

Chapitre 2. Etude de la propagation dans les fibres optiques

I. Introduction

La propagation des ondes dans les fibres optiques peut s'étudier à l'aide de deux théories différentes :

- La théorie de l'optique géométrique.
- La théorie de Maxwell.

La première, méthode permet d'avoir de très bons résultats avec possibilité d'interprétation physique. La deuxième, très complexe à mettre en œuvre, permet d'établir des solutions exactes, elle utilise un formalisme mathématique très complexe pour le calcul des champs électromagnétiques dans une fibre optique et nécessite la résolution de l'équation de propagation, déduite des équations de Maxwell on obtient ainsi un modèle amélioré de la propagation de la lumière dans la fibre optique qui rend son exploitation très intéressante.

II. Approche géométrique

Pour étudier la propagation de la lumière dans la fibre optique en utilisant l'approche géométrique, les longueurs d'onde sont supposées petites comparées aux dimensions du support de transmission. On considère alors que le chemin suivi par la lumière est

décrit par un rayon lumineux. Cette notion de rayon lumineux est essentielle car elle constitue la base de l'optique géométrique qui considère que la lumière se propage sous forme de rayon lumineux.

A la fin du X^{ème} siècle, Alhazen Ibn Al-Haytham (أبو علي الحسن بن الهيثم) interprète la réfraction comme étant due à un ralentissement de la lumière pénétrant un milieu dense. La loi de la réfraction est analysée de façon approfondie dans Traité d'optique traduit en latin sous le titre d'*Opticae Thesaurus* (كتاب المناظر). Au XVII^{ème} siècle la loi de la réfraction est formalisée par Snell puis Descartes qui la publie en 1637.

II.1. Principe de Fermat et loi de Snell-Descartes

Les lois de Snell-Descartes découlent du principe de Fermat appelé aussi principe du moindre temps, qui énonce que la lumière qui se propage entre deux points en suivant la trajectoire qui minimise le temps de parcours (La lumière prend le chemin le plus rapide pour aller d'un point à un autre : en ligne droite dans un milieu homogène).

Ces lois sont relatives à l'étude "géométrique" de la lumière lorsqu'elle rencontre une surface séparant deux milieux différents.

Le rayon réfracté est dans le plan perpendiculaire au plan de séparation des milieux contenant le rayon incident

L'angle d'incidence \hat{i} et l'angle de réfraction \hat{r} vérifient :

La loi de Snell-Descartes s'écrit:

$$n_1 \sin \hat{i} = n_2 \sin \hat{r} \quad (1)$$

où;

n_1 : est indice du milieu incident

n_2 : est indice du milieu réfractant

\hat{i} : est angle d'incidence

\hat{r} : est angle de réfraction

Dans un guide optique le guidage se fait par réflexion totale.

