TP N° 2 : Méthode du Plan de Phase

Partie 1 : L'oscillateur de Van der Pol et intégration temporelle

L'oscillateur de Van der Pol est un système non-linéaire du 2ème ordre décrit par l'équation :

$$\ddot{x} + m\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = 0\,,\ m \in R$$

Donner la forme d'état de cet oscillateur en utilisant : $x_1 = x$ et $x_2 = \dot{x}$.

- Trouver les points d'équilibres et déterminer le type (la nature) de chaque point d'équilibre.
- Intégrer l'équation différentielle obtenue à l'aide de la fonction *ode45()* de Matlab ($t \in [0, 25]$).
- Pour chaque valeur de $m \in \{-0.5, 0, 0.5\}$, tracer l'évolution du système dans le plan de phase pour les conditions initiales $x(0) = (0.5, 0)$ et $x(0) = (3, 3)$.

Partie 2 : Méthode des isoclines

L'obtention du plan de phase d'un système peut aussi se faire à partir de la méthode des isoclines. Les isoclines sont l'ensemble des courbes où la pente des trajectoires est constante. On choisit alors une pente constante $a = \dfrac{dx_2}{dx_1}$ pour former avec l'équation de la dynamique $\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, m)\\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, m)\end{cases}$, un système d'équations que l'on résout pour x_2. L'expression obtenue : $x_2 = h(x_1, a, m)$, donne l'isocline de pente a.

- Calculer l'expression analytique $x_2 = h(x_1, a, m)$, prendre $m = 0.5$.
- On choisit pour a les valeurs $a = [-4, -2, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 4]$.
- Utiliser $x_1 = \text{linspace}(-2.5, 2.5, 30)$ pour obtenir un vecteur de 30 valeurs entre -2.5 et 2.5.
- Pour chaque valeur de a et pour chaque valeur de x_1, calculer $x_2 = h(x_1, a, m)$, $c = \cos(\text{atan}(a))$, $s = \sin(\text{atan}(a))$. Puis tracer le segment de droite de pente a entre les points $(x_1 - d \times c, x_2 - d \times s)$ et $(x_1 + d \times c, x_2 + d \times s)$ en utilisant l'instruction : $plot([x_1 - d*c \quad x_1 + d*c], [x_2 - d*s \quad x_2 + d*s])$, $d = 0.1$ (segment de droite de centre (x_1, x_2), de pente a et de longueur $2d$). N'oublier pas d'utiliser les instructions *hold on*, *axis([-2.5 2.5 -2.5 2.5])*.
    - Pour chaque valeur de a, tracer sur la même figure l'isocline correspondante. Pour cela utiliser la commande de Matlab *fplot* (limiter l'axe x entre -2.5 et 2.5).
- Tracer sur la même figure la trajectoire de phase du système pour $m = 0.5$ et $x(0) = (0.5, 0)$.

Partie 3 : Méthode du graphe des pentes (champ des directions)

- Choisir $m = 0.5$.
- Utiliser $x_1 = \text{linspace}(-2.5, 2.5, 20)$ pour obtenir un vecteur de 20 valeurs entre -2.5 et 2.5.
- Utiliser $x_2 = \text{linspace}(-2.5, 2.5, 20)$ pour obtenir un vecteur de 20 valeurs entre -2.5 et 2.5.
- Pour chaque valeur de x_1 et x_2 calculer : f_1, f_2 et le facteur $b = \dfrac{d}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$ (le facteur b est introduit pour avoir des segments de droite (des pentes) de même longueur d). Puis, tracer le vecteur définit par les points (x_1, x_2) et $(x_1 + f_1 \times b, x_2 + f_2 \times b)$ avec $d = 0.2$. Pour cela, on peut utiliser l'instruction : *quiver*(x1, x2, f1*b, f2*b,'MaxHeadSize',1). N'oublier pas d'utiliser les instructions *hold on*, *axis([-2.5 2.5 -2.5 2.5])*.
- Tracer sur la même figure la trajectoire de phase du système pour $m = 0.5$ et $x(0) = (0.5, 0)$.