, pour un 2<sup>ème</sup> ordre cette marge correspond à un coefficient d'amortissement  $\xi$  voisin de 0.4. Cette valeur permet, connaissant le temps de réponse souhaité, de déterminer la valeur de la pulsation propre par la relation :

$$tr, 5\% = -\frac{0.05\ln(\sqrt{1 - \xi^2})}{\xi w_0}$$

Ce qui impose un  $w_0$  voisin de 0.65rad/s, en conséquence on choisit une bande passante de 0.8rad/s. Le déphasage pour une bande passante de 0.8rad/s est égal à -187°, il faut donc ajouter par le correcteur à avance de phase  $\varphi_m = 52^\circ$ . On en déduit la valeur du coefficient « $\alpha$ » par la relation suivante :

$$\alpha = \frac{1 + \sin(\varphi_m)}{1 - \sin(\varphi_m)} \approx 8.45$$

On place le maximum d'apport de phase au niveau de la bande passante d'où la valeur de la constante de temps du correcteur :  $\frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} = w_0 \rightarrow \tau = 0.43$ .

Les coefficients  $\alpha$  et  $\tau$  déterminés permettent d'obtenir la marge de phase souhaitée pour une bande passante de  $\omega_{BP} = 0.8$ rad/s, mais il faut ajuster par le coefficient  $K_p$  la courbe de gain pour obtenir la marge de phase.

Tableau 5.1 : Caractéristiques des systèmes non corrigé et corrigé

	Système non corrigé	Système corrigé
Constante de temps du correcteur en s	0	0.43
Coefficient $\alpha$ du correcteur		8.45
Gain du correcteur		1.33
Bandé passante en rad/s	0.375	0.8
Marge de gain en dB	9.15	109
Marge de phase en °	instable	45
Coefficient d'amortissement	0.287	0.456
Temps de réponse à 5% en s	24,6	8,1

### 5.3.4) Correcteur à retard-avance de phase

Dans certaines applications, on peut avoir besoin d'augmenter localement le gain aux basses fréquences pour améliorer la précision tout en apportant de la phase au voisinage de la pulsation de coupure. Pour obtenir ce type de comportement, on fait se succéder un correcteur à retard de phase placé en basse fréquence et un correcteur à avance de phase centré sur la pulsation de coupure.

Ce correcteur combine donc le correcteur à retard de phase et celui à avance de phase. De même, il combine aussi les avantages des correcteurs à avance de phase et à retard de phase. On l'utilise pour améliorer la marge de phase autour de ce point critique. Correctement placé, il permet d'augmenter la bande passante et donc la rapidité du système à corriger.

$$C(s) = K_p \frac{1+aT_a s}{1+T_a s} \frac{1+T_r s}{1+bT_r s}$$

Avec  $b > 1$  et  $a > 1$ . On choisit souvent  $a=b$ .

On voit bien sur les diagrammes de Bode (figures 5.54 et 5.55) les propriétés de ce correcteur.

- Pas d'effet sur les basses et hautes fréquences aussi bien pour le gain que pour la phase.
- Il existe une pulsation pour laquelle le gain est fortement diminué sans que l'argument soit modifié.