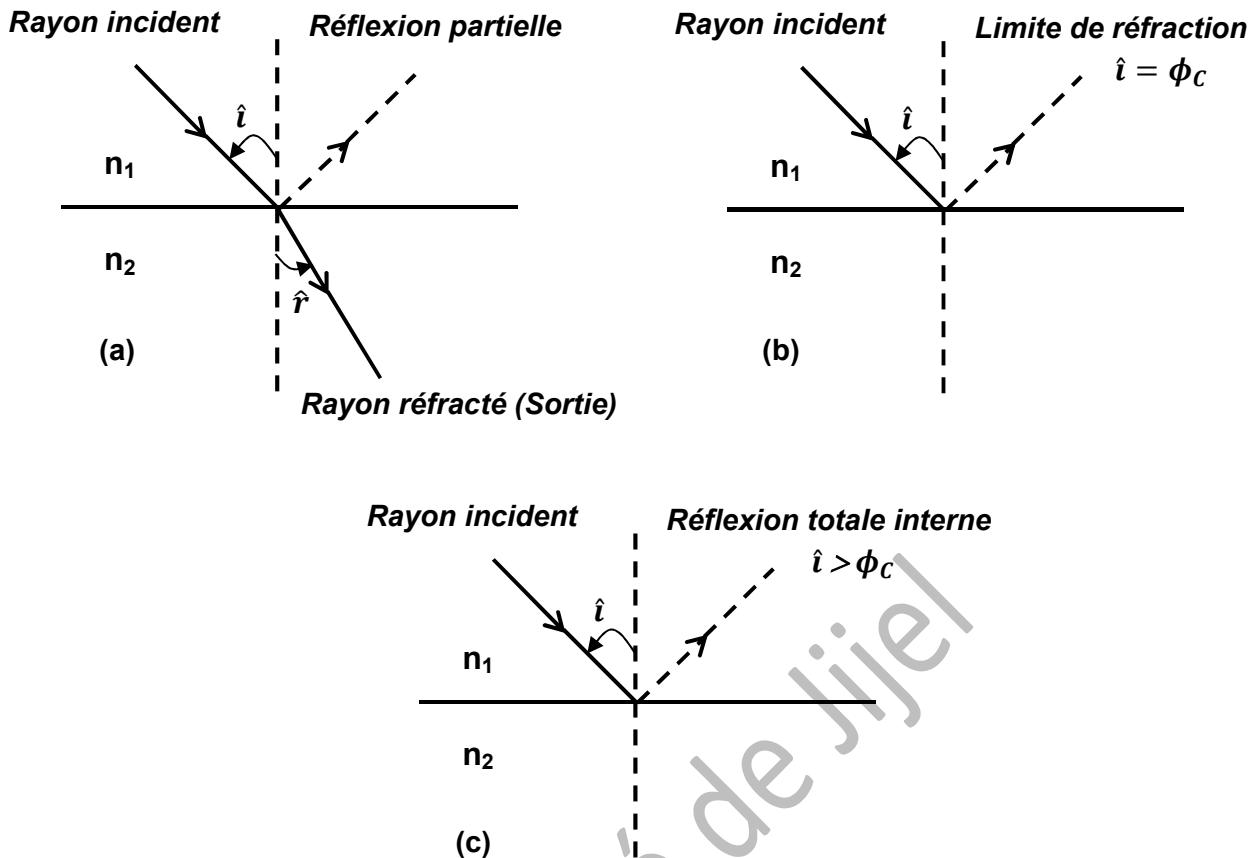


Figure 1. Représentation de la réfraction (a), limite de réfraction et angle critique $\hat{i} = \phi_c$ (b) et réflexion totale interne $\hat{i} > \phi_c$

Sur la figure 1 (a), on observe qu'une petite quantité de lumière est réfléchie dans le milieu incident d'indice n_1 (réflexion interne partielle). Lorsque le rayon réfracté est parallèle à l'interface (dioptre) des deux milieux d'indice n_1 et n_2 l'angle de réfraction $\hat{r} = 90^\circ$ par rapport à la normale qui représente la limite de la réfraction. A partir de la loi de Snell – Descartes (1) on obtient l'angle critique $\hat{i} = \phi_c$:

$$n_1 \sin \phi_c = n_2 \sin 90 \quad (2)$$

$$\sin \phi_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (3)$$

Pour des angles d'incidence supérieurs à $\hat{i} > \phi_c$ (figure 1 (c)), la lumière est réfléchie dans le milieu d'origine : *réflexion totale interne dans le milieu d'incidence de la lumière d'indice n_1 .*

On rappelle que la vitesse de la lumière dans le vide notée c est :

$$n = \frac{c}{v} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (4)$$

La vitesse dans un milieu d'indice n est alors :

$$v = \frac{c}{n} \quad (5)$$

II.2. Application aux fibres optiques (Notion de l'ouverture numérique- Fibres multimode et monomode)

II.2.1. Fibre optique

La fibre optique est un guide d'onde optique circulaire. C'est donc un cylindre de verre possédant la faculté de guider la lumière en son cœur.

Le cœur de la fibre est composé de silice, ou plus exactement d'oxyde de silicium (SiO_2). Cette molécule, qui est présente dans de nombreux minéraux comme le quartz, la calcédoine ou l'opale, a la particularité de réfléchir de façon optimale les longueurs d'ondes de 850, 1300 et 1500 nm. Ce cœur parfait est entouré d'une couche de silice de moindre qualité formant la gaine optique (figure 2).

