

Travaux Dirigés

Exercice 1: Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière lisse par morceaux. Soit A l'opérateur non borné défini par

$$D(A) = \{ u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega) \}$$

$$Au = \Delta u, \quad \forall u \in D(A).$$

Montrer que A est un opérateur m -dissipatif.

Exercice 2: Soit E un espace de Hilbert et $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe de contraction et soit B un opérateur dissipatif qui satisfait $D(A) \subset D(B)$ et

$$\|Bx\| \leq \alpha \|Ax\| + \beta \|x\|$$

où $0 \leq \alpha < 1$ et $\beta \leq 0$.

- 1- Montrer que $A+B$ est dissipatif.
- 2- Supposons que $2\alpha + \beta < 1$, montrer que $I - (A+B)$ est inversible.
- 3- En deduire que $A+B$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe de contraction.

Exercice 3: On considère le problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} x \in \mathcal{C}([0, +\infty[, D(A)) \cap \mathcal{C}'([0, +\infty[, X) \\ x'(t) = A x(t) \quad \forall t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où X est un espace de Banach et A le générateur infinitésimal d'un co-semi groupe $(G(t))_{t \geq 0}$. Montrer, que pour $x_0 \in D(A)$, $x(t) = G(t)x_0$ est la solution unique de ce problème.

Exercice 4: Considérons le problème d'évolution suivant

$$(P) \begin{cases} x'(t) = A(t) x(t) \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où $A(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Rappeler la solution du système lorsque A ne dépend pas de t .

2. On suppose que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ on a $A(t)A(s) = A(s)A(t)$.

Montrer que la solution s'écrit sous la forme

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t A(s) ds\right)$$

3. On suppose que $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donner la solution

du système (P).

4. Calculer la matrice $B(t) = \exp\left(\int_0^t A(s) ds\right)$.

5. Quelle conclusion peut-on en tirer.

Master 1 : EDP et Applications

EDP d'évolution

Solution du TD.

Exercice 01: Soit $u \in D(A)$ on a

$$\begin{aligned}\langle Au, u \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle \Delta u, u \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} \Delta u(x) u(x) dx.\end{aligned}$$

d'après la formule de Green, on obtient

$$\langle Au, u \rangle_{L^2(\Omega)} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} u(x) dx$$

et comme $u \in H_0^1(\Omega)$, alors cette égalité implique que

$$\begin{aligned}\langle Au, u \rangle_{L^2(\Omega)} &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} [\nabla u(x)]^2 dx \\ &\leq 0\end{aligned}$$

pour tout $u \in D(A)$. Alors, A est dissipatif

Montrons maintenant que, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème variationnel correspondant au problème

$$(1) \sim -\Delta u + u = f \text{ ds } \Omega$$

et $(2) \sim u = 0 \text{ sur } \Gamma$

Dans ce but, en multipliant l'équation (1) par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$, et en intégrant sur Ω , en supposant que $u \in H^2(\Omega)$, alors

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

d'après la formule de Green on trouve que

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

donc le problème variationnel correspondant aux problèmes

(1) et (2) est le suivant : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ qui satisfait $a(u, v) = L(v)$, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ avec

$$a: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) dx$$

et

$$L: H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Il est clair que $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. En effet, soit $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, on a

$$|a(u, v)| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx + \int_{\Omega} |u(x) v(x)| dx$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u, v)| \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder on en déduit que

$$|a(u, v)| \leq \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

et par suite

$$|a(u, v)| \leq 2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Montrons que $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$|a(v, v)| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Omega} (v(x))^2 dx \right|$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Omega} (v(x))^2 dx$$

$$= \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

D'autre part, L est linéaire continue. En effet, soit $v \in H_0^1(\Omega)$

$$|L(v)| = \left| \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \right|$$

$$\leq \int_{\Omega} |f(x)| |v(x)| dx.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

d'où la continuité de L . Alors, toutes les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont satisfaites et par suite il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème variationnel. Et puisque $Au = u - f \in L^2(\Omega)$, alors $u \in D(A)$.

Exercice 02:

1. Comme A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction alors A est dissipatif et $\lambda I - A$ est surjectif pour $\lambda > 0$. Puisque A et B sont dissipatifs,

on en déduit donc $A+B$ est dissipatif.

2. Montrons maintenant que $I - (A+B)$ est inversible

$$\begin{aligned} I - (A+B) &= I - A - B \\ &= \{I - B(I-A)^{-1}\} (I-A) \end{aligned}$$

on sait que $I - A$ est inversible et donc pour démontrer que $I - (A+B)$ est inversible il suffit de montrer que $I - B(I-A)^{-1}$ est inversible, c'est à dire, on doit montrer que $\|B(I-A)^{-1}\| < 1$.

$$\|B(I-A)^{-1}x\| = \|BR(1,A)x\|$$

$$\leq \alpha \|AR(1,A)x\| + \beta \|x\|.$$

on sait que $(I-A)R(1,A)x = x$ alors

$$AR(1,A)x = R(1,A)x - x.$$

d'où $\|AR(1,A)x\| \leq \|R(1,A)\| \cdot \|x\| + \|x\|.$

A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe de contraction, alors

$$\|R(1,A)x\| \leq \|x\|.$$

et par suite

$$\|B(I-A)^{-1}x\| \leq \alpha \{2\|x\|\} + \beta \|x\| = (2\alpha + \beta) \|x\|$$

d'où

$$\|BR(1, A)\| < 1.$$

on en déduit donc que $I - BR(1, A)$ est inversible
et donc $I - (A+B)$ est inversible.

