مقياس فـــــــــــــــــــــــــــــــــــزياء الجسيمات

Physique des Particules:

(4) Modèle des Quarks

M1 Physique Théorique, Département de Physique, Université de Jijel
Année universitaire 2019/2020

Mohamed Sadek ZIDI
mohamed.sadek.zidi@gmail.com

Plan du cours

(1) Hadrons

(2) Groupes $SU(N)$

- Groupe de Lie et Représentations
- Groupe $SU(2)$
- Groupe $SU(3)$

(3) Modèle des quarks

Références

- Introduction à la physique des particules, L. Marleau
- Introduction to elementary particles, David Griffiths
- M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 98 , 030001 (2018)

(1) Hadrons

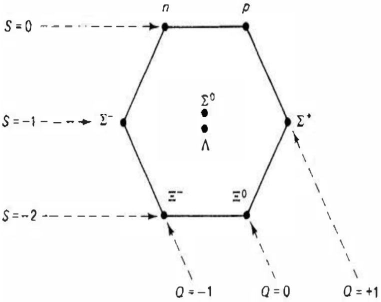
Le modèle des quarks est un schéma de classification des hadrons à partir des quarks de valence qui les constituent, ç.à.d. les nombre quantiques des hadrons sont donnés par les quarks qui constituent les hadrons.

- **Proposé indépendamment par M. Gell-Mann et Y. Ne'eman (1961-1962 et 1964)**
- **Fondé sur le groupe $SU(3)$**
- **Fournit une explication naturelle de l'isospin**
- **Prédiction de l'existence du baryon Ω^- et d'autres hadrons**
- **...**

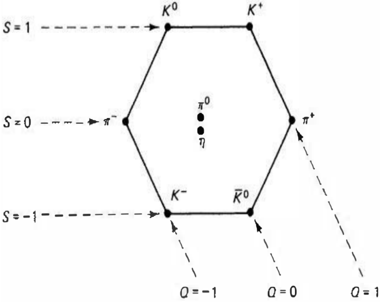
Voie Octuple ou *Eightfold Way*

- La voie octuple proposé par M. Gell-Mann et Ne'eman en 1961
- La voie octuple réarrange les baryons et les mésons selon leurs charge électrique et étrangeté en hexagone, decouplet, ... (représentations irréductibles du groupe $SU(3)$)

- Octet baryonique:

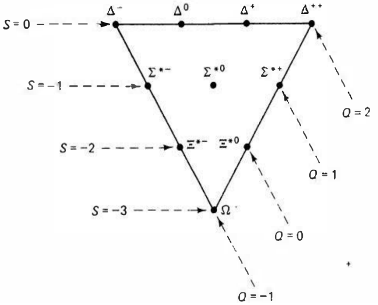


- Octet mésonique:



Découverte du hadron Ω^-

- En 1962, M. Gell-Mann voulait remplir le decuplet par les hadrons nécessaires
- Mais! que 9 hadrons étaient connu à l'époque, il manquait une particule pour remplir le decuplet
- Gell-Mann avait calculé sa masse et sa vie moyenne avant sa découverte
- Cette particule à été découverte en 1964, c'est le baryon Ω^-
- Decuplet baryonique:



Nombres quantiques des quarks

- **Les quarks sont de fermions de spin 1/2 qui interagissent fortement (QCD)**
- **Ils possèdent une parité positive $\eta_p = +1$ ($\eta_p = -1$ pour les anti-quarks)**
- **Ils possèdent un nombre baryonique $\mathcal{B} = 1/3$ ($\mathcal{B} = -1/3$ pour les anti-quarks)**
- **Nombres quantiques additifs (comme le nombre baryonique)**

	d	u	s	c	b	t
Q – electric charge	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$
I – isospin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
I_z – isospin z-component	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0
S – strangeness	0	0	-1	0	0	0
C – charm	0	0	0	$+1$	0	0
B – bottomness	0	0	0	0	-1	0
T – topness	0	0	0	0	0	$+1$

- **La charge électrique, la 3ème composante de l'isospin et les nombres quantique de saveurs sont reliés par la relation de Gell-Mann-Nishijima généralisé:**

$$Q = I_3 + \frac{\mathcal{B} + S + C + B + T}{2} \quad (1$$

- **L'hypercharge est définie par:** $Y = \mathcal{B} + S - \dfrac{C - B + T}{3}$ (2

Mésons

D'après le modèle des quarks, les mésons sont des états liés de quarks q et anti-quarks $\bar{q}'$ ($Meson \equiv q\bar{q}'$)

- **Nombre baryonique:** $\mathcal{B} = 0$
- **Spin s: 0 (quarks anti-parallèles) ou 1 (quarks parallèles)**
- **Parité P:** $\eta_p = (-1)^{l+1}$**, où l est moment cinétique orbitale**
- **Moment cinétique totale J:** $|l - s| \leq j \leq |l + s|$
- **Conjugaison de charge C:** $\eta_C = (-1)^{l+s}$
- **Parité G:** $G = (-1)^{I+l+s}$
- **isospin: Sin $Meson \equiv q\bar{q}$ (même type de quarks), alors $I_3 = 0$. Pour les mésons chargé $u\bar{d}$ et $d\bar{u}$, $I = 1$.**
- **Multiplets J^{PC}:**
  - $l = 0$:
    - **pseudo-scalaires:** 0^{-+}
    - **vectoriels:** 1^{--}
  - $l = 1$:
    - **scalaires:** 0^{++}
    - **vectoriels-axiales:** 1^{++} **et** 1^{+-}
    - **tensoriels:** 2^{++}