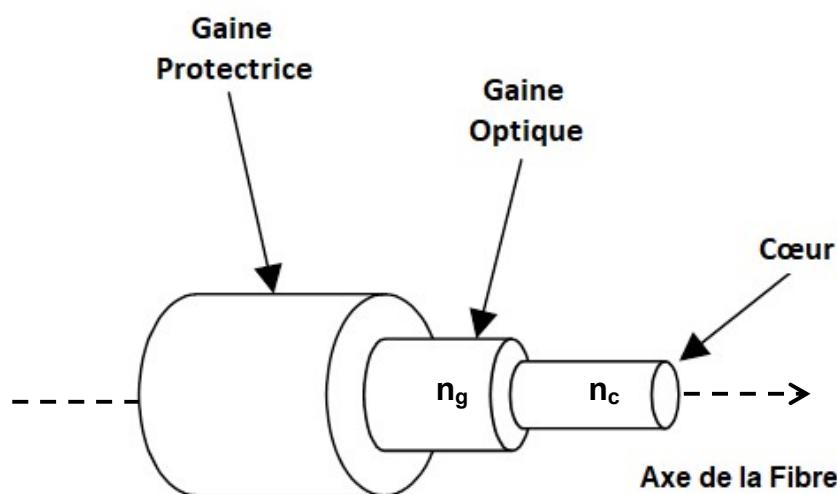


Figure 2. Structure d'une fibre optique

Il existe deux types principaux de fibres :

- Les fibres à saut d'indice, dans lesquelles l'indice de réfraction du cœur est homogène dans toutes les directions ;

- Les fibres à gradient d'indice, dans lesquelles l'indice de réfraction du cœur décroît transversalement à partir de l'axe longitudinal

Les fibres optiques sont aussi classées en deux catégories selon le diamètre de leur cœur et la longueur d'onde utilisée.

- Les fibres monomode ;

- Les fibres multimode.

II.2.2. Types de fibres optiques

II.2.2.1. Fibre optique monomode

Dans une fibre optique monomode, le cœur est très fin ce qui permet une propagation du faisceau laser presque en ligne droite. Pour qu'une fibre optique puisse être monomode, ses dimensions transverses ne doivent pas être très grandes devant la longueur d'onde. De cette façon, elle offre peu de dispersion du signal qui peut être considérée comme nulle. Aussi, la bande passante est presque infinie (supérieur à 10 Gb/s). La fibre optique monomode permet de réaliser des liaisons de très longues distances. Le petit diamètre du cœur des fibres nécessite une grande puissance d'émission qui est délivrée par des diodes laser pour réaliser la transmission de la lumière le long de la fibre.

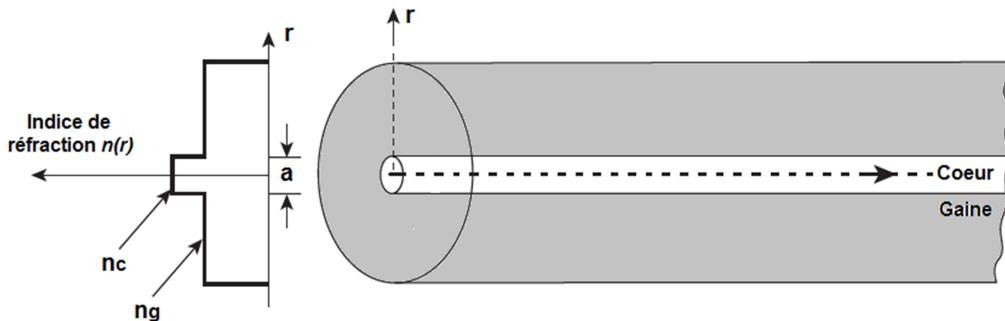


Figure 3. Structure d'une fibre optique monomode à saut d'indice.

La fibre est monomode, si entre le diamètre d du cœur et la longueur d'onde de la lumière considérée, existe la relation :

$$\frac{\pi \cdot d \cdot ON}{\lambda} < 2.4 \quad (6)$$

ON : Ouverture Numérique.

II.2.2.2. Fibre optique multimode à saut d'indice

Ce type de fibre optique possède une région du cœur uniforme relativement large comparativement à la gaine. Le cœur est composé de verre (SiO_2) dopé. Elle est efficace sur de courtes distances parce qu'elle déforme le signal par dispersion. Elle est donc limitée dans sa bande passante.