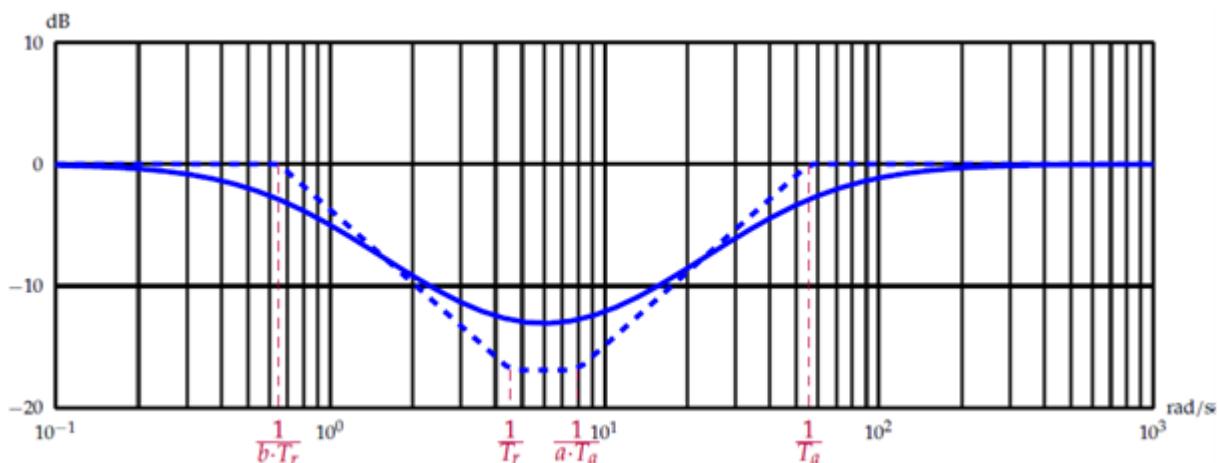


Figure 5.54 : Diagramme de Bode du correcteur à avance-retard de phase (gain)

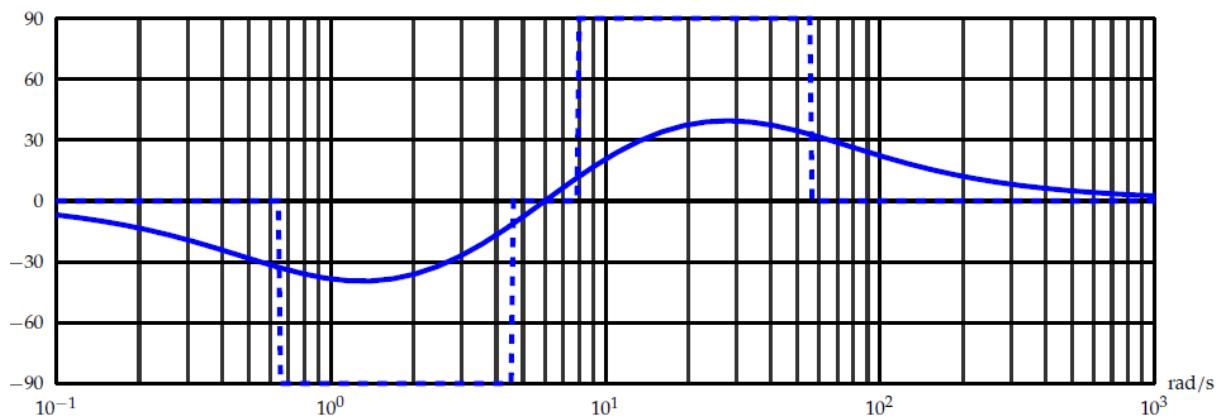


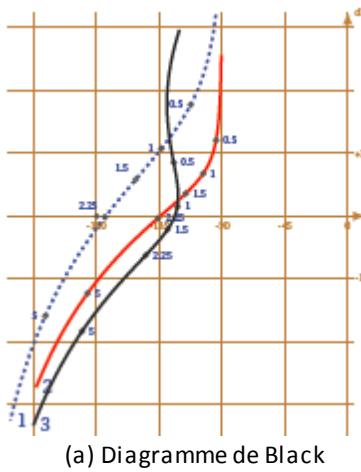
Figure 5.55 : Diagramme de Bode du correcteur à avance-retard de phase (phase)

On remarque sur le diagramme de Black l'effet retard et l'effet avance de phase. L'effet avance de phase est localisé autour de la pulsation de coupure, alors que l'effet retard agit sur des fréquences plus basses.

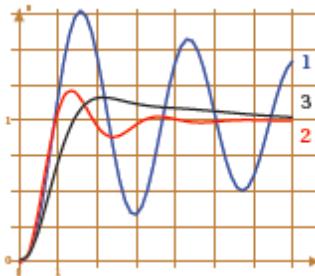
#### Exemple :

Reprends le même exemple traité par le correcteur à avance de phase et en insérant un correcteur à retard-avance de phase avec  $a=b=4.2$ ,  $T_a=0.216$ ,  $T_r=10 T_a$  et  $K_p=1$ .

