

الفصل الثالث

غاز الإلكترونات الحرة (غاز فيرمي - Fermi Gaz)

النقل الكلاسيكي ونظرية درود (Drude)

مقدمة:

ما يميز المعادن عن بقية المواد بشكل عام ما يلي:

- ناقلية كهربائية (σ) عالية. في مجال معين من درجات الحرارة (درجات الحرارة العالية) تتناسب عكسيا مع درجة الحرارة.
- ناقلية حرارية (K) عالية تصبح مستقلة عن درجة الحرارة في درجات حرارة مرتفعة كفاية.
- في درجات حرارة عالية كفاية يتحقق: $\frac{K}{\sigma T} = L = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2$ (قانون ويدمان - فرانز Wiedemann-Franz)
- تركيز حاملات الشحنة الحرة مستقل عن درجة الحرارة.
- امتصاصية ضوئية عالية غالبا ما تكون ثابتة في المجال المرئي من الطيف.
- اللدونة.....القابلية للتشكيل و الطرق.

و لتفسير سلوك المعادن هذا طورت في بداية الأمر نماذج بسيطة مبنية أساسا على الميكانيك التقليدي (الكلاسيكي). لكن لسوء الحظ لقيت هذه النماذج إشكالات لم تجد لها حولا. الفكرة الأساسية لكل النماذج التقليدية و حتى النماذج الكمية البسيطة هي: بإمكان إلكترونات تكافؤ الذرات المكونة للمعدن أن تتحرر عن ذراتها الأم لتصبح غير متموضعة (أي تنتمي لكل البلورة) و تتحرك داخله بحرية. تشكل هذه الإلكترونات مجتمعة (غاز) يسمى غاز الإلكترونات الحرة مسؤول عن الناقلية الكهربائية العالية (و الحرارية كما رأينا سابقا) للمعدن.

نموذج الإلكترون الحر

يمكن تفسير كثير من الخصائص الفيزيائية المهمة للمعادن البسيطة و حتى بعض المعقدة منها اعتمادا على هذا النموذج.

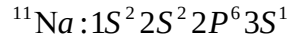
في المعدن تصبح إلكترونات التكافؤ في الذرات الحرة إلكترونات نقل غير متموضعة تتحرك بحرية داخله.

- يلقي نموذج الإلكترون الحر نجاحا كبيرا. لكن من الضروري الإشارة إلى أن الإلكترونات الحرة لا تتحرك في الفراغ بل في شبكة دورية مكونة من الأيونات الموجبة (الذرات الأم المتأينة) تلعب في النموذج التقليدي دور مراكز تشتيت للإلكترونات مسؤولة عن المقاومة الكهربائية للمعادن.

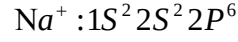
- تبلغ أهمية هذا النموذج مداها الأعظم في التجارب المرتبطة بالخصائص الحركية للإلكترونات النقل.

المعادن البسيطة (الألكانات): Rb, Cs, K, Na, Li

معدن الصوديوم (Na): تحتوي ذرة الصوديوم الحرة على 11 إلكترون تتوزع كما يلي:

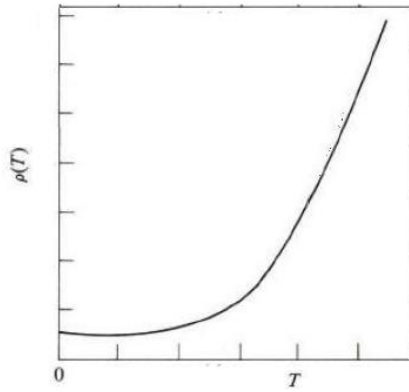


إلكترون التكافؤ الوحيد يوجد في الحالة 3S. سوف يتحرر هذا الإلكترون في المعدن ليصبح إلكترون نقل يتحرك بحرية داخله. سيكون التوزيع الإلكتروني في ذرته الأم كما يلي:



بتقريب جيد فتوزيع الإلكترونات في الأيون Na^+ في المعدن هو نفسه التوزيع في الذرة الحرة.

الناقلية الكهربائية (σ): خاصية تصف قدرة المادة على نقل الكهرباء و هي إحدى أهم خصائص الجسم الصلب. $\rho = \frac{1}{\sigma}$ حيث ρ هي المقاومة الكهربائية.



النموذج التقليدي: درود سنة (Drude 1900) افترض ما يلي:

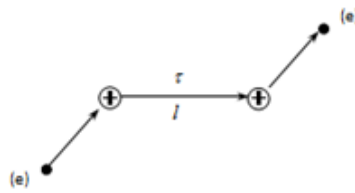
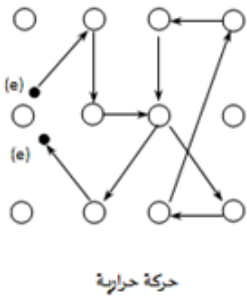
- كل ذرة في المعدن تشارك بحوالي إلكترون واحد في غاز الإلكترونات الحرة. كل إلكترون له طاقة حركية متوسطة مقدارها:

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

- متوسط السرعة الحرارية للإلكترونات الحرة. $V_{th} = \left(\frac{3k_B T}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$

- بعد كل تصادم مع كاتيون (أيون موجب) تنعدم السرعة المكتسبة بتأثير خارجي (السرعة الجرية).

مفهوم التصادم: ميكانيكي عياني: l - طول المسار الحر (البعد بين مركزي تشتت)، τ - زمن التصادم (الزمن بين تصادمين). $\left(\tau = \frac{l}{V_{th}} \right)$



المعادلة التفاضلية التي تحكم حركة الإلكترونات الحرة تحت تأثير حقل كهربائي خارجي $\vec{E}$ في المدى بين تصادمين هي:

$$\frac{d\vec{V}_D}{dt} = -\frac{e}{m}\vec{E}, \quad \vec{V}_D = -\frac{e}{m}\vec{E} \cdot t, \quad \vec{V}_D(t=0) = 0, \quad \vec{V}_D(t=\tau) = -\frac{e}{m}\vec{E} \cdot \tau$$

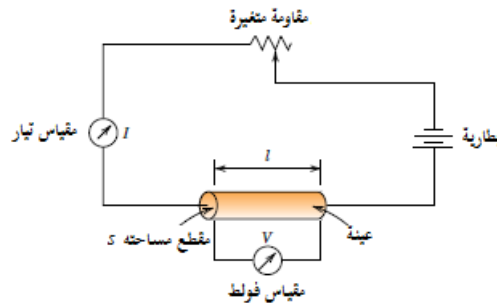
$$(\vec{V}_D = \vec{V}_{ent})$$

$$\vec{j} = -ne \vec{V}_D = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = \sigma\vec{E}, \quad (\sigma = \frac{ne^2\tau}{m})$$

تعطى كثافة التيار بالعلاقة:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \quad \text{قانون أوم على المستوى المجهرى. على المستوى الجهرى يكتب قانون أوم بالشكل: } V = R.I$$

لسلك أسطوانى طوله L ومساحة مقطعه S تعطى المقاومة بالشكل: $V = RI$ ، $\tau = \frac{l}{V_{th}}$ ، $\sigma = \rho^{-1}$ ، $R = \rho \frac{l}{S}$ ،



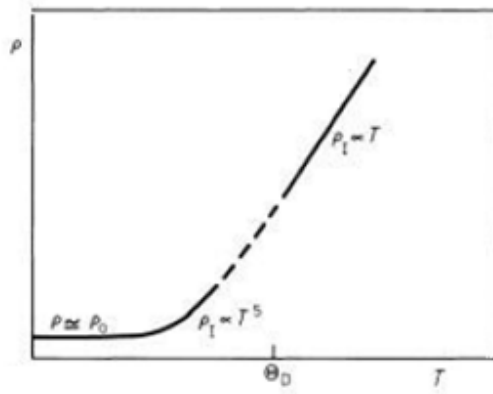
$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = \frac{ne^2}{m}\left(\frac{l}{V_{th}}\right)\vec{E} = \frac{ne^2l}{(3mk_B T)^{\frac{1}{2}}}\vec{E} = \frac{ne^2l}{(3mk_B)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(T)^{\frac{1}{2}}}\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

$$\sigma \propto \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \rho \propto \sqrt{T}$$