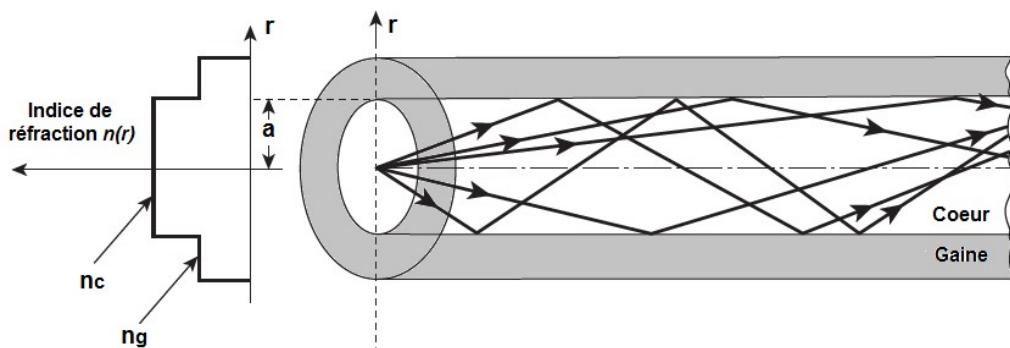


Figure 4. Structure d'une fibre optique multimode à saut d'indice.

Le profil d'indice de réfraction est défini de la manière suivante :

$$n(r) = \begin{cases} n_c & r < a \text{ (coeur)} \\ n_g & r \geq a \text{ (gaine)} \end{cases} \quad (7)$$

Pour les fibres multimode le nombre de mode est approché par la relation :

$$N_{modes} \approx 0.5 \cdot \left(\frac{\pi \cdot d \cdot O N}{\lambda} \right)^2 \quad (8)$$

II.2.2.3. Fibre optique multimode à gradient d'indice

Le cœur de la fibre optique à gradient d'indice possède des couches de verre successives. Ces couches modifient graduellement l'indice de réfraction. Ainsi, plus le faisceau laser s'éloigne du centre plus l'indice de réfraction diminue. La propagation trace approximativement une onde sinusoïdale dans le cœur de la fibre optique. Elle est la plus utilisée pour les moyennes distances. Un de ses avantages est que la dispersion modale est diminuée avec cette fibre. Il y a donc une meilleure réception du signal.

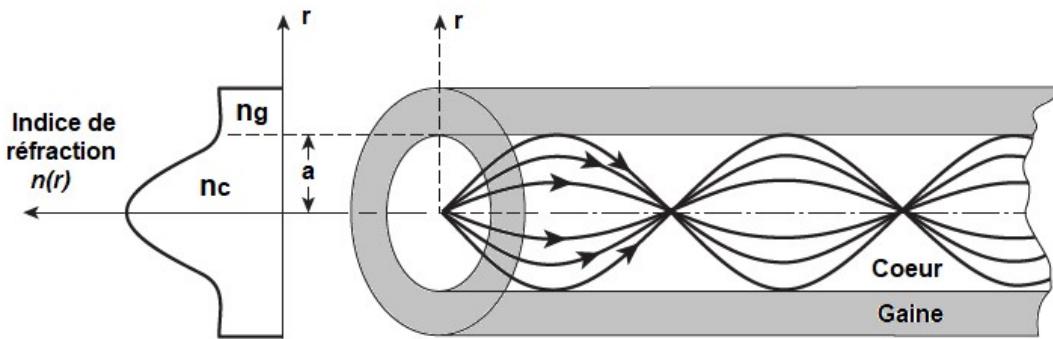


Figure 5. Profil d'indice de la fibre optique multimode à gradient d'indice.

La loi du profil d'indice est de la forme pseudo-parabolique :

$$n(r) = \begin{cases} n_c(1 - 2\Delta(r/a)^\alpha)^{1/2} & r < a \text{ (coeur)} \\ n_c(1 - 2\Delta)^{1/2} = n_g & r \geq a \text{ (gaine)} \end{cases} \quad (9)$$

Avec Δ la différence relative d'indice :

$$\Delta = \frac{n_c^2 - n_g^2}{2n_c^2} \approx \frac{n_c - n_g}{n_c} \quad (10)$$

L'exposant α est proche de 2 (figure 6), sa valeur exacte est optimisée pour minimiser la dispersion intermodale, elle dépend des matériaux et de la longueur d'onde.