On constate, sur la réponse temporelle du système corrigé l'effet stabilisant du correcteur et sur le diagramme de Black, l'augmentation de la marge de phase, sans diminuer le gain (par rapport à la correction à avance de phase seule).



(a) Diagramme de Black



(b) Réponse temporelle corrigée

Figure 5.55 : Effets d'un correcteur à avance retard de phase :  
 1. non corrigé, 2. Avance de phase et 3. Retard-Avance de phase

### 5.3.5) Correcteur Proportionnel, Intégrale et Dérivé (PID)

L'inconvénient majeur des **actions correctives élémentaires** est que leur **action** porte sur l'ensemble du **spectre de fréquences de 0 à l'infinie**.

En effet toute **action corrective élémentaire** menée à un endroit précis pour **corriger** une **performance** agit également à d'autres endroits en **dégradant** d'autres **performances**.

Les **correcteurs idéaux**, s'ils existent, devront être caractérisés par une **action localisée** en vue de **corriger** une des **performances**, sans influencer les autres.

A titre d'exemple : *Pour une meilleure précision, il faudrait pouvoir augmenter le gain statique mais uniquement au voisinage des basses fréquences.*

*Pour une meilleure rapidité, il nous faudrait choisir une pulsation de coupure à 0dB un peu plus grande et pour améliorer la marge de phase, l'idéal serait de pouvoir corriger la courbe de phase uniquement au voisinage de la fréquence pour laquelle le gains en dB s'annule.*

Pour atteindre de tels objectifs, une idée consiste à, par exemple, **combiner les correcteurs élémentaires**, c'est ainsi qu'on obtient des **correcteurs plus performants de type PI, PD, PID ou des correcteurs approchés à retard de phase (RP) et à avance de phase (AP)**.

Le **correcteur PID** combine les effets des **correcteurs Proportionnel, Intégrateur et Dérivé**. L'intérêt du correcteur PID est d'intégrer les effets positifs des trois correcteurs élémentaires (C'est le

correcteur le plus utilisé en industrie). La loi de **commande** de ce **correcteur** est donc une combinaison de ces trois fonctions, plusieurs structures sont possibles.

$$u(t) = K_P \varepsilon(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (4.XX)$$



Action proportionnelle



Action intégrale



Action dérivée

Où  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  sont les gains du régulateur qu'il faut identifier afin de satisfaire un certain cahier de charges relatif aux performances souhaitées en boucle fermé.

NOMBREUSES méthodes permettent de déterminer les paramètres du PID, souvent appelées méthodes de réglage.

Ce correcteur a pour effets :

- ⇒ Avance de phase et amplification en hautes fréquences => Il se comporte comme un PD en hautes fréquences.
- ⇒ Gain infini et retard de phase en basses fréquences => Il se comporte comme PI en basses fréquences.
- ⇒ Fréquences moyennes : peu d'influence du correcteur.

Le réglage d'un PID consiste à trouver les coefficients  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  dans le but d'obtenir une réponse adéquate du procédé et de la régulation. L'objectif est d'être stable, rapide, précis et de limiter les dépassemens. Pour voir l'influence des paramètres du PID sur le système, on considère la réponse type d'un système stable :

