Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Master1, EDP

Cours de Physique générale

Chapitre III: Dynamique du point matériel

Prof. Djamil Bouaziz

bouazizdjamil@yahoo.fr

2019/2020 Semestre 2

Chapitre III

Dynamique du point matériel

La dynamique s'occupe de l'étude du mouvement des systèmes mécaniques (points matériels, corps solides, systèmes de points matériels,...) en tenant compte des forces qui en sont appliquées. La dynamique permet de déterminer les équations du mouvement d'un mobile en connaissant les forces qui agissent sur ce dernier. Cela se fait en utilisant les lois de Newton que nous allons exposer ci-dessous. Avant cela, il convient de préciser que dans ce chapitre nous nous limiterons aux systèmes non relativistes, c'est-à-dire, les systèmes dont la vitesse est négligeable devant celle de la lumière. De plus, les mobiles considérés sont assimilés à des points matériels.

III. 1. Lois de Newton (Isaac Newton 1642-1727)

Les lois de Newton ont été formulées en 1687 en se basant sur les Lois de Kepler.

Première loi : Principe d'inertie

Tout corps isolé (n'est soumis à aucune force) préserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme; le changement de l'état d'un corps isolé ne peut se faire qu'avec l'action d'une force extérieure.

Bien entendu, cette loi s'applique par rapport à un référentiel dit galiléen ou inertiel (voir chap. II).

Deuxième loi: Principe fondamental de la dynamique

Dans un repère galiléen, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement d'un point matériel égale à la résultante des forces auxquelles il est soumis. Mathématiquement on écrit:

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \overrightarrow{F}, \tag{1}$$

où $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$ est le vecteur quantité de mouvement, (m étant la masse et $\overrightarrow{v}$ étant la vitesse du point matériel).

La masse m est en général constante au cours du temps de sorte que l'équation (1) s'écrit:

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{F}, \quad \text{ou} \tag{2}$$

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}, \tag{3}$$

où $\overrightarrow{a}$ est le vecteur accélération.

- Si la résultante des force, $\overrightarrow{F}$, est constante, l'équation (3) implique que le vecteur $\overrightarrow{a}$ est constant également. Dans ce cas le mouvement est uniformément accéléré (voir Chap. II).

- Si $\overrightarrow{F}, = \overrightarrow{0}$, c'est à dire le point matériel est isolé, l'équation (3) implique que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.C'est-à dire que le mouvement est rectiligne uniforme (C'est le principe d'inertie).

Troisième loi : Principe des actions réciproques

Tout corps A exerçant une force, $\overrightarrow{F}_{AB}$, sur un corps B subit lui aussi une force exercée par B, $\overrightarrow{F}_{BA}$, égale (en norme) et opposée à la force $\overrightarrow{F}_{AB}$. On écrit

$$\overrightarrow{F}_{AB} = -\overrightarrow{F}_{BA} \tag{4}$$

Cette loi s'applique aussi bien au cas des corps immobiles ou en mouvement, en contact ou distants.

Les trois lois de Newton constituent les principes de la mécanique classique (Newtonienne). A ces lois, Newton a ajouté la loi de la gravitation universelle pour démontrer les lois empiriques de Kepler, pour interpréter la chute des corps sur la terre et le mouvement des corps célestes en générale.

Loi de gravitation universelle:

Cette loi a été énoncée par Newton en 1687; elle peut être formulée comme suit:

Il y a toujours une force d'attraction entre deux corps A et B, de masse M_A et $M_{B.}$. Cette force est inversement proportionnelle au carré de la distance r entre A et B:

$$\left\|\overrightarrow{F}_{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{F}_{BA}\right\| = \frac{G.M_A.M_{B.}}{r^2}, \tag{5}$$

avec $G = 6.67384.10^{-11} N.m^2 kg^{-2}$ est la constante gravitationnelle.

