

Remarquons que cette solution n'est pas différentiable pour $t \in [0, t_0]$, d'après le choix de z et alors $u(t)$ n'est pas une solution du problème (S).

Théorème 3.4: Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ et soit $f \in L^1([0, T], E)$ continue sur $]0, T[$ et soit

$$v(t) = \int_0^t G(t-s) f(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Alors (S) admet une solution u pour chaque $x \in D(A)$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite

- 1- $v(t)$ est continuellement différentiable sur $]0, T[$
- 2- $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Av(t)$ est continue sur $]0, T[$.

Si (S) admet une solution u sur $[0, T[$ pour un certain $x \in D(A)$. Alors, v satisfait (1) et (2).

Preuve: Si le problème (S) admet une solution u pour $x \in D(A)$, alors elle est de la forme (3.1) et par conséquent

$v(t) = u(t) - G(t)x$ est différentiable pour tout $t > 0$ car c'est la différence de deux fonctions différentiables et

on a

$$\dot{v}(t) = \dot{u}(t) - G(t)Ax$$

cette dérivée est continue sur $]0, T[$, alors 1) est satisfaite

Ainsi si $x \in D(A)$, alors $G(t)x \in D(A)$ et on a $u(t) \in D(A)$ et

par conséquent $v(t) \in D(A)$, ce qui montre que

(3)

$$Av(t) = Au(t) - G(t)Ax$$

$$= \frac{du}{dt}(t) - f(t) - G(t)Ax$$

$$= \dot{u}(t) - f(t) - G(t)Ax$$

on en déduit donc que Av est continue sur $]0, T[$ et par suite 2) est satisfaite.

D'autre part, pour $h > 0$ on a

$$\frac{G(h) - I}{h} v(t) = \frac{G(h) - I}{h} \int_0^t G(t-s) f(s) ds$$

$$= \frac{1}{h} \left\{ \int_0^{t+h} G(h+t-s) f(s) ds - \int_0^t G(t-s) f(s) ds \right\}$$

$$= \frac{1}{h} \left\{ \int_h^{t+h} G(s) f(h+t-s) ds - \int_h^0 G(t-s) f(s) ds \right\}$$

$$= \frac{1}{h} \left\{ \int_0^{t+h} G(s) f(h+t-s) ds - \int_0^h G(s) f(h+t-s) ds \right.$$

$$\left. - \int_0^t G(t-s) f(s) ds \right\}$$

$$= \frac{1}{h} \left\{ \int_0^{t+h} G(t+h-s) f(s) ds - \int_0^t G(t-s) f(s) ds - \int_0^h G(s) f(h+t-s) ds \right\}$$

$$= \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_0^h G(s) f(h+t-s) ds$$

Grâce à la continuité de f le terme $\int_0^h G(s) f(h+t-s) ds$ admet

$f(t)$ comme limite lorsque h tend vers 0. Si v est continuellement différentiable alors, on trouve que $v(t) \in D(A)$ pour tout $t \in]0, T[$ et

$$Av(t) = \dot{v}(t) - f(t).$$

Comme $v(0) = 0$, on conclut donc que $u(t) = G(t)x + v(t)$ est une solution du problème (S) pour $x \in D(A)$, ce qui achève la démonstration de ce théorème. ■

D'après le Théorème 3.4, on obtient les deux Corollaires suivants

Corollaire 3.5: Soit A le générateur infinitésimal d'un f.s.g. groupe $(G(t))_{t \geq 0}$. Si f est continuellement différentiable sur $[0, T]$ alors le problème initial (S) admet une solution u sur $[0, T[$ pour chaque $x \in D(A)$.

Preuve: On a

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t G(t-s) f(s) ds \\ &= \int_0^t G(s) f(t-s) ds. \end{aligned}$$

Il est clair que v est différentiable pour $t > 0$ et tel que

$$\dot{v}(t) = G(t) f(0) + \int_t^t G(s) f'_t(t-s) ds$$

sur $]0, T[$. En appliquant donc le théorème 3.5, on trouve

v est continûment différentiable et donc le problème initial (s) admet une solution u sur $]0, T[$ ■

Lemme 3.6: Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ et soit $f \in L^1([0, T[, E)$ continue, c'est-à-dire $f(s) \in D(A)$ pour $0 < s < T$ et $Af(s) \in L^1([0, T[, E)$. Alors, pour chaque $x \in D(A)$, le problème initial (s) admet une solution sur $[0, T[$.