❖ مقارنة بالتجربة ينهار نموذج درود التقليدي للأسباب التالية:

$$- \quad \sigma \propto \frac{1}{\sqrt{T}} (\rho \propto \sqrt{T}) \quad \text{غير صحيحة و التجريبي هو:}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ll} \rho \propto T, & T \geq 200 \text{ K} \\ \rho \propto T^5, & T \leq 20 \text{ K} \\ \rho = Cst, & T \ll \ll \end{array} \right| \left| \begin{array}{ll} \sigma \propto \frac{1}{T}, & T \geq 200 \text{ K} \\ \sigma \propto \frac{1}{T^5}, & T \leq 20 \text{ K} \\ \sigma = Cst, & T \ll \ll \end{array} \right|$$



- مفهوم التصادم التقليدي غير قابل للتطبيق على المستوى الذري ففي درجات الحرارة الواطئة قد يصل طول المسار الحر الوسطي l إلى 1 cm وهذا غير ممكن تصوره طبقا للمفهوم الكلاسيكي للتصادم (إلكترون يتحرك بمقدار 10^8 فاصلة ذرية دون أن يصطدم !!!).
- لم يبين النموذج التقليدي سبب إهماله التفاعل الإلكترون-الإلكتروني (بالرغم من العدد الكبير للإلكترونات الحرة).
- لا يمكن تصور غاز الإلكترونات الحرة كغاز تقليدي و إلا كان من نتائج ذلك أن:

$$E_c^{el} = \frac{3}{2} k_B T, E_{tot} = \frac{3}{2} N k_B T, \quad C_{el} = \frac{\partial E_{tot}}{\partial T} = \frac{3}{2} N k_B = \frac{1}{2} C_{lattice}$$

حيث C_{el} هي السعة الحرارية لغاز الإلكترونات الحرة وهي نتيجة غير صحيحة ولا تتفق مع التجربة.

تجريبيا: - C_{el} صغيرة جدا و مهمة في درجات الحرارة العالية و العادية.

$$T \approx 15\text{ K} : C_{el} = f(T) -$$

❖ بالرغم من أن نموذج درود جانب الصواب في كثير من الأمور مع محدودية نتائجه إلا أنه حقق بعض النجاحات منها:

- قدم أول تفسير نظري لقانون أوم (Ohm's Law) : $\vec{j} = \sigma \vec{E}, V = R.I$
- علاقة الناقلية الحرارية (K) بالناقلية الكهربائية (σ) : $\frac{K}{\sigma.T} = Cte = L$ وهي نتيجة مؤكدة مخبريا من أجل أغلب المعادن. لدينا:

$$\langle V^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m}, C_{el} = \frac{3}{2} n k_B, \sigma = \frac{n e^2 \tau}{m}, K_{el} = \frac{1}{3} C_{el} \langle V^2 \rangle \tau$$

$$\frac{K}{\sigma.T} = 3 \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 = 1.11 \times 10^{-8} \text{ V}^2 . \text{K}^{-2} \text{ بالتعويض نحصل على:}$$

$$L - \text{عدد لورنتز (Lorentz)} \text{ و هو في حدود ما تخبر به التجربة أي: } 1 \times 10^{-8} \text{ V}^2 . \text{K}^{-2} < L = \frac{K}{\sigma.T} < 3 \times 10^{-8} \text{ V}^2 . \text{K}^{-2}$$

$$\text{مثال: } L_{Cu}(0^\circ\text{C}) = 2.23 \times 10^{-8} \text{ V}^2 . \text{K}^{-2}$$

ملاحظات:

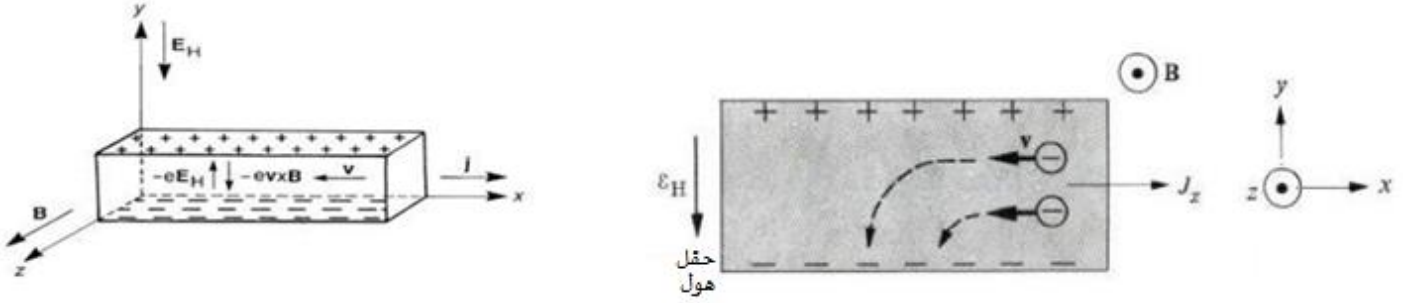
1- C_{el} المستعملة أكبر من الحقيقية بكثير .

2- الافتراض أن زمن التصادم τ في الآلية الحرارية هو نفسه في آلية النقل غير مبرر.

3- $\langle V^2 \rangle$ المستعملة أقل بكثير من الحقيقية.

تجربة هول Hall

المبدأ: معدن بهيئة متوازي مستطيلات يمر فيه تيار كهربائي في الاتجاه x مثلا (حاملات الشحنة هي الإلكترونات) يخضع لحقل مغناطيسي عمودي على اتجاه سريان التيار (z) كما في الشكل التالي:



ستخضع إلكترونات النقل بداية لقوة لورنتز التي تعطى بالعلاقة: $\vec{F}_l = -e \vec{V}_D \times \vec{B}$

تحت تأثير $\vec{F}_l$ سوف تنحرف إلكترونات النقل في الاتجاه $(-\vec{e}_y)$. ليتشكل حقلًا يزداد باستمرار يسمى حقل هول. يتوقف هذا الانحراف عندما

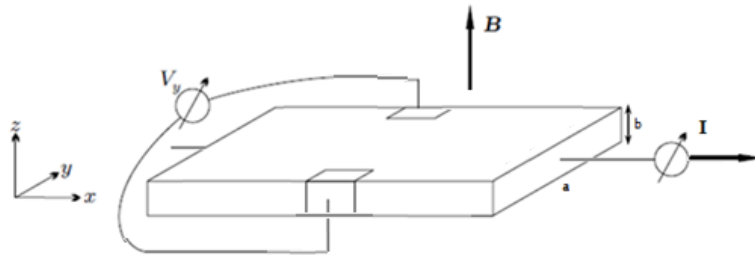
تتساوى القوتان $\vec{F}_l$ و $\vec{F}_H$ حيث $\vec{F}_H = -e \vec{E}_H$ عندئذ: $e E_H = e V_D B$ و منه حقل هول E_H يساوي: $E_H = V_D B$

$$\underline{\underline{لدينا: E_H = \left(-\frac{1}{ne}\right) j_x B \text{ و منه: } j_x = -ne V_D = -ne \frac{E_H}{B}}}$$

$R_H = -\frac{1}{ne}$ - ثابت (معامل) هول، n هو تركيز الإلكترونات الحرة. الإشارة السالبة تعني أن حاملات الشحنة (التيار) هي الإلكترونات. إن

لمفعول هول في فيزياء المعادن و أنصاف النواقل خاصة أهمية بالغة. معامل هول يحمل إشارة و تركيز حاملات الشحنة الحرة و بالتالي فيجاءه

تجريبيا يقود إلى معرفة طبيعة و كثافة حاملات الشحنة الحرة. من الناحية العملية تركيب التجربة كما يلي:



$$\frac{V_y}{a} = \frac{V_H}{a} = \left(-\frac{1}{ne}\right) \frac{I}{ab} B \Rightarrow V_H = \left(-\frac{1}{ne}\right) \frac{I}{b} B = R_H \frac{I}{b} B, \quad R_H = \frac{V_H b}{I B}$$

- في بعض المواد حيث يوجد أكثر من نوع واحد لحاملات الشحنة الحرة لا تعطى عبارة معامل هول بالشكل السابق مثال ذلك بعض أنصاف النواقل حيث تشارك كل من الإلكترونات و الثقوب في عملية النقل.
- لوحظ في المعادن متعددة التكافؤ أن معامل هول يظهر أحيانا كبير و حتى بإشارة موجبة أيضا و هو ما لا يمكن تفسيره حسب النموذج المصاغ آنفا.
- معامل هول تابع أحيانا للحقل المغناطيسي و لدرجة الحرارة و هذا غير مفسر.

