Solutions TD 02

Exercice 03

L'ensemble des états est $E = \{ABC, AB, AC, BC, A, B, C, \emptyset\}$. Pour $X \in \{A, B, C\}$, on note encore X l'événement "le char X atteint sa cible" (et donc $\overline{X}$ l'événement "le char X rate sa cible"). On a ainsi $P(A) = 2/3$, $P(B) = 1/2$ et $P(C) = 1/3$. Une fois qu'un char est descendu, il ne peut plus revenir et ainsi, on peut commencer par mettre un certain nombre de 0 dans la matrice de transition. Si on est dans l'état A, B, C ou $\emptyset$, on est sûr d'y rester (plus d'adversaires!).

a) S'il ne reste que 2 chars, par exemple A et B, on a $p_{AB,AB} = P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (les 2 ratent!), $p_{AB,B} = P(\overline{A})P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (A rate, B réussit), $p_{AB,A} = P(A)P(\overline{B}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$ (A réussit, B rate) et $p_{AB,\emptyset} = P(A)P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$ (les 2 réussissent). On procède de même pour AC et pour BC.

Si on a les 3 chars, A tire sur B, B et C tirent sur A (et personne ne tire sur C, donc il reste au moins C). On a alors $p_{ABC,ABC} = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{2}{18}$, $p_{ABC,AC} = P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{4}{18}$, $p_{ABC,BC} = P(\overline{A})P(B \cup C) = P(\overline{A})(1 - P(\overline{B})P(\overline{C})) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{18}$ et $p_{ABC,C} = P(A)P(B \cup C) = P(A)(1 - P(\overline{B})P(\overline{C})) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{18}$. On obtient ainsi la matrice et le graphe suivants :

$$P = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 2/9 & 2/9 & 0 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 2/6 & 1/6 & 0 & 2/6 \\ 0 & 0 & 2/9 & 0 & 4/9 & 0 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 0 & 2/6 & 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) S'il ne reste que A et B, A tire sur B et B continue à tirer sur C donc A n'est pas menacé et $p'_{AB,A} = P(A) = 2/3$ alors que $p'_{AB,AB} = P(\overline{A}) = 1/3$. De même avec A et C (A tire sur B, C sur A donc C n'est pas menacé), $p'_{AC,C} = P(C) = 1/3$ et $p'_{AC,AC} = P(\overline{C}) = 2/3$. Avec B et C (B tire sur C et C sur A, donc B n'est pas menacé), $p'_{BC,B} = P(B) = 1/2$ et $p'_{BC,BC} = P(\overline{B}) = 1/2$.

Si on a les 3 chars, $p'_{ABC,ABC} = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{2}{18}$, $p'_{ABC,AB} = P(\overline{A})P(B)P(\overline{C}) = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{2}{18}$, $p'_{ABC,AC} = P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{4}{18}$, $p'_{ABC,BC} = P(\overline{A})P(\overline{B})P(C) = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$, $p'_{ABC,A} = P(A)P(B)P(\overline{C}) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{4}{18}$, $p'_{ABC,B} = P(\overline{A})P(B)P(C) = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$, $p'_{ABC,C} = P(A)P(\overline{B})P(C) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{2}{18}$ et $p'_{ABC,\emptyset} = P(A)P(B)P(C) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{2}{18}$. On obtient ainsi la matrice et le graphe suivants :

$$P = \begin{pmatrix} 2/18 & 2/18 & 4/18 & 1/18 & 4/18 & 1/18 & 2/18 & 2/18 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 04

a) L'ensemble des états est $E = \{0, 1\}$ car si le soir il y a une ou aucune machine en panne, le lendemain matin, il y en aura 0 ; et si le soir, il y en a 2, le lendemain matin, il y en aura une seule. Le nombre de machines en panne le matin ne dépend que de celui de la veille au matin et de ce qu'il s'est passé dans la journée, ceci indépendamment de la période de l'année. On a donc bien une chaîne de Markov dont il faut déterminer la matrice de transition.

