

Solutions TD 02

Exercice 01

a) On a l'ensemble des états suivants $E = \{BT, PL, N\}$ et le temps pour un jour ne dépend que du temps du jour précédent, indépendamment de la période de l'année également. On a donc bien une chaîne de Markov, de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Pour le temps du surlendemain, il faut déterminer P^2 . Mais seule la première ligne de P^2 nous intéresse car on veut déterminer les probabilités à partir d'un jour de beau temps. On a :

$$P_{BT,BT}^2 = P_{BT,BT} \times P_{BT,BT} + P_{BT,PL} \times P_{PL,BT} \times P_{BT,N} \times P_{N,BT} = 0 \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P_{BT,PL}^2 = P_{BT,BT} \times P_{BT,PL} + P_{BT,PL} \times P_{PL,PL} \times P_{BT,N} \times P_{N,PL} = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$P_{BT,N}^2 = P_{BT,BT} \times P_{BT,N} + P_{BT,PL} \times P_{PL,N} \times P_{BT,N} \times P_{N,N} = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Ainsi, si un jour il fait beau, le temps le plus probable pour le surlendemain est la pluie ou la neige.

c) On suppose maintenant que $E' = \{BT, MT\}$, ce qui est possible puisque la pluie et la neige se comportent de la même façon pour ce qui est des transitions. On a encore

$P'_{BT,BT} = 0$ mais maintenant, $P'_{BT,MT} = P_{BT,PL} + P_{BT,N} = 1$.

Pour la deuxième ligne, on a $P'_{MT,BT} = \frac{1}{4}$ car $P_{PL,BT} = P_{N,BT} = \frac{1}{4}$ et $P'_{MT,MT} = \frac{3}{4}$ car

$$P_{PL,PL} + P_{PL,N} = P_{N,PL} + P_{N,N} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Ainsi, } P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Exercice 02

L'ensemble des états est $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

La matrice de transition de ce processus de Markov ainsi que le graph sont :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