Remarque: les mésons $0^{+-}, 1^{-+}, 2^{+-}, 3^{-+}$, ... etc. sont interdits par le modèle $q\bar{q}'$

Quelques mésons légers (observés)

$n\,^{2s+1}\ell_J$	J^{PC}	I = 1 $u\bar{d},\ \bar{u}d,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d}-u\bar{u})$	I = $\frac{1}{2}$ $u\bar{s},\ d\bar{s};\ \bar{d}s,\ -\bar{u}s$	I = 0 f'	I = 0 f	$\theta_{\rm quad}$ [°]	$\theta_{\rm lin}$ [°]
$1\,^1S_0$	0^{-+}	π	K	η	$\eta'(958)$	-11.4	-24.5
$1\,^3S_1$	1^{--}	$\rho(770)$	$K^*(892)$	$\phi(1020)$	$\omega(782)$	39.1	36.4
$1\,^1P_1$	1^{+-}	$b_1(1235)$	$K_{1B}{}^\dagger$	$h_1(1380)$	$h_1(1170)$		
$1\,^3P_0$	0^{++}	$a_0(1450)$	$K_0^*(1430)$	$f_0(1710)$	$f_0(1370)$		
$1\,^3P_1$	1^{++}	$a_1(1260)$	$K_{1A}{}^\dagger$	$f_1(1420)$	$f_1(1285)$		
$1\,^3P_2$	2^{++}	$a_2(1320)$	$K_2^*(1430)$	$f_2'(1525)$	$f_2(1270)$	32.1	30.5
$1\,^1D_2$	2^{-+}	$\pi_2(1670)$	$K_2(1770)^\dagger$	$\eta_2(1870)$	$\eta_2(1645)$		
$1\,^3D_1$	1^{--}	$\rho(1700)$	$K^*(1680)$		$\omega(1650)$		
$1\,^3D_2$	2^{--}		$K_2(1820)$				
$1\,^3D_3$	3^{--}	$\rho_3(1690)$	$K_3^*(1780)$	$\phi_3(1850)$	$\omega_3(1670)$	31.8	30.8
$1\,^3F_4$	4^{++}	$a_4(2040)$	$K_4^*(2045)$		$f_4(2050)$		
$1\,^3G_5$	5^{--}	$\rho_5(2350)$	$K_5^*(2380)$				
$1\,^3H_6$	6^{++}	$a_6(2450)$			$f_6(2510)$		
$2\,^1S_0$	0^{-+}	$\pi(1300)$	$K(1460)$	$\eta(1475)$	$\eta(1295)$		
$2\,^3S_1$	1^{--}	$\rho(1450)$	$K^*(1410)$	$\phi(1680)$	$\omega(1420)$		

Quelques mésons lourds (observés)

$n\,^{2s+1}\ell_J$ $\quad J^{PC}$	I = 0 $c\bar{c}$	I = 0 $b\bar{b}$	I = $\frac{1}{2}$ $c\bar{u}, c\bar{d}; \bar{c}u, \bar{c}d$	I = 0 $c\bar{s}; \bar{c}s$	I = $\frac{1}{2}$ $b\bar{u}, b\bar{d}; \bar{b}u, \bar{b}d$	I = 0 $b\bar{s}; \bar{b}s$	I = 0 $b\bar{c}; \bar{b}c$
$1\,^1S_0 \quad 0^{-+}$	$\eta_c(1S)$	$\eta_b(1S)$	D	$D_s^\pm$	B	B_s^0	$B_c^\pm$
$1\,^3S_1 \quad 1^{--}$	$J/\psi(1S)$	$\Upsilon(1S)$	D^*	$D_s^{*\pm}$	B^*	B_s^*	
$1\,^1P_1 \quad 1^{+-}$	$h_c(1P)$	$h_b(1P)$	$D_1(2420)$	$D_{s1}(2536)^\pm$	$B_1(5721)$	$B_{s1}(5830)^0$	
$1\,^3P_0 \quad 0^{++}$	$\chi_{c0}(1P)$	$\chi_{b0}(1P)$	$D_0^*(2400)$	$D_{s0}^*(2317)^{\pm\dagger}$			
$1\,^3P_1 \quad 1^{++}$	$\chi_{c1}(1P)$	$\chi_{b1}(1P)$	$D_1(2430)$	$D_{s1}(2460)^{\pm\dagger}$			
$1\,^3P_2 \quad 2^{++}$	$\chi_{c2}(1P)$	$\chi_{b2}(1P)$	$D_2^*(2460)$	$D_{s2}^*(2573)^\pm$	$B_2^*(5747)$	$B_{s2}^*(5840)^0$	
$1\,^3D_1 \quad 1^{--}$	$\psi(3770)$			$D_{s1}^*(2860)^{\pm\ddagger}$			
$1\,^3D_3 \quad 3^{--}$				$D_{s3}^*(2860)^\pm$			
$2\,^1S_0 \quad 0^{-+}$	$\eta_c(2S)$	$\eta_b(2S)$	$D(2550)$				
$2\,^3S_1 \quad 1^{--}$	$\psi(2S)$	$\Upsilon(2S)$		$D_{s1}^*(2700)^{\pm\ddagger}$			
$2\,^1P_1 \quad 1^{+-}$		$h_b(2P)$					
$2\,^3P_{0,1,2} \quad 0^{++},1^{++},2^{++}$	$\chi_{c0,2}(2P)$	$\chi_{b0,1,2}(2P)$					
$3\,^3P_{0,1,2} \quad 0^{++},1^{++},2^{++}$		$\chi_b(3P)$					

Baryons

Les baryons sont des hadrons constitués de 3 quarks $Baryon \equiv qqq$ (en général!). Ce sont des singlet du groupe $SU3)$ dans l'espace des couleurs, ç.à.d. ne sont pas des particules colorés.