III. 2. Lois de Kepler (Johannes Kepler 1571-1630)

Les deux premières lois ont été établies par Kepler en 1609 et la troisième en 1619 en se basant sur les observations et les mesures de la position des planètes faites par Tycho Brahe (mesures très précises à l'époque). Les lois de Kepler décrivent les propriétés principales du mouvement des planètes autour du Soleil; elle peuvent être formulées comme suit:

Première loi : loi des orbites

Dans référentiel héliocentrique, les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le soleil occupe l'un des deux foyers. Plus généralement, les objets célestes générale Master EDP/QFU2VK06.bmp

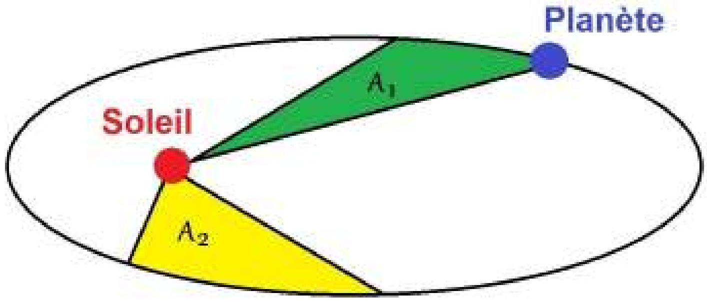

FIG. 1: Deuxième loi de Kepler: $A_1 = A_2$.

gravitant autour du Soleil décrivent des trajectoires qui sont des coniques dont le Soleil est un foyer.

Deuxième loi : loi des aires

Le vecteur position de la planète balaye les mêmes aires pendant les mêmes intervalles de temps.

Troisième loi : loi des périodes

Le carré de la période orbitale (sidérale), T, d'une planète P est directement proportionnel au cube du demi-grand axe, a, de la trajectoire:

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{constante}. \tag{6}$$

III. 3. Déduction des lois de Kepler à partir des lois de Newton

Première loi: pour montrer que la trajectoire d'une planète autour du soleil est elliptique on applique la deuxième loi de Newton, en tenant compte que la force exercée par le soleil sur la planète est donnée par la loi de gravitation de Newton. Cette démonstration est développée en TD.

Deuxième loi:

Pour établir la deuxième loi de Kepler on montre que la vitesse aréolaire est constante.

La vitesse aréolaire d'un mobile M, noté $\dot{A}$, est donnée par générale Master EDP/QFU36M07.bmp

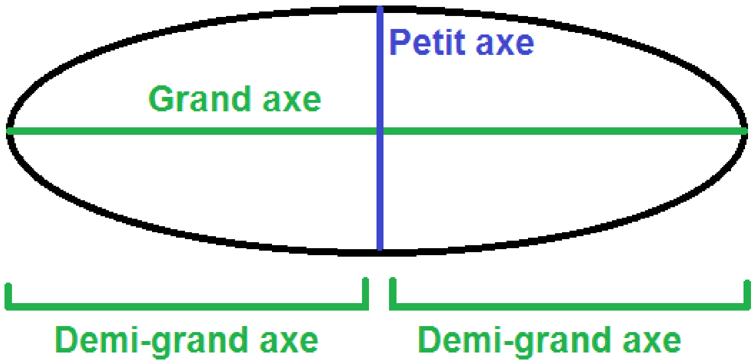

FIG. 2: Demi-grand axe, a, et demi-petit axe, b, d'une ellipse.

générale Master EDP/QFU7TL09.bmp

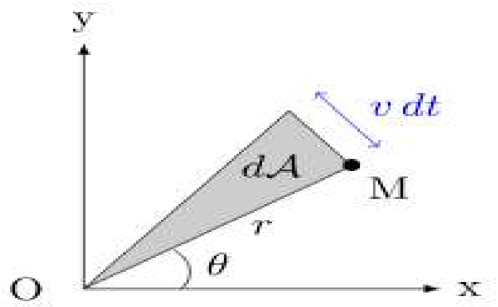

FIG. 3: Vitesse aréolaire.

$$\begin{aligned}
\dot{A} = \frac{dA}{dt} &= \frac{d}{dt}\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\right\| \\
&= \frac{d}{dt}\left\|\frac{1}{2} r\overrightarrow{u_r} \wedge (dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta})\right\| \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|r^2 d\theta\,\overrightarrow{k}\right\| = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Noté que (r,θ) sont les coordonnées polaires de M. D'autre part, la vitesse aréolaire peut être relié au moment cinétique, qui s'écrit en coordonnées polaires comme suit:
$\overrightarrow{L} = mr\overrightarrow{u_r} \wedge (\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{k}$, donc

$$\left\|\overrightarrow{L}\right\| = mr^2\dot{\theta} = 2m\dot{A}. \tag{8}$$

Pour montrer que $\dot{A} = const$, on peut montrer que le vecteur moment cinétique ($\overrightarrow{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p}$) est constant lorsque la force exercée sur le mobile est centrale. En effet,

$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{p}\right)}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt} \wedge \overrightarrow{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \overrightarrow{v} \wedge (m\overrightarrow{v}) + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$

Si la force est centrale (telle que la force gravitation universelle): $\overrightarrow{F} = F(r)\overrightarrow{u_r}$, où $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$, alors on obtient:

$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{0}$. Donc le vecteur moment cinétique reste constant au cours du mouvement. Il en est de même pour la vitesse aréolaire, ce qui montre la deuxième loi de Kepler.