بعض قيم معامل هول لبعض المعادن:

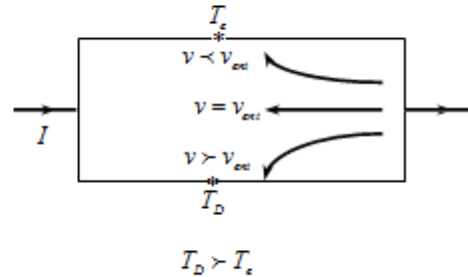
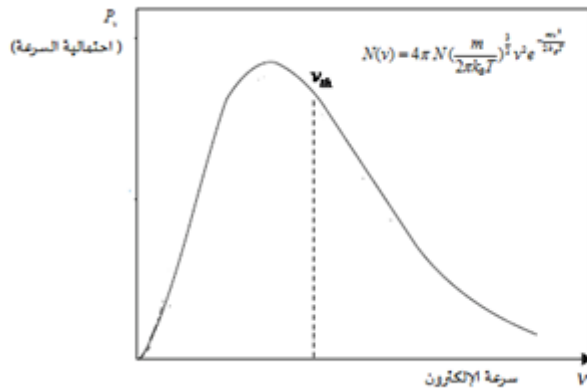
Metal	Na	K	Cu	Au	Be	Mg	Cd	Al
$-1/(R_H Ne)$	+0.9	+1.1	+1.3	+1.5	-0.2	+1.5	-2.2	+3.5

المقاومة الكهربائية في وجود حقل مغناطيسي:

عندما تخضع عينة معدنية لحقل مغناطيسي تزداد مقاومتها الكهربائية.

حسب نموذج درود: كل الإلكترونات لها سرعة واحدة $\vec{V}_D$. بداية يتكون حقل هول ثم يزول تأثير الحقل على الإلكترونات و من ثم لا تأثير على المقاومة و هذا غير صحيح.

نموذج لورنتز (Lorentz): طيف سرعي مع توزيع ماكسويل بولتزمان للسرعات. ليكن $N(v)$ عدد الإلكترونات ذات السرعة v .



بوجود حقل مغناطيسي $\vec{B}$ تعاني الإلكترونات ذات السرعات الأقل و الأكبر من السرعة الجرية من انحرافات (مساراتها طويلة) و بالتالي تزداد المقاومة الكهربائية. سيلاحظ فرق في درجة الحرارة بين نقطتين متقابلتين في القطعة المعدنية.

اينشتاين: الإشعاعات (الأمواج) الكهرومغناطيسية تتكون من فوتونات (طبيعة جسيمية). طاقة و اندفاع الفوتون يساويان:

$$E = h\nu = \hbar \omega, \quad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

حيث ν و λ هما التواتر و الطول الموجي للإشعاع الكهرومغناطيسي. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ الشعاع الموجي.

دوبرولي: للإلكترون (جسيم مشحون) أيضا طبيعة موجية. و بشكل عام فكل جسيم في حالة حركة ترافقه موجة خصائصها كالتالي:

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \quad \lambda = \frac{h}{p}, \quad k = \frac{p}{\hbar}$$

شرودينغر: أيد الفكرة. بالإمكان تمثيل الإلكترون رياضيا بموجة ملائمة.

موجة إلكترونية: الكمية المتغيرة ψ (ψ) و هو تابع للموضع و الزمن $\psi(\vec{r}, t)$ يسمى التابع الموجي.

المفهوم الفيزيائي لـ ψ : مقدار مركب (جزء حقيقي + جزء تخيلي) يصف الحالة الديناميكية للإلكترون (يمثل حركة الإلكترون، يحدد أين

يكون و ما هي طاقته في لحظة ما). المقدار $|\psi|^2 dV$ يعبر عن احتمالية وجود الإلكترون داخل حجم dV في لحظة ما.

$$P = \int_{space} |\psi|^2 dV = 1, \quad dV = dx dy dz$$

يسمى شرط التنظيم أو التقنين ($Normalisation$).

لنأخذ ذرة الهيدروجين: إلكترون وحيد يشغل الحالة $1S$ ($H^1:1S^1$)

في الميكانيك الكلاسيكي: قانون نيوتن الثاني $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$

في الميكانيك الكمي: تحقق موجة دوبرولي معادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن التالية:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U \right] \psi(\vec{r}, t) = i \hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

U - الطاقة الكامنة للجسيم (الإلكترون)، ψ التابع الموجي المرافق للإلكترون. المقدار $|\psi(\vec{r}, t)|^2 dV$ يعبر عن احتمالية وجود الإلكترون في

حجم عنصري مقداره dV . يحقق التابع الموجي شرط التنظيم التالي:

$$\int_s \left| \psi(\vec{r}, t) \right|^2 dV = 1$$

حيث التكامل يكون على كامل الفضاء. إذا كان U مستقل عن الزمن فإن التابع الموجي يمكن كتابته بالشكل التالي (فصل المتغيرين):

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i(\frac{E}{\hbar})t}$$

حيث $\psi(\vec{r})$ تابع مستقل عن الزمن يحقق المعادلة التالية:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

تسمى هذه المعادلة أيضا بمعادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن. حل معادلة شرودينغر (باستعمال الشروط الحدودية) يعني إيجاد التوابع الموجية (ψ) والطاقات المسموحة (القيم الذاتية) (E).

معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن لجسيم حر ($U = 0$):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

$$H^0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

- مؤثر هاملتون التفاضلي.

- الإلكترون حر في المعدن لكن لا يمكنه المغادرة (أي الإفلات من المعدن). أي أن الإلكترون موجود في بئر كموني U

- الإلكترون داخل صندوق كموني على هيئة مكعب أبعاده $L = V^{\frac{1}{3}}$

- معادلة شرودينغر:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}), \quad \nabla^2 \psi(\vec{r}) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + k^2 \psi(\vec{r}) = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi(\vec{r}) = \psi_k(\vec{r}) = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

معادلة تفاضلية نقترح حل لها بالشكل:

$$\int_V \psi_k(\vec{r}) \psi_k^*(\vec{r}) dV = \int_V \left| \psi_k(\vec{r}) \right|^2 dV = 1 \quad \text{مع:}$$

التكامل أعلاه يعبر عن احتمالية وجود الإلكترون داخل الصندوق الذي حجمه V .

$$\psi_k(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

نعوض في معادلة شرودينغر فنحصل على:

$$\frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E_k = \hbar \omega_k$$

$$\vec{k} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k} \text{ - علاقة التبديد. الشعاع الموجي}$$