- **Nombre baryonique: $\mathcal{B} = 1$ (B=-1 pour les anti-baryons)**
- **Spin s: demi-entier (fermions)**
- **Parité P: $\eta_p = (-1)^{l_{1,2}+l_{12,3}}$, où $l_{1,2}$ est moment cinétique orbitale entre les quarks 1 et 2 et $l_{12,3}$ est le moment cinétique orbitale entre le système 12 et le quark 3 ($\eta_p = (-1)^{l_{1,2}+l_{12,3}+1}$ pour les anti-baryons).**
-
- **isospin: 1/2, 1, ...**
- **Couleurs: Singlet de $SU(3)$, anti-symétrique par l'échange des trois couleurs**
- **Les baryons ordinaires sont constitué de quarks u, d et s.**

Liste des baryons

Baryon Summary Table

This short table gives the name, the quantum numbers (where known), and the status of baryons in the Review. Only the baryons with 3- or 4-star status are included in the Baryon Summary Table. Due to insufficient data or uncertain interpretation, the other entries in the table are not established baryons. The names with masses are of baryons that decay strongly. The spin-parity J^P (when known) is given with each particle. For the strongly decaying particles, the J^P values are considered to be part of the names.

p	$1/2^+$	****	$\Delta(1232)$	$3/2^+$	****	Σ^+	$1/2^+$	****	Ξ^0	$1/2^+$	****	Λ_c^+	$1/2^+$	****
n	$1/2^+$	****	$\Delta(1600)$	$3/2^+$	****	Σ^0	$1/2^+$	****	Ξ^-	$1/2^+$	****	$\Lambda_c(2595)^+$	$1/2^-$	***
$N(1440)$	$1/2^+$	****	$\Delta(1620)$	$1/2^-$	****	Σ^-	$1/2^+$	****	$\Xi(1530)$	$3/2^+$	****	$\Lambda_c(2625)^+$	$3/2^-$	***
$N(1520)$	$3/2^-$	****	$\Delta(1700)$	$3/2^-$	****	$\Sigma(1385)$	$3/2^+$	****	$\Xi(1620)$		*	$\Lambda_c(2765)^+$		*
$N(1535)$	$1/2^-$	****	$\Delta(1750)$	$1/2^+$	*	$\Sigma(1480)$		*	$\Xi(1690)$		***	$\Lambda_c(2860)^+$	$3/2^+$	***
$N(1650)$	$1/2^-$	****	$\Delta(1900)$	$1/2^-$	***	$\Sigma(1560)$		**	$\Xi(1820)$	$3/2^-$	***	$\Lambda_c(2880)^+$	$5/2^+$	***
$N(1675)$	$5/2^-$	****	$\Delta(1905)$	$5/2^+$	****	$\Sigma(1580)$	$3/2^-$	*	$\Xi(1950)$		***	$\Lambda_c(2940)^+$	$3/2^-$	***
$N(1680)$	$5/2^+$	****	$\Delta(1910)$	$1/2^+$	****	$\Sigma(1620)$	$1/2^-$	*	$\Xi(2030)$	$\geq \frac{5}{2}^?$	***	$\Sigma_c(2455)$	$1/2^+$	****
$N(1700)$	$3/2^-$	***	$\Delta(1920)$	$3/2^+$	***	$\Sigma(1660)$	$1/2^+$	***	$\Xi(2120)$		*	$\Sigma_c(2520)$	$3/2^+$	***
$N(1710)$	$1/2^+$	****	$\Delta(1930)$	$5/2^-$	***	$\Sigma(1670)$	$3/2^-$	****	$\Xi(2250)$		**	$\Sigma_c(2800)$		***
$N(1720)$	$3/2^+$	****	$\Delta(1940)$	$3/2^-$	**	$\Sigma(1690)$		**	$\Xi(2370)$		**	Ξ_c^+	$1/2^+$	***
$N(1860)$	$5/2^+$	**	$\Delta(1950)$	$7/2^+$	****	$\Sigma(1730)$	$3/2^+$	*	$\Xi(2500)$		*	Ξ_c^0	$1/2^+$	****
$N(1875)$	$3/2^-$	***	$\Delta(2000)$	$5/2^+$	**	$\Sigma(1750)$	$1/2^-$	***				$\Xi_c'^+$	$1/2^+$	***
$N(1880)$	$1/2^+$	***	$\Delta(2150)$	$1/2^-$	*	$\Sigma(1770)$	$1/2^+$	*	Ω^-	$3/2^+$	****	$\Xi_c'^0$	$1/2^+$	***
$N(1895)$	$1/2^-$	****	$\Delta(2200)$	$7/2^-$	***	$\Sigma(1775)$	$5/2^-$	****	$\Omega(2012)^-$	$?^-$	***	$\Xi_c(2645)$	$3/2^+$	***
$N(1900)$	$3/2^+$	****	$\Delta(2300)$	$9/2^+$	**	$\Sigma(1840)$	$3/2^+$	*	$\Omega(2250)^-$		***	$\Xi_c(2790)$	$1/2^-$	***
$N(1990)$	$7/2^+$	**	$\Delta(2350)$	$5/2^-$	*	$\Sigma(1880)$	$1/2^+$	**	$\Omega(2380)^-$		**	$\Xi_c(2815)$	$3/2^-$	***
$N(2000)$	$5/2^+$	**	$\Delta(2390)$	$7/2^+$	*	$\Sigma(1900)$	$1/2^-$	*	$\Omega(2470)^-$		**	$\Xi_c(2930)$		**
$N(2040)$	$3/2^+$	*	$\Delta(2400)$	$9/2^-$	**	$\Sigma(1915)$	$5/2^+$	****				$\Xi_c(2970)$		***
$N(2060)$	$5/2^-$	***	$\Delta(2420)$	$11/2^+$	****	$\Sigma(1940)$	$3/2^+$	*				$\Xi_c(3055)$		***
$N(2100)$	$1/2^+$	***	$\Delta(2750)$	$13/2^-$	**	$\Sigma(1940)$	$3/2^-$	***				$\Xi_c(3080)$		***
$N(2120)$	$3/2^-$	***	$\Delta(2950)$	$15/2^+$	**	$\Sigma(2000)$	$1/2^-$	*				$\Xi_c(3123)$		*
$N(2190)$	$7/2^-$	****				$\Sigma(2030)$	$7/2^+$	****				Ω_c^0	$1/2^+$	***
$N(2220)$	$9/2^+$	****	Λ	$1/2^+$	****	$\Sigma(2070)$	$5/2^+$	*				$\Omega_c(2770)^0$	$3/2^+$	***
$N(2250)$	$9/2^-$	****	$\Lambda(1405)$	$1/2^-$	****	$\Sigma(2080)$	$3/2^+$	**				$\Omega_c(3000)^0$		***