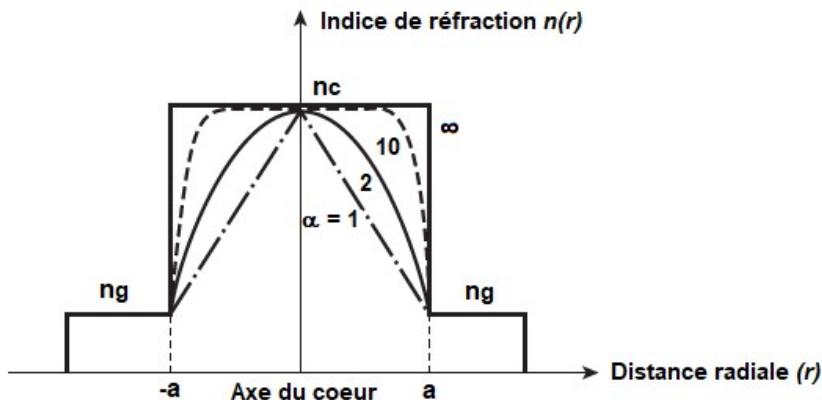


Figure 6. Profils d'indice de réfraction de fibres à gradient d'indice pour différentes valeurs de α .

Pour les fibres multimode à gradient d'indice le nombre de mode est donné par la relation :

$$N_{modes} \approx 0.5 \cdot \left(\frac{\pi \cdot d \cdot ON}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 2} \quad (11)$$

Pour $\alpha = 2$, le nombre de mode est la moitié de celui obtenu avec une fibre optique à saut d'indice de même ouverture numérique ON.

Type de fibre	Diamètre du cœur (μm)	Diamètre de la gaine (μm)
Monomode	9	125
Multimode	50 ou 62.5	125

Tableau 1. Dimensions des fibres monomode et multimode

II.2.3. Propagation de la lumière dans une fibre

Le principe physique majeur qui a inspiré la technologie des fibres optiques est ce que l'on appelle «la réflexion totale interne». Un rayon lumineux entrant dans une fibre optique à l'une de ses extrémités avec un angle adéquat, subit de multiples réflexions totales internes appelé mode.

Les propriétés guidantes de la fibre optique reposent sur le principe physique de la réflexion totale interne. Le cœur et la gaine de la fibre ayant des indices de réfraction différents, ainsi, pour qu'il y ait propagation de la lumière, l'indice de réfraction du cœur de la fibre doit être plus grand que celui de la gaine de sorte que l'on retrouve un effet miroir à l'intérieur de la gaine. La lumière est donc confinée à l'intérieur du cœur. Pour avoir une propagation de la lumière sans pertes dans la fibre optique, tous les rayons lumineux au contact de l'interface cœur/gaine devront respecter la condition de réflexion totale interne. L'angle d'entrée de la lumière, calculé en fonction des deux indices, sera donc scrupuleusement respecté.

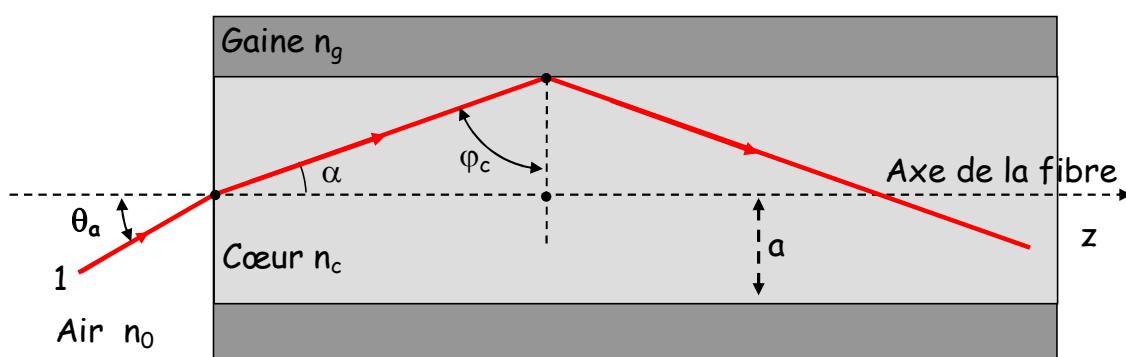


Figure 7. Propagation du rayon lumineux dans la fibre optique.