مفهوم $\vec{k}$

$$\vec{P} \xrightarrow{QM} \vec{P}^\circ = -i \hbar \vec{\nabla} \leftarrow \text{مؤثر الاندفاع}$$

$$-i \hbar \vec{\nabla} \psi_k(\vec{r}) = \hbar \vec{k} \psi_k(\vec{r})$$

$$\psi_k(\vec{r}) \text{ - التابع الذاتي لمؤثر الاندفاع } \vec{P}^\circ \text{ الموافق للقيمة الذاتية } \hbar \vec{k}$$

$$\vec{P} = m \vec{V} \Leftrightarrow \vec{P} = \hbar \vec{k} \text{ (موجة) (جسيم)}$$

الشروط الحدودية الدورية

$$\psi_k(x+L, y, z) = \psi_k(x, y+L, z) = \psi_k(x, y, z+L) = \psi(x, y, z)$$

$$\therefore e^{ik_x L} = e^{ik_y L} = e^{ik_z L} = 1 \Leftrightarrow k_x, k_y, k_z = 0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{4\pi}{L}, \pm \frac{6\pi}{L}, \dots$$

$$k_i = \frac{\pm 2\pi}{L} n_i$$

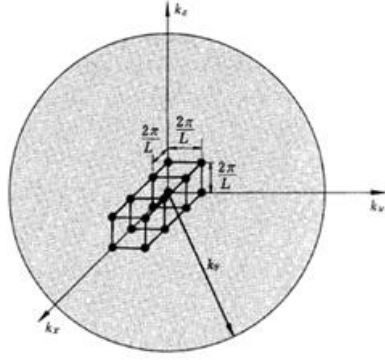
الحالة: $(\psi_k(\vec{r})) E_k, \vec{k}, \vec{s}$

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, k_i = \frac{2\pi n_i}{L}, s = \pm \frac{1}{2}$$

ملء الحالات: اعتمادا على مبدأ باولي: $E \propto k^2$ ، سطح تساوي الطاقة كروي. تزداد الطاقة كلما ابتعدنا عن المبدأ O، يكون الملء من الحالات

ذات الطاقة الأدنى نحو الحالات ذات الطاقة الأعلى. لدينا في المعدن عددا من الإلكترونات الحرة مقداره N_{el} تقع أشعتها الموجية داخل كرة (كرة

فيرمي) نصف قطرها k_F .



$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}, k_F = \left(\frac{2mE_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} E_F^{\frac{1}{2}}$$

$$k_F = \left(\frac{3\pi^2 N_{el}}{V} \right)^{\frac{1}{3}} = (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}}, (n = \frac{N_{el}}{V}) \text{ ومنه: } \frac{\frac{4}{3}\pi k_F^3}{(2\pi)^3} = \frac{N_{el}}{2V}$$

n - تركيز الإلكترونات الحرة في المعدن.

الحالة الأرضية لغاز الإلكترونات الحرة: عند درجة الصفر المطلق ($T = 0 \text{ K}$):

- كل الحالات داخل كرة فيرمي مشغولة و الحالات خارج كرة فيرمي فارغة.

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} m v_F^2, \quad v_F = \frac{\hbar}{m} (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}}$$

v_F - سرعة كوانتية

كثافة الحالات السبينية $D(E)$

$$g(k)dk = \frac{4\pi k^2 dk}{V_k} = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}$$

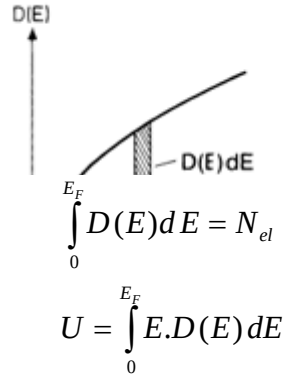
$$D(E)dE = 2g(k)dk = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$$

$D(E)dE$ - عدد الحالات السبينية (عدد الإلكترونات) في المدى $[E, E + dE]$.

$$D(E) = \frac{V}{\pi^2} k^2 \frac{dk}{dE} = \frac{V}{\pi^2} k^2 \frac{1}{\frac{dE}{dk}}$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \frac{dE}{dk} = \frac{\hbar^2 k}{m}, E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore D(E) = \frac{3}{2} N \frac{\sqrt{E}}{(E_F)^{\frac{3}{2}}}, \quad D(E_F) = \frac{3}{2} N \frac{1}{E_F}$$



طاقة الحالة الأرضية.

$$U = \sum_k E_k$$

$k: 0 \xrightarrow{\text{باستمرار}} k_F$

$$U = \int_0^{E_F} E \left(\frac{3}{2} \frac{N \sqrt{E}}{E_F} \right) dE = \frac{3}{5} N E_F$$

ضغط غاز الإلكترونات ($T = 0 \text{ K}$)

$$U = \frac{3}{5} N \left(\frac{\hbar^2}{2m} \left[(3\pi^2 \frac{N_{el}}{V})^{\frac{1}{3}} \right]^2 \right)$$

يعرف ضغط غاز الإلكترونات p بالشكل التالي:

$$p = - \frac{\partial U}{\partial V} = \frac{2}{5} n E_F$$

دالة توزيع الإلكترونات في المعدن: كيف تتوزع الإلكترونات على المستويات الطاقية. تنقسم المجموعات (الجمال) إلى قسمين:

- منحلة (منحلة)

- غير منحلة (غير منحلة)

أ- منحلة: $N \cong G$ (N - عدد الدقائق، G - عدد السويات الطاقية)

التكميم: سويات الطاقة متقطعة: غاز كوانتي ومن تم يؤخذ نوع الدقيقة في الحساب. يستعمل إحصاء بوز اينشتاين في حالة كون الدقائق هي

الفوتونات، الفونونات (تسمى البوزونات) حيث $s = n \hbar$. و يستعمل إحصاء فيرمي ديراك في حالة كون الدقائق هي الإلكترونات، البروتونات،

النيوترونات (تسمى الفيرميونات) حيث $s = (2n + 1) \frac{\hbar}{2}$

ب- غير منحلة $N \ll G$: مثلا سويات الطاقة مستمرة: غاز تقليدي. يستعمل إحصاء ماكسويل-بولتزمان.

نستعمل إحصاء فيرمي ديراك (الدقائق هي الإلكترونات). تعطى احتمالية انشغال السوية الطاقية E بالشكل التالي:

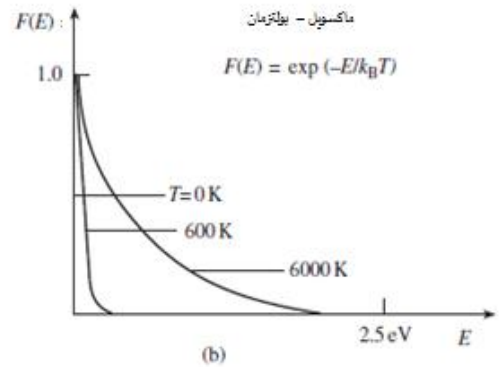
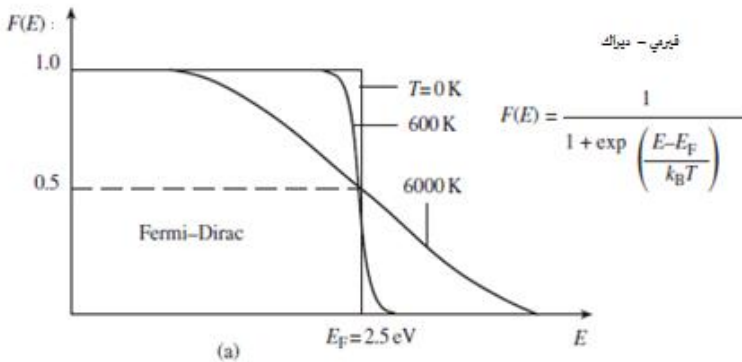
$$F(E) = \frac{1}{1 + \exp \frac{E - \mu}{k_B T}} \quad (1)$$