Liste des baryons

$N(2220)$	$9/2^+$	****	Λ	$1/2^+$	****	$\Sigma(2070)$	$5/2^+$	*	$\Omega_c(2770)^0$	$3/2^+$	***
$N(2250)$	$9/2^-$	****	$\Lambda(1405)$	$1/2^-$	****	$\Sigma(2080)$	$3/2^+$	**	$\Omega_c(3000)^0$		***
$N(2300)$	$1/2^+$	**	$\Lambda(1520)$	$3/2^-$	****	$\Sigma(2100)$	$7/2^-$	*	$\Omega_c(3050)^0$		***
$N(2570)$	$5/2^-$	**	$\Lambda(1600)$	$1/2^+$	***	$\Sigma(2250)$		***	$\Omega_c(3065)^0$		***
$N(2600)$	$11/2^-$	***	$\Lambda(1670)$	$1/2^-$	****	$\Sigma(2455)$		**	$\Omega_c(3090)^0$		***
$N(2700)$	$13/2^+$	**	$\Lambda(1690)$	$3/2^-$	****	$\Sigma(2620)$		**	$\Omega_c(3120)^0$		***
			$\Lambda(1710)$	$1/2^+$	*	$\Sigma(3000)$		*	Ξ_{cc}^{++}		***
			$\Lambda(1800)$	$1/2^-$	***	$\Sigma(3170)$		*	Λ_b^0	$1/2^+$	***
			$\Lambda(1810)$	$1/2^+$	***				$\Lambda_b(5912)^0$	$1/2^-$	***
			$\Lambda(1820)$	$5/2^+$	****				$\Lambda_b(5920)^0$	$3/2^-$	***
			$\Lambda(1830)$	$5/2^-$	****				Σ_b	$1/2^+$	***
			$\Lambda(1890)$	$3/2^+$	****				Σ_b^*	$3/2^+$	***
			$\Lambda(2000)$		*				$\Sigma_b(6097)^+$		***
			$\Lambda(2020)$	$7/2^+$	*				$\Sigma_b(6097)^-$		***
			$\Lambda(2050)$	$3/2^-$	*				Ξ_b^0, Ξ_b^-	$1/2^+$	***
			$\Lambda(2100)$	$7/2^-$	****				$\Xi'_b(5935)^-$	$1/2^+$	***
			$\Lambda(2110)$	$5/2^+$	***				$\Xi_b(5945)^0$	$3/2^+$	***
			$\Lambda(2325)$	$3/2^-$	*				$\Xi_b(5955)^-$	$3/2^+$	***
			$\Lambda(2350)$	$9/2^+$	***				$\Xi_b(6227)$		***
			$\Lambda(2585)$		**				Ω_b^-	$1/2^+$	***
									$P_c(4380)^+$		*
									$P_c(4450)^+$		*

**** Existence is certain, and properties are at least fairly well explored.

*** Existence ranges from very likely to certain, but further confirmation is desirable and/or quantum numbers, branching fractions, etc. are not well determined.

** Evidence of existence is only fair.

* Evidence of existence is poor.