On a $p_{0,1} = q^2$ (les 2 machines tombent en panne dans la journée et ces pannes sont indépendantes entre elles) et $p_{0,0} = (1-q)^2 + 2q(1-q) = 1 - q^2$ ($(1-q)^2$ correspond à aucune panne dans la journée et $2q(1-q)$ à une seule panne qui peut provenir d'une machine ou de l'autre.). On a également $p_{1,0} = 1 - q$ (la machine en panne est réparée et l'autre fonctionne toujours), et $p_{1,1} = q$ (la machine en panne est réparée et l'autre est tombée en panne). Ainsi, on a la matrice :

$P = \begin{pmatrix} 1-q^2 & q^2 \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ et le graphe :

Pour la distribution stationnaire, on résout $(\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1) \begin{pmatrix} 1-q^2 & q^2 \\ 1-q & q \end{pmatrix}$, soit $\pi_1 = q^2\pi_0 + q\pi_1$, d'où $\pi_1 = \dfrac{q^2}{1-q}\pi_0$ et avec $\pi_0 + \pi_1 = 1$, on obtient $\pi_0 \left(1 + \dfrac{q^2}{1-q}\right) = 1$, soit $\pi_0 = \dfrac{1-q}{1-q+q^2}$ et $\pi_1 = \dfrac{q^2}{1-q+q^2}$. Avec $q = \dfrac{1}{4}$, on a alors $\boxed{\pi_0 = \dfrac{12}{13} \text{ et } \pi_1 = \dfrac{1}{13}}$.

b) On a maintenant $E' = \{0, 1, 2\}$ car aucune machine n'est réparée la nuit ; $p'_{0,0} = (1-q)^2$ (aucune panne dans la journée), $p'_{0,1} = 2q(1-q)$ (une des 2 machines est tombée en panne) et $p'_{0,2} = q^2$ (les 2 machines sont tombées en panne) ; $p'_{1,0} = 1 - q$ (la machine qui fonctionne ne tombe pas en panne), $p'_{1,1} = q$ (la machine qui fonctionne tombe en panne, l'autre est réparée), $p'_{1,2} = 0$ (la machine en panne est sure de remarcher le lendemain) ; de même, $p'_{2,1} = 1$ (une seule des 2 machines en panne est réparée). Ainsi, on a la matrice:

$$P = \begin{pmatrix} (1-q)^2 & 2q(1-q) & q^2 \\ 1-q & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et le graphe :}$$

Pour la distribution stationnaire, on résout $(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} (1-q)^2 & 2q(1-q) & q^2 \\ 1-q & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, soit $\pi_0 = (1-q)^2\pi_0 + (1-q)\pi_1$, d'où $\pi_1 = \dfrac{2q-q^2}{1-q}\pi_0$ et $\pi_2 = q^2\pi_0$, d'où avec $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$, on obtient $\pi_0 \left(1 + q^2 + \dfrac{2q-q^2}{1-q}\right) = 1$, soit $\pi_0 = \dfrac{1-q}{1+q-q^3}$, $\pi_1 = \dfrac{2q-q^2}{1+q-q^3}$ et $\pi_2 = \dfrac{q^2-q^3}{1+q-q^3}$. Avec $q = \dfrac{1}{4}$, on a alors $\boxed{\pi_0 = \dfrac{48}{79}, \pi_1 = \dfrac{28}{79} \text{ et } \pi_2 = \dfrac{3}{79}}$.

c) Si on garde l'ensemble des états E', on n'a pas une chaîne de markov car, lorque l'on a 2 machines en panne par exemple, on ne peut pas savoir si le lendemain, on en aura 1 ou 2 en panne : tout dépend si c'est le premier jour de réparation ou le second. On est donc amené à introduire 2 états supplémentaires : $1'$ (1 machine en panne dont c'est le deuxième jour de réparation) et $2'$ (2 machines en panne et deuxième jour de réparation pour la première). On a alors $p''_{0,0} = (1-q)^2$, $p''_{0,1} = 2q(1-q)$, $p''_{0,2} = q^2$; $p''_{1,1'} = 1-q$, $p''_{1,2'} = q$, $p''_{1',0} = 1-q$, $p''_{1',1} = q$, $p''_{2,2'} = 1$, $p''_{2',1} = 1$, les autres probabilités étant nulles. On a le graphe :

On a alors $p''_{0,0} = (1-p)^2$, $p''_{0,0}(2) = p''_{0,0}p''_{0,0} = (1-q)^4$, $p''_{0,0}(3) = p''_{0,0}p''_{0,0}p''_{0,0} + p''_{0,1}p''_{1,1'}p''_{1',0} = (1-q)^6 + 2q(1-q)^3$.