A partir du paragraphe II.1. (Loi de Snell-Descartes), la réflexion totale interne dans le cœur de la fibre est donc obtenue avec la condition suivante :

$$\sin \phi_c = \frac{n_g}{n_c} \quad (12)$$

Pour des angles d'incidence supérieurs à $\phi > \phi_c$ (figure 7), la lumière est réfléchie dans le cœur de la fibre : *réflexion totale interne*.

II.2.4. Angle d'acceptance et Ouverture Numérique (Numerical Aperture NA)

Les ondes lumineuses qui se propagent à l'intérieur du cœur de la fibre optique proviennent de l'extérieur à partir d'un couplage avec une source optique (LED, Diode Laser...). Pour pouvoir transmettre les rayons de lumière par des réflexions totales internes dans le cœur de la fibre avec un angle $\phi > \phi_c$ à l'interface cœur/gaine, il faut déterminer l'angle qui permet l'injection d'un rayon lumineux dans le cœur de la fibre pour satisfaire la condition de propagation (figure 8).

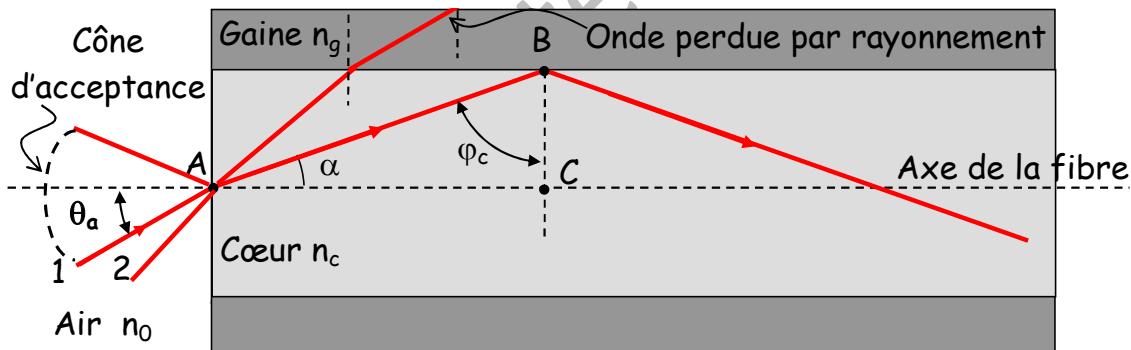


Figure 8. Angle d'acceptance θ_a qui permet d'injecter la lumière dans la fibre optique.

- (1) rayon appartenant au cône d'acceptance
- (2) rayon à l'extérieur du cône d'acceptance.

On observe sur la figure 8 que le rayon 1 pénètre dans la fibre avec un angle θ_a à l'axe de la fibre qui forme un cône appelé : *cône d'acceptance*.

Ce rayon est réfracté à l'interface air/cœur avant sa transmission dans la fibre par des réflexions multiples totales internes à l'interface cœur/gaine avec un angle $\phi > \phi_c$.

Pour des rayons incidents au cœur de la fibre avec des angles $\theta > \theta_a$ (cas du rayon 2 de la figure 8), ils seront transmis avec un angle $\phi < \phi_c$ à l'interface cœur/gaine et ainsi perdus par rayonnement dans la gaine de la fibre.

La transmission des rayons de lumière dans la fibre optique par réflexion totale interne dans son cœur n'est possible que si ces rayons ont un angle d'incidence à l'interface air/cœur aux limites d'un *cône d'acceptance* défini par le demi-angle conique θ_a

L'angle d'acceptance θ_a représente donc l'angle maximum par rapport à l'axe de la fibre pour que la lumière puisse entrer dans la fibre et se propager