(2) Groupes $SU(N)$

Groupe Spéciale unitaire $SU(N)$

$SU(N)$ ou le groupe spéciale unitaire est l'ensemble des matrices unitaire ($UU^\dagger = 1$) $n \times n$ d'éléments complexe et de déterminant égal à 1 ($\det(U) = 1$).

- **Chaque élément de $SU(N)$ (en général toute groupe de Lie compact) s'écrit:**

$$U = e^{i\alpha_a X_a}, \qquad \textbf{pour} \qquad a = 1, 2, \cdots, N^2 - 1 \tag{3}$$

  - **α: sont les paramètres du groupe (fonctions continues)**
  - **X_a: sont les générateurs du groupe (matrices!)**

- **Les générateurs vérifient la relation**

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c \tag{4}$$

  - **f_{abc}: sont les constantes de structure**
  - **L'ensemble des générateurs $\{X_a\}$ forme une algèbre, appelée *Algèbre de Lie* (notée $su(N)$).**

Représentations des groupe de Lie

- Une représentation d'un groupe G est une application linéaire D des éléments de G dans un ensemble d'opérateurs linéaires avec:
  - $D(g_1) \cdot D(g_2) = D(g_1 \cdot g_2)$
  - $D(e) = 1$ et $D(g^{-1}) = (D(g))^{-1}$, où g, g_1 et g_2 sont des éléments de G et e est l'élément-identité.
- Deux représentations (D et D') sont identiques si:

$$D'(g) = SD(g)S^{-1} \tag{5}$$

  où S est une matrice constante.
- Une représentation est *réductible* si elle est diagonalisable en bloc

$$D'(g) = SD(g)S^{-1} = \begin{pmatrix} D'_1(g) & 0 \\ 0 & D'_2(g) \end{pmatrix} \tag{6}$$

- Une représentation est *irréductible* si elle n'est pas diagonalisable en bloc
- Représentations intéressantes:
  - Représentation fondamentale: la plus petite représentation irréductible. Pour $SU(N)$, on la note **N**.
  - Représentation adjointe: générée par les constantes de structure. Les $N^2 - 1$ générateurs pour $SU(N)$ sont $\{(T_a)_{bc} \equiv -if_{abc}\}$, on la note **N^2-1**

Groupe $SU(2)$, représentation fondamentale et adjointe

- On peut choisir les matrices de Pauli divisées par 2 $\hat{\sigma}_i$ (pour $i = 1, 2, 3$) comme générateur du groupe $SU(2)$ dans la représentation fondamentale.
  - Générateurs de $SU(2)$ dans la représentation **2**:

$$[\hat{I}_i, \hat{I}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{I}_k, \qquad \hat{I}_i = \hat{\sigma}_i/2. \tag{7}$$

    où ϵ_{ijk} est le symbole de Levi-Civita.
  - Matrices de Pauli sont données par:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

- Les générateurs de la représentation adjoint, notée **3**, sont générés par les constantes de structure ϵ_{ijk} (par exemple $(X_1)_{jk} \propto \epsilon_{1jk}$)
  - Générateurs de $SU(2)$ dans la représentation **3**:

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

  - Les générateurs $\{X_i\}$ vérifient: $[X_i, X_j] = i\epsilon_{ijk}X_k$

Isospin et $SU(2)$

- Un hadron est représenté par l'état $|I, I_3>$ dans l'espace d'isospin, avec

$$\hat{I}^2|I,I_3> = I(1+I)|I,I_3> \qquad \text{et} \qquad \hat{I}_3|I,I_3> = I_3|I,I_3>$$
$$\hat{I}_\pm|I,I_3> \propto |I,I_3\pm 1> \qquad \text{avec} \qquad \hat{I}_\pm = (\hat{I}_1 \pm i\hat{I}_2)/\sqrt{2} \tag{10}$$

  avec $-I \leq I_3 \leq +I$.
- Un vecteur d'état $|I, I_3>$ est représenté par un vecteur d'une base d'un espace vectoriel de dimension égale à la dimension de la représentation

$$|I,I> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |I,I-1> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad |I,-I> = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

- Exemple 1: le nucléon N est un doublet de $SU(2)$ $N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ (représentation **2**)
  - Le proton et le neutron sont représentés par les vecteurs d'état:

$$p = \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad I = \frac{1}{2} \tag{12}$$

  - La troisième composante de l'isospin

$$\hat{I}_3 p = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2}p \qquad \hat{I}_3 n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}n \tag{13}$$

- Exemple 2. Anti-nucléon (représentation $\overline{\mathbf{2}}$):
  - est un doublet $SU(2)$ dans la représentation $\overline{\mathbf{2}}$

$$\overline{N} = \begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix} \tag{14}$$

  - Les vecteurs d'état de l'anti-proton et l'anti-neutron

$$\bar{n} = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -\bar{p} = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

- Exemple 3. Pion (représentation adjointe **=3**):
  - Le pion est triplet de $SU(2)$

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} \qquad \text{isospin } I = 1 \tag{16}$$

  - Les vecteurs d'état des pions:

$$\pi^+ = |1, +1 > \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \pi^0 = |1, 0 > \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \pi^- = |1, -1 > \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - La troisième composante de l'isospin ($\hat{I}_i \equiv X_i$, voir eq. (9)):

$$\hat{I}_3 \pi^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = +1\pi^+ \qquad \hat{I}_3 \pi^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\pi^0 \tag{17}$$