$\mu(T)$ - يسمى الجهد الكيميائي. عند $0 K$ كل الحالات تحت E_F مشغولة و الحالات فوق E_F فارغة و منه:

$$F(E) = \begin{cases} 1 & , E \leq E_F \\ 0 & , E > E_F \end{cases} \quad (2)$$

$$F(E) = \frac{1}{1 + \exp \frac{E - E_F}{k_B T}}$$

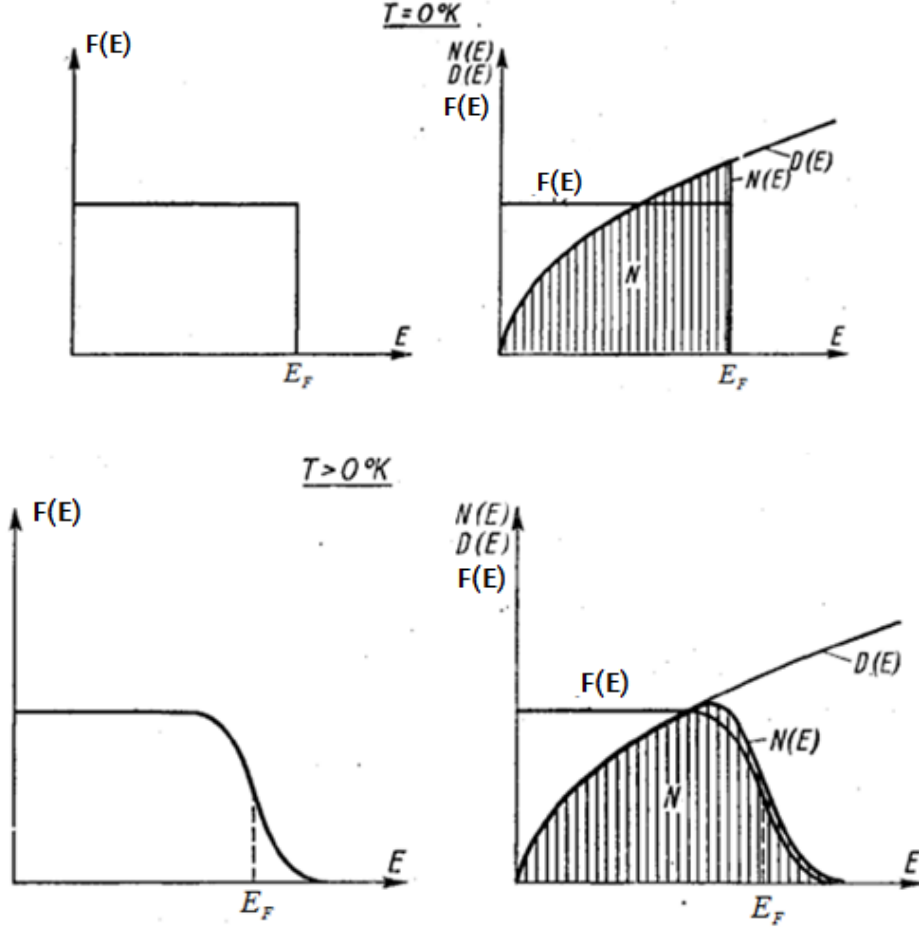
بوضع $\mu = E_F$ تتحقق (2) إذن:



- $\mu = E_F$ من أجل $T = 0 K$

$$T = 0 K : \int_0^{E_F} D(E) dE = N_{el}$$

$$T > 0 K : \int_0^{+\infty} F(E) D(E) dE = N_{el}$$



بالتعويض عن $F(E)$ و $D(E)$ في التكامل أعلاه نحصل على:

$$\int_0^{+\infty} \frac{3N}{2E_F^2} \frac{\sqrt{E} dE}{e^{\beta(E-\mu)}} = N_{el}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

التكامل أعلاه عبارة عن تكامل معموم (خاص) بإجرائه مستعملين بعض التقريبات المهمة نحصل على:

$$\mu(T) \cong E_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2\right), \quad E_F = k_B T_F \Rightarrow T_F = \frac{E_F}{k_B}$$

$$T \ll T_F, \quad \mu(T) \cong E_F$$

$$\begin{array}{lll}
T = 0 \text{ K} & E > E_F; & F(E) = 0, \\
& E \leq E_F; & F(E) = 1, \\
T > 0 \text{ K} & E \gg E_F; & F(E) \approx 0, \\
& E \ll E_F; & F(E) \approx 1, \\
& E = E_F & F(E) = \frac{1}{2}.
\end{array}$$

ليكن ΔN هو عدد الدقائق (الإلكترونات) فوق سطح فيرمي. يمكن تقديره كما يلي:

$$\Delta N \cong D(E_F) k_B T$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{3}{2} \frac{T}{T_F} \ll$$

$$\left. \frac{\Delta N}{N} \right|_{500^\circ \text{C}} \cong 2 \%$$

السعة الحرارية لغاز الإلكترونات الحرة:

النموذج التقليدي (دروود): $C_{el} = \frac{3}{2} N k_B$ و مستقلة عن درجة الحرارة حيث N هو عدد الإلكترونات الحرة.

$$C_{el}^{Drude} = \frac{3}{2} N k_B = \frac{C_{lattice}}{2}$$

لكن تجريبيا: $\Rightarrow$

$$* C_{el} \propto T$$

$$* C_{el} \leq 0.01 C_l \quad (T = 300 \text{ K})$$

السعة الحرارية وفق النظرية الكمية لنموذج الإلكترون الحر:

زيادة درجة الحرارة يتغير توزيع فيرمي ديراك. هذا التغير يمس فقط الإلكترونات التي تقع بجوار سطح فيرمي بمقدار $(k_B T)$ و التي تريح طاقة

من رتبة $k_B T$. الطاقة الحرارية الكلية التي يربحها غاز الإلكترونات الحرة $U(T)$ تساوي تقريبا:

$$U(T) \cong \Delta N \cdot k_B T = \frac{3}{2} k_B \frac{T^2}{T_F}$$

$$C_{el} = \frac{\partial U(T)}{\partial T} = 3 N k_B \frac{T}{T_F}$$

عبارة C_{el} هذه حتى وإن كانت تقريبية فهي تبين التناسب بين السعة الحرارية الإلكترونية و درجة الحرارة. في المعادن $T_F \cong 5 \times 10^4 \text{ K}$ إذن:

$$\left. \frac{T}{T_F} \right|_{300^\circ \text{C}} \cong 10^{-2} = 1\%$$

الحساب الدقيق للسعة الحرارية الإلكترونية يقود إلى عبارة لا تختلف عن العبارة السابقة سوى في ثابت التناسب مع T و هي.

$$C_{el} = \frac{\pi^2}{2} N k_B \frac{T}{T_F}$$

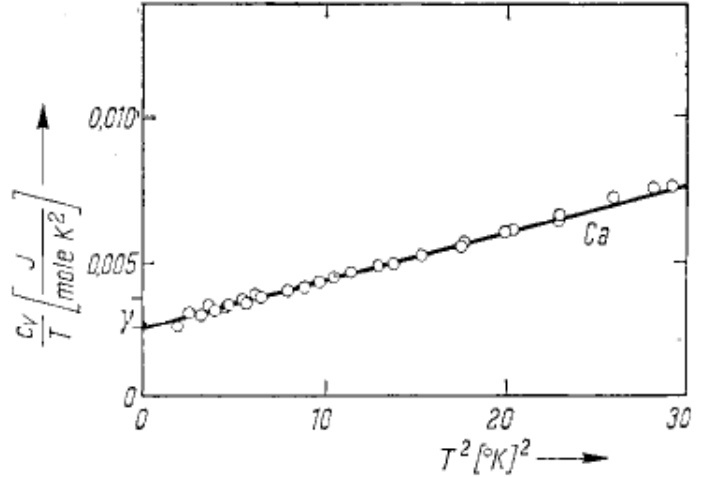
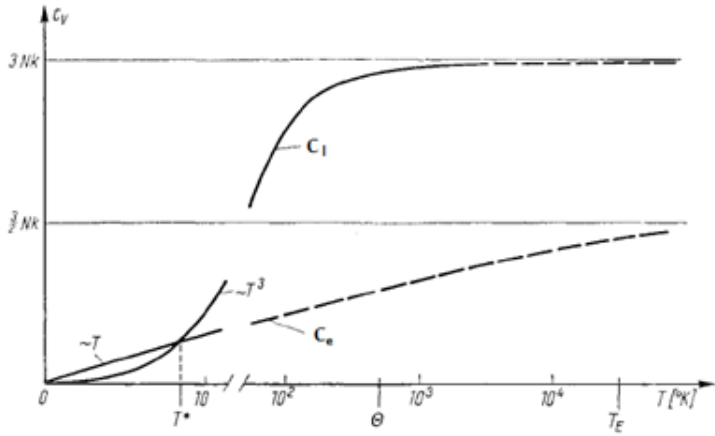
السعة الحرارية التجريبية للمعادن:

في درجات الحرارة المنخفضة: $C_L \propto T^3$, $C_{el} \propto T$ ومنه:

$$C_V = C_l + C_{el} = AT^3 + \gamma T, \quad A = \frac{234 N k_B}{\theta_D^3}, \quad \gamma = \frac{\pi^2}{2} \frac{N k_B}{T_F}$$

$$\frac{C_V}{T} = AT^2 + \gamma$$

$$\frac{C_V}{T} = f(T^2) \text{ - مستقيم ميله } A \text{ لا يمر بالمبدأ } O$$



$$\gamma_{th} = \frac{\pi^2}{2} \frac{N k_B}{T_F} = \frac{\pi^2}{2} N \frac{k_B^2}{E_F}$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N_{el}}{V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\gamma_{th} \propto m, \quad \frac{\gamma_{mes}}{\gamma_{th}} = \frac{m_{ap}}{m}$$

m_{ap} - الكتلة الظاهرية للإلكترون. إذا كانت النظرية الكمية هذه صحيحة بالكامل عندئذ يجب أن تكون: $\frac{m_{ap}}{m} = 1$

لوحظ اختلاف النسبة عن الواحد بهذا القدر أو ذاك بحيث: $0.6 < \frac{m_{ap}}{m} < 2.2$ والأسباب هي:

- إلكترونات التكافؤ ليست حرة فهي تتبادل التأثير مع الكمون الدوري للشبكة.

- إهمال التفاعل مع الفونونات

- التفاعل الإلكتروني - الإلكترون يزداد في كتلة الإلكترون الظاهرية

الناقلية الكهربائية وقانون أوم (Ohm):

$\vec{P} = m \vec{v} = \hbar \vec{k}$ - اندفاع الإلكترون. وجود إلكترون شحنته $(-e)$ في حقل كهربائي يجعله خاضعا لقوة $\vec{F} = -e \vec{E}$ و بالتالي معادلة حركة الإلكترون هي بالشكل:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = -e \vec{E}$$

$$\int_{\vec{k}(0)}^{\vec{k}(t)} d\vec{k} = -\frac{e}{\hbar} \vec{E} \cdot t = \vec{k}(t) - \vec{k}(0)$$

هذه النتيجة تبين أن إلكترونات في اللحظة $t = 0$ يشغل الحالة $\vec{k}(0)$ في كرة فيرمي مركزها O سيظل بعد زمن t الحالة $\vec{k}(t)$ في كرة فيرمي الممركزة في O' . إذا لم تخضع الإلكترونات لعملية كبح فإن كرة فيرمي ستستمر في الانزياح في الفضاء $\vec{k}$ بسرعة:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -\frac{e}{\hbar} \vec{E} \quad (1)$$

في الواقع يحدث كبح للإلكترونات بسبب التصادم مع الشبكة (الفونونات) و العيوب الشبكية. بمكاملة طرفي العلاقة (1) على المجال $[0 - \tau]$ نجد:

$$\delta\vec{k} = -\frac{e}{\hbar} \vec{E} \tau$$

τ - زمن التصادم

$$\hbar \delta\vec{k} = m \delta\vec{v} = -e \vec{E} \tau \Rightarrow \delta\vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E} \tau = \vec{v}_{ent} = \vec{v}_{drift}$$

إذا كان لدينا n إلكترونات شحنته $(-e)$ فإن:

$$\vec{j} = n(-e) \vec{v}_{ent} = \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E} = \sigma \vec{E} = ne\mu \vec{E} / \mu = \frac{e\tau}{m}$$

$$\sigma = \frac{ne^2 \tau}{m}, \rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{ne^2 \tau}$$

μ - حركية الإلكترونات.

التشتت الضعيف للإلكترونات: تظهر الطبيعة الكمية (الموجية) للإلكترونات جلية في الوسائط التالية:

- السرعة الوسطى للإلكترونات الحرة v_{moy}

- مسارها الحر الوسطي λ .

- زمن المسار الحر الوسطي τ .

$$\lambda = v_{moy} \tau$$

$$V_{Th} = \left(\frac{3k_B T}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = v_{moy}$$

مستعملة في النموذج التقليدي. الإلكترونات التي يتم التعامل معها هي إلكترونات جوار سطح فيرمي ومن ثم:

$$v_{moy} \rightarrow v_F = \left(\frac{2k_B T_F}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

مثال: في بلورة النحاس عالية النقاوة نجد $\tau = 10^{-9} s$ عند $T = 4 K$. $T_F \cong 8.10^4 K$, $v_F = 1.57 \times 10^8 \frac{cm}{s}$

$$\lambda = v_F \tau = 0.3 cm$$

البعد بين الذرات (وسيط الشبكة) من رتبة $0.3 nm$. هذا يعني أن الإلكترون سيلقي في مساره حوالي 10^7 ذرة دون أن يتشتت (أي يصطدم بها) وهذا يصعب تصوره في النموذج التقليدي. هذا التشتت الضعيف يأتي أساساً من الطبيعة الموجية للإلكترون.

أصل المقاومة:

تعتمد كل من المقاومة (أو الناقلية) على درجة الحرارة. إذا تصورنا إلكترونات يتحرك عبر معدن تحت تأثير حقل كهربائي. سيصطدم هذا الإلكترون أثناء حركته بالذرات الأم ليخسر طاقته الحركية. وبالتالي تعرقل الذرات حركة الإلكترونات مسببة مقاومة لسريان التيار. سبب زيادة هذه المقاومة مع درجة الحرارة كون زيادة درجة الحرارة تؤدي إلى زيادة اهتزاز الذرات حول مواضع توازنها وهو ما يرفع من زيادة تصادم الإلكترونات مع هذه الذرات المهتزة. غير أنه ليس فقط الزيادة في درجة الحرارة تؤدي إلى زيادة المقاومة فهناك العيوب التي تشمل الانخلاعات والشوائب والفراغات التي تساهم في المقاومة.

تشتت الإلكترونات بالفونونات: نرمز بـ τ لزمن المسار الحر الوسطي في هذه الحالة:

$$\omega_{ph} = \frac{1}{\tau} \propto N_{ph} \propto T \quad (T > \theta_D), \quad N_{ph} = \int_0^\infty \langle n \rangle D(\omega) d\omega$$

ω_{ph} - تواتر التصادم الإلكتروني- الفونوني.

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m}, \quad \rho = \frac{1}{\sigma} \propto \frac{1}{\tau} \Rightarrow \rho_{ph} \propto T \quad (T > \theta_D)$$

من أجل $T \ll \theta_D$ رأينا سابقاً أن $N_{ph} \propto T^3$ لكن $\rho \propto T^5$ تجريبياً.