Troisième loi:

L'aire de l'ellipse de demi-grand axe$a$ et de demi-petit axe b est :

$$A = \pi ab. \tag{9}$$

Puisque la vitesse aréolaire est constante, on peut écrire:

$$A = \dot{A}T. \tag{10}$$

où T est la période. Il en résulte

$$T = \frac{\pi ab}{\dot{A}}. \tag{11}$$

D'autre part, on montre (en établissant la première loi de Kepler) que

$$b^2 = a\frac{4m\dot{A}^2}{GMm}, \tag{12}$$

où M est la masse du Soleil et m est celle de la planète.

A partir de (11), on a

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{\dot{A}^2}, \tag{13}$$

et en tenant compte de (12), on trouve

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}, \tag{14}$$

ou

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{Conante}, \tag{15}$$

III. 4. Etude de quelques forces

On peut classifier les forces en deux types: forces d'interaction à distance et forces de contact.

a- Forces d'interaction à distance

On peut en citer:

- La force de gravitation universelle présentée plus-haut.

- La force Coulombienne qui s'exercent entre deux points chargés:

$$\overrightarrow{F} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\overrightarrow{u}, \tag{16}$$

$k = 8,987.10^9 \mathrm{Nm^2C^{-2}}$ étant la constante de Coulomb, q_1 et q_2 sont les charges des deux points, r est la distance entre ces charges et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire.

- Force électromagnétique (ou de Lorentz): c'est la force que subit une charge électrique q se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B}$:

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) \tag{17}$$

b- Forces de contact

On peut en citer:

- Forces de tension et forces de rappel, telles que la force exercée par un ressort sur un objet, M, suspendu sur son extrémité:

$$\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM}, \tag{18}$$

k étant la constante de raideur du ressort.

- Forces de frottement: on distingue deux types de frottement, frottement sec et frottement visqueux:

a- Forces de frottement sec:

Soit un solide se déplaçant sur une surface, $\overrightarrow{F}$ est la force exercée par la surface sur ce solide

– composante normale à la surface N = réaction (force de liaison)

– composante tangente à la surface F_{frot} = force de frottement sec.

On distingue deux cas:

$$\text{Si } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}, \ \left\|\overrightarrow{F}_{frot}\right\| \leq \left\|F_{frot}^{\max}\right\| = \mu_s \left\|\overrightarrow{N}\right\|, \tag{19}$$

$$\text{Si } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}, \ \overrightarrow{F}_{frot} = \mu_c N \frac{\overrightarrow{v}}{v}, \tag{20}$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique, et μ_c le coefficient de frottement cinétique. En règle générale: $\mu_c < \mu_s$. Les coefficients de frottement dépend :

- des matériaux en contact ;

- de l'état des surfaces en contact (rugosité) ;

- de la présence ou non de lubrifiant.

On peut donner quelques valeurs de coefficients de frottement pour illustration:

Corps en contact	μ_s	μ_c
Acier sur acier (sec)	0.78	0.42
Cuir sur fonte	0.28	0.56
Téflon sur téflon	0.04	0.04
Pneu sur route mouillée	0.15	0.1
Pneu sur route sèche	0.8	0.6
Métal sur glace	0.03	0.01
Bois sur bois	0.5	0.3

b- Forces de frottement visqueux, subies par un solide se mouvant dans un fluide (gaz comme l'air ou liquide comme l'eau). En général on peut exprimer ces forces par les deux expressions suivantes selon le régime de la vitesse:

$$\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{v}, \qquad k > 0, \text{ A très basse vitesse (} < 5 \text{ m/s dans l'air)}, \tag{21}$$

$$\overrightarrow{F} = -K\left\|\overrightarrow{v}\right\|\overrightarrow{v}, \qquad K > 0, \text{ A plus grande vitesse (5 < v < 20 m/s dans l'air)}, \tag{22}$$

$$\overrightarrow{F} \propto \left\|\overrightarrow{v}\right\|^{n}\overrightarrow{v}, \;\; \geq 2, \text{ A très grande vitesse (mais < vitesse du son)}. \tag{23}$$