Produit tensoriels des représentations

- **Produit de deux représentation fondamentales:**

  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0 \iff \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$

  - Exemple: cas général!

$$|1/2, I_3^{(1)}> \otimes |1/2, I_3^{(2)}> = \begin{cases} \begin{pmatrix} |1,+1> \\ |1,0> \\ |1,-1> \end{pmatrix} \in \mathbf{3}(\text{triplet}) \\ \left(|0,0>\right) \in \mathbf{1}(\text{singlet}) \end{cases}$$

- **Produit d'une représentation fondamentale avec son complexe conjugué:**

  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0 \iff \mathbf{2} \otimes \bar{\mathbf{2}} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$

  - Exemple: pion!

$$\overbrace{|1/2, I_3^{(1)}>}^{\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}} \otimes \overbrace{|1/2, I_3^{(2)}>}^{\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} |1,+1> \equiv \pi^+ \equiv u\bar{d} \\ |1,0> \equiv \pi^0 \equiv (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2} \\ |1,-1> \equiv \pi^- \equiv -d\bar{u} \end{pmatrix} \in \mathbf{3}(\text{triplet}) \\ \left(|0,0> \equiv \eta \equiv (u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}\right) \in \mathbf{1}(\text{singlet}) \end{cases}$$

  - Rappel:

$$|j_1, m_1>|j_2, m_2> = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C^{jj_1j_2}_{mm_1m_2}|j,m>, \quad |j,m> = \sum_{m_1m_2} C^{jj_1j_2}_{mm_1m_2}|j_1,m_1>|j_2,m_2>, \quad m = m_1 + m_2$$

- **Produit de trois représentation fondamentales:**

  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \iff \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4} \oplus \mathbf{2} \oplus \mathbf{2}$

- Produit des représentations en $SU(N)$

$$\mathbf{N} \otimes \bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^2 - \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \quad (18)$$

$$\mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{N}(\mathbf{N}+\mathbf{1})(\mathbf{N}+\mathbf{2}) \oplus \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{N}(\mathbf{N}+\mathbf{1})(\mathbf{N}-\mathbf{1}) \oplus \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{N}(\mathbf{N}+\mathbf{1})(\mathbf{N}-\mathbf{1}) \oplus \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{N}(\mathbf{N}-\mathbf{1})(\mathbf{N}-\mathbf{2}) \quad (19)$$

Groupe $SU(3)$: représentations fondamentales et adjointe

- On peut choisir les matrices de Gell-Mann matrices divisé par 2, λ_a (for $a = 1, \cdots 8$), comme générateurs de $SU(3)$:

$$[\hat{T}_a, \hat{T}_b] = if_{abc}\hat{T}_c, \qquad \hat{T}_a = \lambda_a/2. \tag{20}$$

où f_{abc} est totalement anti-symétrique par l'échange des indices a, b and c. Les matrice de Gell-Mann sont:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 \frac{1}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

- $SU(3)$ possède deux représentations fondamentales, notés $\mathbf{3}$ et $\bar{\mathbf{3}}$($\bar{\mathbf{3}}$ est générée par $\{-\hat{T}_a^\dagger\}$).
- Représentation adjointe, notée $\mathbf{8}$, est générée par les matrice 8×8 $(X_a)_{bc} = -if_{abc}$

$$X_a = -i \begin{pmatrix} f_{a11} & f_{a12} & \cdots & f_{a18} \\ f_{a21} & f_{a22} & \cdots & f_{a28} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{a81} & f_{a82} & \cdots & f_{a88} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Diagramme de poids dans $SU(3)$

- $SU(3)$ est de rang 2 car elle possède deux générateurs de Cartan:

$$[\hat{T}_3, \hat{T}_8] = 0 \tag{23}$$

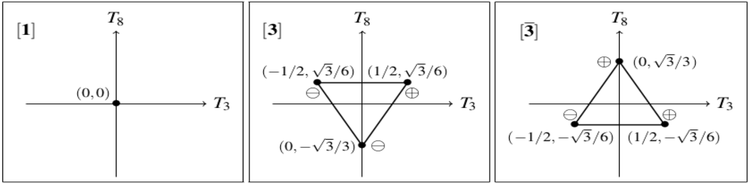
  - $\hat{T}_3 \equiv \hat{I}_3$ est l'isospin, et $\hat{Y} = 2\hat{T}_8/\sqrt{3}$ est hypercharge ($[\hat{T}_3, \hat{Y}] = 0$)
  - Dans une représentation $\mathcal{D}$, un état est représenté par le vecteur poids:

$$|T_3, T_8, \mathcal{D}>$$

$$\hat{T}_3|T_3, T_8, \mathcal{D}> = T_3|T_3, T_8, \mathcal{D}>, \qquad \hat{T}_8|T_3, T_8, \mathcal{D}> = T_8|T_3, T_8, \mathcal{D}> \tag{24}$$

  où $\mathcal{D}$=$\mathbf{3}$, $\bar{\mathbf{3}}$, $\mathbf{8}$, $\cdots$ etc. Les poids sont donnés par (T_3, T_8).