3. $A+B$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi
groupe de contraction.

D'après le théorème de Lumer-Phillips: $A+B$ est le
générateur d'un C_0 -semi groupe de contraction si
 $A+B$ est dissipatif et si il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I - (A+B)$
est surjectif et $\overline{D(A+B)} = E$.
 $D(A+B) = D(A)$ donc $\overline{D(A+B)} = \overline{D(A)} = E$. (car $D(A) \subset D(B)$).
D'après la première question on a $A+B$ est dissipatif
et grâce à la deuxième question on trouve qu'il
existe $\lambda_0 = 1$ tel que $I - (A+B)$ est inversible d'où
la surjectivité de $I - (A+B)$. Par conséquent

Exercice 03:

comme $x \in D(A)$, alors $u(t) = G(t)x_0 \in D(A)$, pour tout $t \geq 0$ et donc comme $(G(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe, on trouve que $G(\cdot)x \in C([0, +\infty[, D(A))$.

D'autre part, d'après le cours, on a

$$\frac{d}{dt} G(t)x = A G(t)x = G(t)Ax$$

comme $x \in D(A)$, alors $Ax \in E$ et par suite $u \in \mathcal{C}'([0, +\infty[, E)$ on en déduit donc que $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[, D(A)) \cap \mathcal{C}'([0, +\infty[, E)$

et nous avons

$$\frac{d}{dt} u(t) = Au(t)$$

$$u(0) = G(0)x_0 = x_0.$$

Montrons maintenant l'unicité de la solution. Fixons $t \geq 0$ et soit $v \in \mathcal{C}([0, +\infty[, D(A)) \cap \mathcal{C}'([0, +\infty[, E)$ une autre solution de (P). Posons

$$w(s) = G(t-s)v(s) \text{ pour } 0 \leq s \leq t$$

alors nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(t-s-h)v(s+h) - G(t-s)v(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ G(t-s-h)v(s+h) - G(t-s)v(h+s) \} \end{aligned}$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ G(t-s)v(h+s) - G(t-s)v(s) \}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} G(t-s-h) \frac{I - G(h)}{h} v(s+h) + G(t-s) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(s+h) - v(s)}{h} \\
&= -G(t-s) A v(s) + G(t-s) \dot{v}(s) \\
&= -G(t-s) A v(s) + G(t-s) A v(s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui montre que w est une application constante sur $[0, t]$ et par suite $w(0) = w(t)$, d'où $u(t) = v(t)$ ce qui montre que $u(t) = G(t) x_0$ est l'unique solution du problème (P).

Exercice 04 :

$$\begin{cases} x'(t) = A(t) x(t), & x(t) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

1. Lorsque l'opérateur A ne dépend pas de t la solution du système est de la forme $x(t) = x_0 e^{A \cdot t}$.
2. Remarquons tout d'abord que $\frac{d}{dt} A^n(t) \neq n A'(t) [A(t)]^{n-1}$ sauf si le produit est commutatif. On sait que

$$\exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^t A(s) ds \right)^k}{k!}$$

comme $A(s)A(t) = A(t)A(s)$ on conclut donc que $\int_0^t A(s) ds$ est commutatif et donc en dérivant la série exponentielle terme

à terme on trouve que

$$\begin{aligned} x_0 \frac{d}{dt} \left(\exp \int_0^t A(s) ds \right) &= x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(t) \left(\int_0^t A(s) ds \right)^{k-1}}{k!} \\ &= x_0 A(t) \exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) \end{aligned}$$

d'où
$$x'(t) = A(t) \exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) = A(t) x(t).$$

D'autre part,

$$x(0) = \exp \left(\int_0^0 A(s) ds \right) x_0 = \exp(0) x_0 = x_0.$$

et par suite $x(t) = x_0 \exp \left(\int_0^t A(s) ds \right)$ est une solution

du problème posé.

3. si $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient donc

le système
$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + t x_2(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) \end{cases} \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système nous donne

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_0^2 t e^t + x_0^1 e^t \\ x_0^2 e^t \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}.$$

B. Calculons $B(t) = \exp \left(\int_0^t A(s) ds \right)$.

$$\int_0^t A(s) ds = \begin{pmatrix} t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$\exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^t A(s) ds \right)^k}{k!}$$

Par récurrence on trouve que

$$B(t)x_0 = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2} e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} x_0$$

$$= \begin{pmatrix} x_0^1 e^t + x_0^2 \frac{t^2}{2} e^t \\ x_0^2 e^t \end{pmatrix}.$$

↳ Conclusion : $x(t) \neq B(t)x_0$.