Preuve: D'après les conditions, pour tout $s > 0$, $G(t-s)f(s) \in D(A)$ et donc $AG(t-s)f(s) = G(t-s)Af(s)$ est intégrable. En effet,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t AG(t-s)f(s) ds \right\| &= \left\| \int_0^t G(t-s)Af(s) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|G(t-s)\| \|Af(s)\| ds \\ &\leq M \int_0^t \|Af(s)\| ds < +\infty. \end{aligned}$$

Puisque $Af(s) \in L^1([0, T[, E)$, alors $AG(t-s)f(s)$ est intégrable pour tout $s \in [0, t]$.

Soit maintenant $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{G(h) - I}{h} v(t) &= \frac{1}{h} \int_0^t G(t+h-s)f(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^t G(t-s)f(s) ds \\ &= \int_0^t G(t-s) \frac{G(h) - I}{h} f(s) ds. \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h) - I}{h} v(t) = \int_0^t G(t-s) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h) - I}{h} f(s) ds \quad (G)$$

$$= \int_0^t G(t-s) A f(s) ds.$$

ce qui montre que $v(t) \in D(A)$ et $Av(t) = \int_0^t G(t-s) A f(s) ds$.
 Comme $Av(t)$ est l'intégrale d'une fonction continue, on en déduit alors que $Av(t)$ est continue. On applique donc le Théorème 3.4, critère (3) on trouve qu'il existe une solution du problème initial (S) sur $]0, T[$.

On termine cette section par introduire une autre notion de solution pour le problème (S).

Definition 3.7: Une fonction u qui est différentiable presque partout sur $[0, T]$ telle que $u' \in L^1([0, T], E)$ est appelée solution forte du problème (S) si $u(0) = x$ et $u'(t) = Au(t) + f(t)$ presque partout sur $[0, T]$.

Remarque 3.8: Si u est solution forte du problème (S) et si $f \in L^1([0, T], E)$, pour tout $x \in D(A)$ alors u est donnée par la formule (3.1).

Théorème 3.9: Soit A le générateur infinitésimal d'un b.s.g. d'un b.s.g. $(G(t))_{t \geq 0}$ et soient $f \in L^1([0, T], E)$ et $v(t) = \int_0^t G(t-s) f(s) ds$, $0 \leq t \leq T$.

Le problème (S) admet une solution forte u sur $[0, T]$ pour chaque $x \in D(A)$ si et seulement si l'une des conditions (F)

suivantes est satisfaite.

(1) $v(t)$ est différentiable presque partout sur $[0, T]$ et $\dot{v}(t) \in L^1([0, T], E)$

(2) $v(t) \in D(A)$ presque partout sur $[0, T]$ et $Av(t) \in L^1([0, T], E)$.

si (S) admet une solution forte u sur $[0, T]$ pour un certain $x \in D(A)$, alors v satisfait (1) et (2).

et on a le résultat suivant:

Corollaire 3.10: Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $(G(t))_{t \geq 0}$. Si f est différentiable presque partout

sur $[0, T]$ et si $f' \in L^1([0, T], E)$ alors, pour chaque

$x \in D(A)$, le problème (S) admet une solution forte unique sur $[0, T]$.

Remarque 3.11: Généralement la continuité lipschitzienne de f n'est pas une condition suffisante pour assurer l'existence d'une solution forte du problème (S) pour tout $x \in D(A)$. Cependant, si l'espace E est réflexif et f

lipschitzienne continue, on a f est différentiable et $f' \in L^1([0, T], E)$ et le corollaire 3.10 nous donne:

Corollaire 3.12: Soient E un espace de Banach réflexif et

A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $(G(t))_{t \geq 0}$ sur E .

Si f est lipschitzienne continue sur $[0, T]$ alors, pour chaque

$x \in D(A)$, le problème (S) admet une solution unique u sur $[0, T]$