- Diagramme de poids pour les représentations $\mathbf{1}$, $\mathbf{3}$ et $\bar{\mathbf{3}}$:



Opérateur de création et annihilation

- **Opérateurs de création et annihilation de $SU(3)$**

$$\hat{T}_\pm = \hat{T}_1 \pm i\hat{T}_2, \qquad \hat{V}_\pm = \hat{T}_4 \pm i\hat{T}_5, \qquad \hat{U}_\pm = \hat{T}_6 \pm i\hat{T}_7 \tag{25}$$

- **$SU(2)$ comme sous-groupe de $SU(3)$**

$$\begin{aligned}
&\hat{T}\textbf{-spin:} \quad && [\hat{T}_3,\hat{T}_\pm] = \pm\hat{T}_\pm, && [\hat{T}_+,\hat{T}_-] = 2\hat{T}_3. \\
&\hat{U}\textbf{-spin:} \quad && [\hat{T}_3,\hat{U}_\pm] = \mp\hat{U}_\pm/2, && [\hat{U}_+,\hat{U}_-] = 2\hat{U}_3. \\
&\hat{V}\textbf{-spin:} \quad && [\hat{T}_3,\hat{V}_\pm] = \pm\hat{V}_\pm/2, && [\hat{V}_+,\hat{V}_-] = 2\hat{V}_3.
\end{aligned} \tag{26}$$

avec

$$2\hat{U}_3 = 3\hat{Y}/2 - \hat{T}_3, \qquad 2\hat{V}_3 = 3\hat{Y}/2 + \hat{T}_3. \tag{27}$$

et

$$[\hat{Y},\hat{T}_\pm] = 0, \qquad [\hat{Y},\hat{U}_\pm] = \pm\hat{U}_\pm, \qquad [\hat{Y},\hat{V}_\pm] = \pm\hat{V}_\pm. \tag{28}$$

(3) Modèle des Quarks

Saveurs de quarks et $SU(3)$

- Il est plus pratique de choisir l'isospin $I_3 = T_8$ et l'hypercharge $\hat{Y} = 2T_8/\sqrt{3}$ pour désigner les vecteurs poids (I_3, Y), alors

$$|T_3, Y, \mathcal{D}>$$

$$\hat{T}_3|T_3, Y, \mathcal{D}> = T_3|T_3, Y, \mathcal{D}>, \qquad \hat{Y}|T_3, Y, \mathcal{D}> = Y|T_3, Y, \mathcal{D}>$$

$$\hat{I}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{Y} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

- Dans le modèle des quarks basé sur les groupe $SU(3)$, les constituants fondamentaux des hadrons sont les quarks u, d et s
- Ces quarks sont représentés par des vecteurs poids dans la représentation fondamentale $\mathbf{3}$

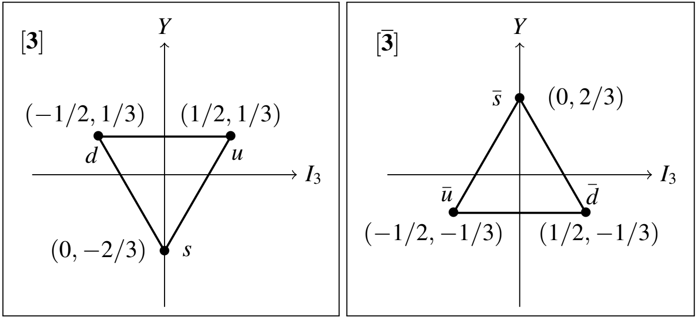
$$u = |+1/2, +1/3, \mathbf{3}>= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d = |-1/2, +1/3, \mathbf{3}>= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s = |0, -2/3, \mathbf{3}>= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (29)$$

- Isospin et hypercharge des quarks u, d et s:

	I_3	Y
u	$+1/2$	$+1/3$
d	$-1/2$	$+1/3$
s	0	$-2/3$

Diagrammes de poids des quarks et anti-quarks

- **Les quarks sont membre de représentation fondamentale 3 (les anti-quarks de $\bar{3}$)**



- **Nombre quantique des quarks: appliquant la relation de Gell-Mann Nishijima**

$$\hat{Q} = \hat{I}_3 + \frac{\hat{\mathcal{B}} + \hat{S}}{2}, \qquad \hat{Y} = \hat{\mathcal{B}} + \hat{S} \tag{30}$$

on déduit

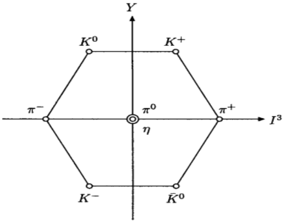
$$\hat{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad \hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{Q} = \begin{pmatrix} +2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Mésons et $SU(3)$

- Les mésons $(q\bar{q})$ sont des membres des représentations irréductibles construites par le produit tensoriel des représentation $\mathbf{3}$ et $\bar{\mathbf{3}}$:

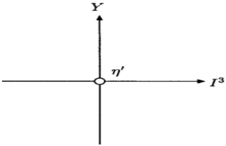
$$\overbrace{\mathbf{3}}^{q} \otimes \overbrace{\bar{\mathbf{3}}}^{\bar{q}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \tag{32}$$

  - Octet $\mathbf{8}$:



Méson	$\mathbf{8}$
π^+	$u\bar{d}$
π^0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$
π^-	$d\bar{u}$
K^+	$u\bar{s}$
K^0	$d\bar{s}$
$\bar{K}^0$	$s\bar{d}$
K^-	$s\bar{u}$
η_8	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$

