

2. les opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Hilbert:

Dans cette section, on suppose que E est un espace de Hilbert complexe de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposition 2.1-1:

A est dissipatif si et seulement si $\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0$ pour tout $x \in D(A)$.

Preuve:

Supposons que $\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0$ et montrons que A est dissipatif; c'est à dire, on doit démontrer que

$$\| \lambda x - Ax \| \geq \lambda \|x\| \quad \forall x \in D(A), \forall \lambda > 0.$$

$$\begin{aligned} \| \lambda x - Ax \|^2 &= \lambda^2 \|x\|^2 + \|Ax\|^2 - \lambda \langle x, Ax \rangle - \lambda \langle Ax, x \rangle \\ &= \lambda^2 \|x\|^2 + \|Ax\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle. \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0$ alors

$$\| \lambda x - Ax \|^2 \geq \lambda^2 \|x\|^2 + \|Ax\|^2$$

Donc

$$\| \lambda x - Ax \|^2 \geq \lambda^2 \|x\|^2$$

d'où

$$\| \lambda x - Ax \| \geq \lambda \|x\| \quad \text{pour tout } x \in D(A)$$

et tout $\lambda > 0$.

Supposons maintenant que A est dissipatif et montrons

$$\text{que } \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in D(A).$$

A est dissipatif alors

$$\| \lambda x - Ax \|^2 \geq \lambda^2 \|x\|^2.$$

d'où

$$\cancel{\lambda^2 \|x\|^2} + \|Ax\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \geq \cancel{\lambda^2 \|x\|^2}.$$

donc

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq \frac{1}{2\lambda} \|Ax\|^2.$$

lorsque λ tend vers $+\infty$ on obtient

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0$$

pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ ■

Théorème 2.2.1 : (Théorème de Lumer-Phillips).

Soit A un opérateur linéaire de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense ds E .

1- si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I - A$ est surjectif alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction.

2- Si A est le générateur d'un semi-groupe de contraction alors $\lambda I - A$ est surjectif pour $\lambda > 0$ et A dissipatif.

Preuve:

1- si A engendre un semi-groupe de contraction, alors d'après le théorème de Hille-Yosida $\lambda I - A$ est inversible pour $\lambda > 0$ (8)

avec

$$\|R(\lambda, A)f\| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|$$

d'où

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$$

et donc A est dissipatif.

Supposons maintenant que A est dissipatif et soit $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I - A$ est surjectif. Alors l'inégalité

$$\|(\lambda_0 I - A)x\| \geq \lambda_0 \|x\|$$

montre que $(\lambda_0 I - A)$ est injectif, d'où $(\lambda_0 I - A)$ est inversible et donc d'après le Théorème 2.1.5, A est fermé. Pour appliquer le théorème de Hille-Yosida, il nous reste à montrer que pour tout $\lambda > 0$: $\lambda I - A$ est inversible et d'inverse borné par $1/\lambda$, comme A est dissipatif alors

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$$

d'où $\lambda I - A$ est injectif.

De plus, d'après la Proposition 2.1.4 : A est m -dissipatif, c'est à dire,

$\forall \lambda > 0, \forall f \in E, \exists x \in D(A) : (\lambda I - A)x = f$, ce qui montre que $\lambda I - A$ est surjectif et donc bijectif.

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|f\| \Rightarrow \|(\lambda I - A)^{-1}f\| \leq 1/\lambda \|f\|. \quad \square$$

Alors, d'après le théorème de Hille-Yosida, A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction ■

3. Problème de Cauchy et semi-groupes

Soit E un espace de Banach et A un opérateur de domaine $D(A) \subset E$ à valeurs dans E . On considère le problème non homogène de Cauchy suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t), & t > 0 \\ u(0) = x. \end{cases}$$

on $f : [0, T] \rightarrow E$, $T > 0$. On suppose que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$.

Definition 3.1: Une fonction $u : [0, T] \rightarrow E$ est dite solution du problème (S) sur $[0, T]$ si u est continue sur $[0, T[$, continûment différentiable sur $]0, T[$, $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \in]0, T[$ et satisfait le problème (S).

Soit u une solution du problème (S). Alors, la fonction définie de $[0, t]$ à valeurs dans E par $g(s) = G(t-s)u(s)$ est dérivable pour $0 < s < t$. En effet, on a $u(s) \in D(A)$ alors $G(t-s)u(s) \in D(A)$ et donc g est dérivable sur $0 < s < t$ et nous

avons

$$\begin{aligned} \frac{dg(s)}{ds} &= -AG(t-s)u(s) + G(t-s)u'(s) \\ &= -AG(t-s)u(s) + G(t-s)(Au(s) + f(s)) \\ &= -\cancel{AG(t-s)u(s)} + \cancel{AG(t-s)u(s)} + G(t-s)f(s) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{dg(s)}{ds} = G(t-s)f(s) \quad (1)$$

Supposons que $f \in L^1([0, T[, E)$, alors $G(t-s)f(s)$ est intégrable en intégrant alors de 0 à t on trouve que

$$\int_0^t \frac{d}{ds} G(t-s) f(s) ds = \int_0^t G(t-s) f(s) ds.$$

donc

$$g(t) - g(0) = \int_0^t G(t-s) f(s) ds.$$

Par conséquent

$$(3.1) \quad u(t) = G(t)x + \int_0^t G(t-s)f(s)ds.$$

d'où on obtient le corollaire suivant

Corollaire 3.2: si $f \in L^1([0, T[, E)$ alors pour chaque $x \in E$, le problème (s) admet une solution. Si cette solution existe, elle est donc donnée par (3.1)

Remarque 3.3: La continuité de f n'est pas une condition suffisante pour assurer l'existence de solution. En effet, supposons que A soit tel qu'il existe $x \in E$ et $t_0 > 0$ tel que $G(t_0)x \notin D(A)$ et donc forcément $G(t)x \notin D(A), \forall t \in [0, t_0]$. Soit f la fonction définie par $f(t) = G(t)x$. Cette fonction est continue car $(G(t))_{t \geq 0}$ est un g. semi-groupe. La solution correspondante du problème (s) avec $u(0) = 0$ est

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t G(t-s)f(s)ds = \int_0^t G(t-s)G(s)xds \\ &= \int_0^t G(t)xds = tG(t)x \quad (2) \end{aligned}$$