لا تخلو البلورات أبدا من العيوب و الشوائب.

$$\omega_{imp} = \frac{1}{\tau_{imp}} \propto N_{imp}$$

ω_{imp} -تواتر التصادم الإلكتروني - العيبي. من أجل $T \ll$ فإن N_{imp} لا يتعلق بدرجة الحرارة و منه:

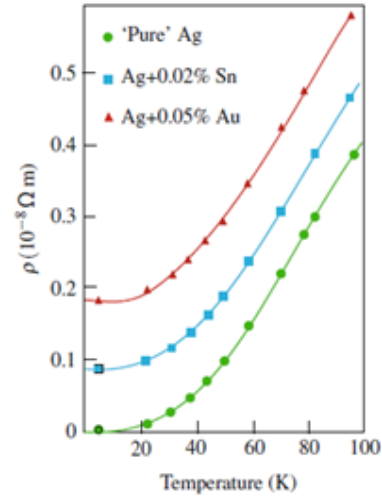
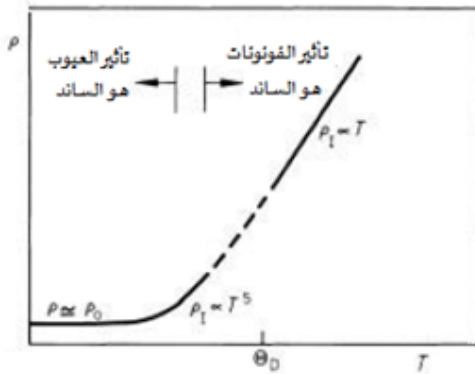
$$\rho_{imp} \propto \frac{1}{\tau_{imp}} = cte$$

و بالتالي ففي درجات الحرارة الواطئة تشتمل مقاومة المعدن على حدين حد يتعلق بالتشتت الإلكتروني- الفونوني و الآخر بالتشتت الإلكتروني العيبي. إذا كانت الآليتين مستقلتين فإن:

$$\omega_{tot} = \omega_{ph} + \omega_{imp}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{ph}} + \frac{1}{\tau_{imp}}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{ne^2} \frac{1}{\tau} = \rho_{ph} + \rho_{imp}$$

$\rho_{ph}(T=0) = 0$ و منه $\rho(T=0) = \rho_{imp}$ إذن: $\rho(T) = \rho_{ph}(T) + \rho(0) \Rightarrow$ علاقة ماتيسون



الناقلية الحرارية للمعادن:

$$K = \frac{1}{3} C v \lambda, \quad C_{el} = \frac{\pi^2}{2} N k_B^2 \frac{T}{E_F}$$

الإلكترونات التي تساهم في العمليات الحرارية هي إلكترونات جوار سطح فيرمي أي: $\lambda = v_F \tau_F$, $v = v_F$,

$$K = \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{2} N k_B^2 \frac{T}{\frac{1}{2} m v_F^2} v_F v_F \tau_F$$

$$K = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 \underbrace{\left(\frac{ne^2\tau}{m}\right)}_{\sigma} \frac{T}{e^2}, \quad \frac{K}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B^2}{e^2}\right) = L = 2.45 \times 10^{-8} \text{V}^2 \cdot \text{K}^2$$

قيمة ثابت لورنتز L هي في حدود ما تخبر به التجربة.

حركة الإلكترون الحر في حقل خارجي:

$-\frac{dt}{\tau}$ - احتمالية التصادم خلال الفاصل الزمني dt - $(1 - \frac{dt}{\tau})$ - احتمالية عدم التصادم

عند اللحظة t : $\overrightarrow{\delta p(t)}$ الاندفاع المكتسب بسبب وجود الإلكترون في الحقل الخارجي.

عند اللحظة $t + dt$: $\overrightarrow{\delta p(t + dt)}$ الاندفاع المكتسب في اللحظة $t + dt$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta p(t + dt)} &= \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) (\overrightarrow{\delta p(t)} + \vec{F} dt) \\ \frac{\overrightarrow{\delta p(t + dt)} - \overrightarrow{\delta p(t)}}{dt} &= \vec{F} - \frac{\overrightarrow{\delta p(t)}}{\tau} - \frac{\vec{F} dt}{\tau} \\ \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\delta p(t + dt)} - \overrightarrow{\delta p(t)}}{dt} &= \vec{F} - \frac{\overrightarrow{\delta p(t)}}{\tau} \\ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\delta p(t)} &= \vec{F} - \frac{\overrightarrow{\delta p(t)}}{\tau} \quad (1^*) \end{aligned}$$

ظهور هذا الحد في المعادلة و كأن الإلكترون يخضع لقوة احتكاك $\vec{F}_r = -\frac{\overrightarrow{\delta p(t)}}{\tau}$. و من تم توصف عمليات التشتت الإلكترونية الفونونية و

الإلكترونية العيبية و الشائبية بالحد $-\frac{\overrightarrow{\delta p(t)}}{\tau}$.

نعيد صياغة المعادلة التفاضلية (1*) بالأخذ في الحسبان: $\overrightarrow{\delta v(t)} = \vec{v}_{ent}$, $\overrightarrow{\delta p(t)} = m \overrightarrow{\delta v(t)}$

$$m \left[\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right] \overrightarrow{\delta v(t)} = \vec{F}^{ex}$$

و هي المعادلة التفاضلية لحركة الإلكترون في حقل خارجي. إذا كان غاز الإلكترونات الحرة يخضع لحقلين مغناطيسي ($\vec{B}$) و كهربائي ($\vec{E}$)

بحيث: $\vec{B}(0,0,B)$ و $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ فإن: $\vec{F}_{ext} = -e (\vec{E} + \delta \vec{v} \wedge \vec{B})$

$$\underline{\underline{\left[\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right] m \overrightarrow{\delta v(t)} = -e (\vec{E} + \delta \vec{v} \wedge \vec{B})}} \quad \text{معادلة حركة الإلكترون:}$$

بالإسقاط على المحاور الثلاثة (x, y, z) نحصل على ثلاثة معادلات تفاضلية هي:

$$\left[\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right] m \delta v_x = -e (E_x + B \delta v_y), \quad \left[\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right] m \delta v_y = -e (E_y - B \delta v_x), \quad \left[\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right] m \delta v_z = -e E_z$$

في الحالة المستقرة: $\frac{d(m \delta \vec{v}(t))}{dt} = 0$ إذن:

$$\delta v_x = \frac{-e \tau}{m} (E_x + B \delta v_y), \quad \delta v_y = \frac{-e \tau}{m} (E_y - B \delta v_x), \quad \delta v_z = \frac{-e \tau}{m} E_z$$

بإعادة صياغة المعادلات السابقة ثم كتابتها بشكل مصفوفي نحصل على:

$$\begin{bmatrix} \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta v_z \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{bmatrix} \frac{-e \tau}{m} & B \left(\frac{e \tau}{m}\right)^2 & 0 \\ -B \left(\frac{e \tau}{m}\right)^2 & \frac{-e \tau}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-e \tau}{m} (1 + (\omega_c \tau)^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

حيث: $\omega_c = \frac{eB}{m}$ يسمى التردد السيكلوتروني. $1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss (CGS)}$. $[B] = [\text{Tesla}] = \left[\frac{\text{Weber}}{m^2}\right] = \left[\frac{V.S}{m^2}\right]$

تعطى كثافة التيار بالعلاقة: $\vec{j} = -n e \delta \vec{v} = -n e \overrightarrow{v_{ent}}$ بالإسقاط على المحاور الثلاثة نجد:

$$j_x = -n e \delta v_x, \quad j_y = -n e \delta v_y, \quad j_z = -n e \delta v_z$$

$$\begin{bmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{bmatrix} \frac{ne^2 \tau}{m} & -\frac{ne^2 \tau}{m} \left(\frac{e \tau B}{m}\right) & 0 \\ \frac{ne^2 \tau}{m} \left(\frac{e \tau B}{m}\right) & \frac{ne^2 \tau}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ne^2 \tau}{m} (1 + (\omega_c \tau)^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{bmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{bmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ \omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + (\omega_c \tau)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

حيث: $\sigma_0 = \frac{ne^2 \tau}{m}$. نعيد كتابة عبارة كثافة التيار بالشكل التالي: $\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}$. $\underline{\sigma}$ - تسمى موتر الناقلية.