  - Singlet $\mathbf{1}$:



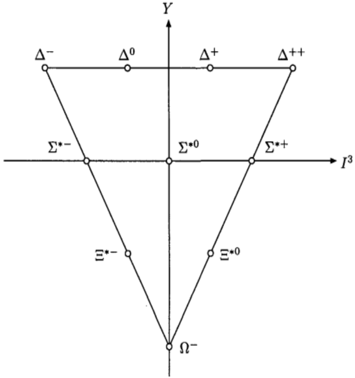
Méson	$\mathbf{1}$
η_1	$(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$

Baryons et $SU(3)$

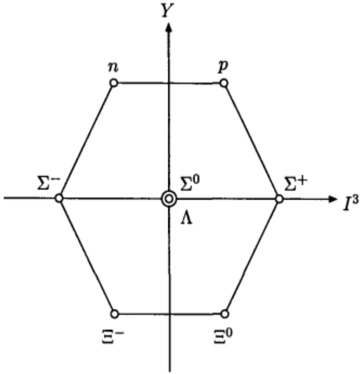
Les baryons (qqq) sont des membres des représentations irréductibles construites par du produit tensoriel de trois représentations fondamentales $\mathbf{3}$:

$$\overbrace{\mathbf{3}}^{q} \otimes \overbrace{\mathbf{3}}^{q} \otimes \overbrace{\mathbf{3}}^{q} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8}' \oplus \mathbf{10} \tag{33}$$

- Decuplet $\mathbf{10}$:



- Octet $\mathbf{8}$:



Extension du modèle pour les autres quarks

- **Inclusion du quark charm:** pour inclure les hadrons charmé, nous devons considérer un modèle de quark basé sur le groupe $SU(4)$
  - Quadriplet de quark: $q \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \end{pmatrix} \in \mathbf{4}$ de $SU(4)$
  - Baryons: $\mathbf{4} \otimes \mathbf{4} \otimes \mathbf{4} \otimes = \mathbf{20} \oplus \mathbf{20} \oplus \mathbf{20} \oplus \overline{\mathbf{4}}$
  - Mésons: $\mathbf{4} \otimes \overline{\mathbf{4}} = \mathbf{15} \oplus \mathbf{1}$
- **Inclusion du quark bottom:** pour inclure les hadrons avec quarks charm et bottom, nous devons considérer un modèle de quark basé sur le groupe $SU(5)$
  - fiveplet de quark: $q \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \\ b \end{pmatrix} \in \mathbf{5}$ de $SU(5)$
  - Baryons: $\mathbf{5} \otimes \mathbf{5} \otimes \mathbf{5} \otimes =!!!$
  - Mésons: $\mathbf{5} \otimes \overline{\mathbf{5}} =!!!$
- Il est indésirable de considérer un modèle des quarks contenant un top quark, car ce dernier a une vie moyenne très courte.

Spin & saveur et le groupe $SU(6)$

- Pour les baryons ordinaires (constitué de quarks u, d et s), on peut combiner la symétrie approximative de saveur-spin dans $SU(6)$

$$\mathbf{6} \equiv \begin{pmatrix} u \upharpoonleft \\ u \downharpoonleft \\ d \upharpoonleft \\ d \downharpoonleft \\ s \upharpoonleft \\ s \downharpoonleft \end{pmatrix} \tag{34}$$

- Les baryons appartiennent aux multiplets suivants:

$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{56} \oplus \mathbf{70} \oplus \mathbf{70} \oplus \mathbf{20} \tag{35}$$

- Les multiplets de $SU(6)$ se décomposent en multiplets de saveurs $SU(3)$ ($^{\mathbf{2s+1}}\mathbf{m}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{56} &= {}^{\mathbf{4}}\,\mathbf{10} \oplus {}^{\mathbf{2}}\,\mathbf{8} \\ \mathbf{70} &= {}^{\mathbf{2}}\,\mathbf{10} \oplus {}^{\mathbf{4}}\,\mathbf{8} \oplus {}^{\mathbf{2}}\,\mathbf{8} \oplus {}^{\mathbf{2}}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{20} &= {}^{\mathbf{2}}\,\mathbf{8} \oplus {}^{\mathbf{4}}\,\mathbf{1} \end{aligned}$$

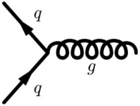
Couleur et $SU(3)$

- Un quark est vu comme un triplet de $\mathbf{3}$ dans l'espace des couleurs:

$$q = \begin{pmatrix} r \\ b \\ g \end{pmatrix}$$

$$|r> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |b> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |g> = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

- Le gluon est un octet **8** dans l'espace des couleurs
  - Vertex $q - q - g$:



  - Produit tensoriel:

$$\overbrace{\mathbf{3}}^{q} \otimes \overbrace{\bar{\mathbf{3}}}^{\bar{q}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$

- Couleurs possibles des gluons:

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{b} + b\bar{r}) \qquad g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(b\bar{g} + g\bar{b})$$

$$g_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(g\bar{r} + r\bar{g}) \qquad g_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{b} - b\bar{r})$$

$$g_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(b\bar{g} - g\bar{b}) \qquad g_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(g\bar{r} - r\bar{g})$$

$$g_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - b\bar{b}) \qquad g_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g})$$