III. 5. Théorèmes généraux de la mécanique

1- Théorème de l'énergie cinétique:

Lorsque un point matériel, sous l'action d'une force $\overrightarrow{F}$, fait un déplacement infinitésimal $d\overrightarrow{r}$, le travail élémentaire qui sera fourni par cette force est par définition égal au produit scalaire:

$$dw = \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{r}. \tag{24}$$

Le travail fourni par cette force pour que le point matériel fait un déplacement fini, de la position A à la position B, est donné par

$$\begin{aligned}
W_{AB} &= \int_A^B \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{r} \\
&= \int_A^B m\overrightarrow{a}.d\overrightarrow{r} = \int_A^B m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}.d\overrightarrow{r} \\
&= \int_A^B m\overrightarrow{v}d\overrightarrow{v} = \frac{m}{2}(\overrightarrow{v}_B^2 - \overrightarrow{v}_A^2), \\
&= E_c(B) - E_c(A). \qquad (25)
\end{aligned}$$

La quantité $E_c = \frac{m}{2}\overrightarrow{v}^2$ est appelée énergie cinétique, et l'équation (25) constitue le contenu du théorème de l'énergie cinétique, qui sera énoncé comme suit:

"La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel se déplaçant du point A au point B est égale au travail de la résultante des forces qui s'exerce sur ce point"

2- Théorème de l'énergie mécanique

Considérons un point matériel M soumis à une force dérivant d'un potentiel :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= -\operatorname{grad} V(x,y,z) \equiv -\overrightarrow{\nabla} V(x,y,z), \qquad (26) \\
&= -\frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{k} \qquad (27)
\end{aligned}$$

$V(x,y,z)$ est appelé énergie potentielle ou potentiel tout court.

Le travail fourni par cette force pour que M se déplace de la position A à la position B s'écrit:

$$\begin{aligned}
W_{AB} &= \int_A^B \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{r} \\
&= \int_A^B \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{k}\right).d\overrightarrow{r} \\
&= \int_A^B \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{k}\right).\left(dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j} + dz\overrightarrow{k}\right) \\
&= -\int_A^B dV = V(A) - V(B), \qquad (28)
\end{aligned}$$

et compte tenu de l'équation (25), on peut écrire:

$$W_{AB} = E_c(B) - E_c(A) = V(A) - V(B),$$

ce qui donne

$$E_c(A) + V(A) = E_c(B) + V(B) \qquad (29)$$

La quantité $E = E_c(A) + V(A)$ est appelée énergie mécanique du point matériel. On peut donc écrire

$$E(A) = E(B). \tag{30}$$

L'équation (30) montre que l'énergie mécanique d'un point matériel soumis uniquement à des forces qui dérivent d'un potentiel est une constante de mouvement (reste conservée au cours du temps). Pour cette raison, les forces dérivant d'un potentiel sont appelées forces conservatives.

Lorsque le point matériel est soumis à des forces conservatives et à des forces non conservatives, on peut montrer de la même manière que la variation de l'énergie mécanique égale au travail des forces non conservatives:

$$E(B) - E(A) = W_{AB} \text{ (des forces non conservatives).} \tag{31}$$

Cela constitue l'énoncé du théorème de l'énergie mécanique.

2- Théorème du moment cinétique

Considérons un point matériel M en mouvement par rapport référentiel galiléen $R(O, xyz)$.

Le moment cinétique de M par rapport à un point quelconque A est défini par:

$$\overrightarrow{L}(A) = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p}, \tag{32}$$

$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$, étant la quantité de mouvement de M.Dans le cas particulier $A \equiv O$, on a

$$\overrightarrow{L}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{p}, \tag{33}$$

$\overrightarrow{r}$ étant le vecteur position de M.

Calculons la dérivée de $\overrightarrow{L}(A)$ par rapport au temps:

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L}(A) = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{AM}\right) \wedge \overrightarrow{p} + \overrightarrow{AM} \wedge \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{p}\right) \tag{34}$$

$$= \overrightarrow{v} \wedge (m\overrightarrow{v}) + \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F}, \tag{35}$$

où $\overrightarrow{F}$ étant la résultante des forces agissant sur M.

Don on obtient

$$\overrightarrow{\Gamma}(A) \equiv \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{L}(A). \tag{36}$$

Cette équation constitue ce que l'on appelle théorème du moment cinétique:

La variation du moment cinétique d'un point matériel au cours du temps égale au moment de la résultante des forces agissant sur ce point.