التمرين 01: - أحسب كثافة الحالات الإلكترونية (السبينية) $(D(E))$ بدلالة الطاقة من أجل معدن ذو بعد واحد و ذو بعدين.

- أحسب طاقة فيرمي و متوسط الطاقة الحركية لكل إلكترون عند $0 K$ بدلالة تركيز الإلكترونات (n_{el}) في معدن ببعد واحد و ببعدين.

التمرين 02: نعتبر خطا طوله L ، حيث تتحرك الإلكترونات على طوله بحرية $(V = 0)$ خارج هذا الخط الكمون لا نهائي.

$$V = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ \infty & x \leq 0, x \geq L \end{cases}$$

1- ما هو الشكل العام لحلول معادلة شرودينغر.

2- اكتب الحلول في حالة الشروط الحدودية المثبتة. مثل سلوك التوابع الموجية الثلاث الأولى.

3- استنتج تكميم المستويات الطاقية (الحركية) المسموحة. ما هي عبارات المستويات الطاقية الثلاث الأولى E_1, E_2, E_3 .

تطبيقات: أ- حالة الذرة $^0 3A$ ، الذرة لها إلكترونين حرين فرضا.

- احسب E_1, E_2, E_3 .

- ما الطاقة التي يجب إعطاءها لأحد هذين الإلكترونين حتى ينتقل من الحالة الأرضية إلى المستوى المثار الأول.

ب- حالة الجزيئ: $^0 L = 15 A$.

- نفس السؤال في (أ): E_1, E_2, E_3 .

صيغة الجزيئ بالشكل: $CH_2 -- CH -- CH -- H_2C$. الرمز - يعني وجود إلكترون Π بإمكانه أن ينتشر بحرية على طول الجزيئ.

- ما هي الطاقة الدنيا التي يجب إعطاءها لأحد الإلكترونين حتى ينتقل من الحالة الأرضية إلى الحالة المثارة.

ج - حالة المعدن: $L = 3mm$.

1- نفس السؤال فيما يتعلق بـ E_1, E_2, E_3 .

2- يتكون الخط من ذرات متماثلة ثنائية التكافؤ بينها مسافة $a = 3A$.

- كم مستوى طاقى مشغول فى الحالة الأرضية. ما هى طاقة المستوى المشغول الأخير (E_F).

- قدر E_F ، k_F و الطاقة الدنيا δE التى تسمح بنقل الإلكترون من آخر حالة أرضية إلى أول حالة مثارة.

$$\text{يعطى: } \frac{\hbar^2}{2m} = 3.8 \text{ eV } (\text{\AA})^2$$

التمرين 03: أحسب طاقة فيرمي (E_F) عند الصفر المطلق للبوتاسيوم (CC) (كتلته المولية $M_K = 39$ و كثافته $\rho = 860 \frac{kg}{m^3}$). عين كثافة

الحالات عند E_F فى حالة: (أ) عينة حجمها 1 cm^3 ، (ب) عينة كتلتها 1 g . لماذا الاختلاف بين أ و ب. أحسب نسبة الإلكترونات الحرة فوق سطح فيرمي عند 300 K .

التمرين 04: أحسب عدد الإلكترونات التى تشغل الحالات بين E_F و $E_F - 0.5 \text{ eV}$ لوحدة الحجم فى معدن الصوديوم عند 0 K .

$$\rho_{Na} = 0.97 \frac{g}{cm^3}, M_{Na} = 22.99 \frac{g}{mol}$$

- ما هى درجة حرارة فيرمي بالكلفن؟.

التمرين 05: عينة نصف ناقلة طولها 5 mm و عرضها 4 mm و سمكها 2 mm إذا خضعت لجهد 2 V فإن تيارا يسري على طول العينة مقداره

40 mA . يظهر نتيجة ذلك جهد V_H عبر عرض العينة مقداره 15 mV إذا خضعت لحقل مغناطيسي عمودي على اتجاه سريان التيار مقداره $B = 0.1 \text{ T}$. عين كثافة الحاملات و حركيتها.

التمرين 06: كثافة النحاس $\rho = 8.96 \frac{g}{cm^3}$ و كتلته المولية $M = 63.55$ ، $\theta_D = 348 \text{ K}$.

1- أحسب $D(E_F), T_F, E_F$.

2- قدر نسبة الإلكترونات المثارة حراريا عند 300 K .

3- ما هو معدل طاقة إلكترونات النقل و سرعتها الفعالة.

تمرين 07: استعمل نموذج الإلكترون الحر و احسب طاقة الإلكترون فى إحدى زوايا منطقة بريلوان الأولى للشبكة المكعبة البسيطة ثم فى

منتصف وجه جانبي لهذه المنطقة. أحسب النسبة $\frac{k_F}{d_m}$ لمعادن بسيطة ذوات التركيب CFC و CC إذا كان التكافؤ أحادي. d_m هى أقرب مسافة بين مركز منطقة بريلوان و سطحها.

التمرين 08: نعتبر معدن بتركيز إلكترونات النقل n_{el} لوحدة الحجم. أحسب v_F بدلالة n_{el} .

تطبيق عددي: من أجل النحاس: $n_{el} = 8.45 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ، $m = 9.1095 \times 10^{-28} \text{ g}$ ، $\hbar = 1.05459 \times 10^{-27} \text{ ergs}$.

- احسب متوسط الطاقة الحركية لكل إلكترون عند الصفر المطلق.

- نقبل أن عبارة الناقلية الحرارية تكتب بالشكل: $k = \frac{1}{3} c_v^{el} v_F l$. في درجات الحرارة المنخفضة يمكن كتابة: $k = \frac{1}{3} c_v^{el} v_F l$ ، حيث v_F هي سرعة

الإلكترون عند سطح فيرمي، $c_v^{el} = \frac{\pi^2 n_{el} k_B^2 T}{2E_F}$ ، أحسب k من أجل النحاس حيث: $\tau(4 K) = 10^{-11} \text{ sec}$.

التمرين 09:

يتبلور معدن الصوديوم (Na) بالشكل المكعب الممرکز الجسم (CC). طول ضلع الخلية الأولية $a = 4.25 \times 10^{-8} \text{ cm}$

°1- أوجد تركيز إلكترونات النقل بفرض أن كل ذرة تساهم بإلكترون واحد.

°2- اشتق عبارة لطاقة فيرمي (E_F) عند الصفر المطلق (0 K) اعتمادا على نموذج الإلكترون الحر. بين أنها تعتمد فقط على تركيز الإلكترونات ولا تتعلق بكتلة البلورة.

°3- بين أن كرة فيرمي تبدأ بتماس سطح منطقة بريلوان الأولى عندما تصبح النسبة $\frac{n_e}{n_a}$ مساوية 1.48 حيث n_e تركيز إلكترونات النقل و n_a تركيز الذرات.

°4- أحسب E_F ، v_F ، T_F عند الصفر المطلق.

°5- احسب المقاومة الكهربائية عند الصفر المطلق إذا علمت أن $\tau = 3.1 \times 10^{-14} \text{ s}$.

°6- أحسب معامل هول للصوديوم R_H .

°7- أحسب τ و v_d عند (300 K). يعطى:

$$E = 100 \frac{\text{V}}{\text{m}} , \sigma(300 \text{ K}) = 2.17 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} , \frac{\hbar^2}{2m} = 3.8 \text{ eV} \cdot (\text{\AA})^2$$

التمرين 10: معدن تخيلي أحادي التكافؤ يتبلور بالشكل المكعب البسيط (SC) ثابت شبكته a . افرض أن إلكترون التكافؤ حر.

- أحسب نصف قطر كرة فيرمي بدلالة a .

- أحسب أقرب مسافة بين سطح فيرمي و سطح منطقة بريلوان الأولى بدلالة a .

- هل كرة فيرمي تقع داخل منطقة بريلوان الأولى؟