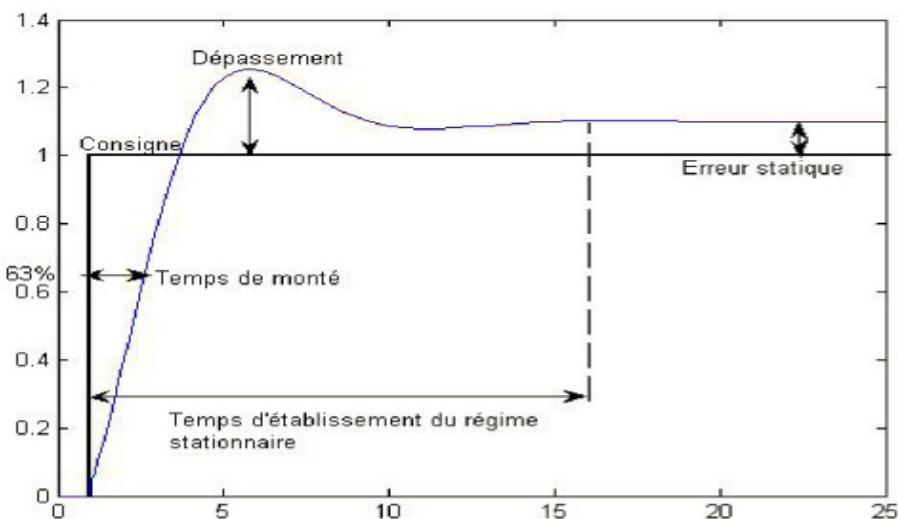


Figure 5.56 : Réponse indicielle type d'un système stable

Les paramètres du correcteur PID influencent la réponse d'un système de la manière suivante :

- Lorsque  $K_P$  augmente, le temps de montée devient plus court mais il y a un dépassement plus important. Le temps d'établissement varie peu et l'erreur statique se trouve améliorée.

- Lorsque  $T_I$  augmente, le temps de montée devient plus court mais il y a un dépassement plus important. Le temps d'établissement au régime stationnaire (temps de réponse) s'allonge mais dans ce cas on assure une erreur statique nulle.
- Lorsque  $T_D$  augmente, le temps de montée change peu mais le dépassement diminue. Le temps d'établissement au régime stationnaire est meilleur. Pas d'influences sur l'erreur statique.

L'analyse du système avec un PID est très simple mais sa conception peut être délicate voir difficile car il n'existe pas de manière unique pour résoudre ce problème

- Il faut trouver des compromis → le régulateur idéal n'existe pas
- En général on se fixe un cahier des charges à respecter sur la stabilité, la précision, le dépassement et le temps de réponse, etc ...

Il n'existe pas de méthode théorique pour le réglage d'un tel correcteur. Il faudra alors utiliser des méthodes empiriques. Les méthodes de réglage les plus utilisées sont :

- La méthode de Ziegler-Nichols.
- La méthode de Halman.
- La méthode de Naslin.
- La méthode du lieu de Nyquiste inverse.
- La méthode de Cohen-Coon, ... etc.

La méthode la plus répandue est la méthode de Ziegler-Nichols, qui présente toutefois l'inconvénient d'être agressive. Elle se fait sur un système qui supporte les dépassements. Elle consiste à faire un essai de «pompage» sur le système en boucle fermée : en augmentant progressivement le gain, on recherche la valeur pour laquelle le système entre en oscillations permanentes. On relève alors le gain limite  $K_{plim}$  et la période des oscillations  $T_{osc}$

Les valeurs à injecter dans les correcteurs sont alors résumées dans le tableau 5.2, cette méthode de **Ziegler-Nichols** consiste donc à :

1. Boucler le système avec un correcteur proportionnel pur.
2. Augmenter progressivement le gain du correcteur proportionnel jusqu'à l'apparition d'oscillations non amorties.
3. Relever le gain limite  $K_{lim}$  qui a provoqué les oscillations et mesurer leur période  $T_{osc}$ .
4. Identifier les paramètres des correcteurs P, PI ou PID à l'aide du tableau ci-dessous :

Tableau 5.2 : Identification des paramètres du correcteur PID par Ziegler-Nichols

Correcteur	P	PI	PID
$K_P$	<b>0.5K<sub>lim</sub></b>	<b>0.45K<sub>lim</sub></b>	<b>0.6K<sub>lim</sub></b>
$T_I$		<b>0.83T<sub>osc</sub></b>	<b>0.5T<sub>osc</sub></b>
$T_D$			<b>0.125T<sub>osc</sub></b>