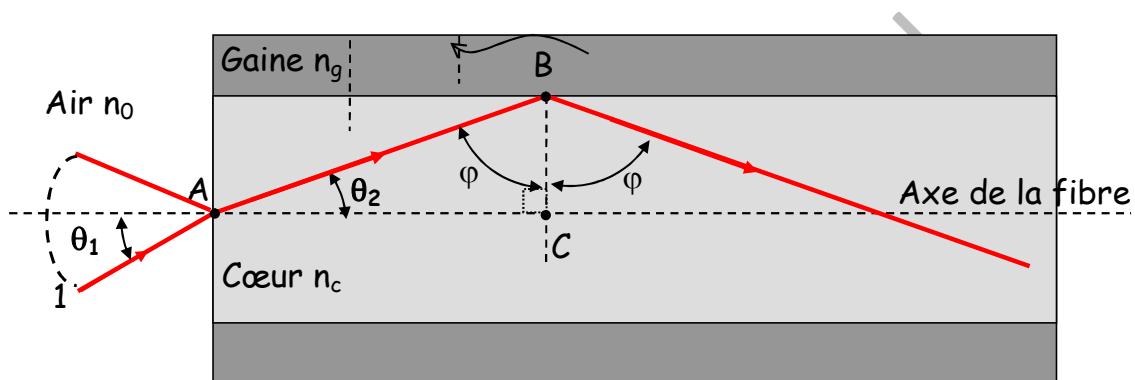


Figure 9. Trajectoire d'un rayon axial dans la fibre optique

L'ouverture numérique nous permet de déterminer les rayons qui seront guidés dans la fibre faisant partie d'un cône de demi-angle au sommet (cône d'acceptance) : Il est possible d'avoir une relation entre l'angle d'acceptance θ_a et les indices de réfraction des trois milieux concernés par la propagation à savoir le cœur, la gaine et l'air. Cette relation est appelé ouverture numérique.

Appliquons la loi de Snell-Descartes aux deux interfaces Air/Cœur et Cœur/Gaine (figure 9):

- **Interface Air/cœur :**

$$n_0 \sin \theta_1 = n_c \sin \theta_2 \quad (13)$$

A partir du triangle rectangle ABC on peut écrire : $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta_2$

ϕ doit satisfaire la condition de propagation dans la fibre $\phi > \phi_c$, l'équation (7) devient :

$$n_0 \sin \theta_1 = n_c \cos \phi \quad (14)$$

En utilisant la relation trigonométrique $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$, l'équation (8) devient :

$$n_0 \sin \theta_1 = n_c (1 - \sin^2 \phi)^{1/2} \quad (15)$$

- Interface cœur/gaine :

A la limite de la réflexion totale interne $\phi = \phi_C$ à l'interface cœur/gaine, l'équation (3) donne : $\sin \phi_C = \frac{n_g}{n_c}$, de même θ_1 devient égale à l'angle d'acceptance de la fibre θ_a

A la limite de réflexion totale interne la relation (15) devient :

$$n_0 \sin \theta_a = n_c (1 - \frac{n_g^2}{n_c^2})^{1/2} \quad (16)$$

$$n_0 \sin \theta_a = (\frac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2})^{1/2} \quad (17)$$

L'équation 17 nous permet de définir un paramètre important de la fibre optique l'ouverture numérique (ON) :

$$ON = n_0 \sin \theta_a = (\frac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2})^{1/2} \quad (18)$$

n_0 indice de l'air égal à 1, ON s'écrit donc :

$$ON = \sin \theta_a = (\frac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2})^{1/2} \quad (19)$$

On peut exprimer l'ouverture numérique en fonction de la différence des indices du cœur et de la gaine Δ .

$$\Delta = \frac{n_c^2 - n_g^2}{2n_c^2} \approx \frac{n_c - n_g}{n_c} \quad (20)$$

On peut ainsi écrire :

$$ON = n_c (2\Delta)^{1/2} \quad (21)$$

L'ouverture numérique définit pour une fibre optique l'angle maximum d'injection.

En télécommunications optique une forte ouverture numérique ON qui permet le couplage d'une quantité importante de lumière dans la fibre entraînerait une forte

dispersion de temps de propagation entre les rayons. Généralement l'ouverture numérique est comprise entre : $0.3 < ON < 0.6$.

II.2.5. Affaiblissement et dispersion dans les fibres optiques

La distance de propagation d'un signal sur une fibre optique est limitée par l'atténuation et la dispersion.

II.2.5.1. Affaiblissement

Les facteurs contribuant à l'atténuation dans la fibre optique sont l'absorption la diffusion due aux hétérogénéités d'indice de réfraction du cœur, la diffusion due aux irrégularités de l'interface cœur/gaine, les pertes dues aux courbures, aux jonctions des fibres et les pertes par couplage aux extrémités

- **Pertes par absorption**

Intervient en premier lieu l'absorption intrinsèque du matériau. Dans la silice (composant de base de la plupart des fibres), elle apparaît dans le proche ultraviolet ($0.4 \mu\text{m}$) et dans l'infrarouge ($1.7 \mu\text{m}$) (figure 10). En second lieu, l'absorption est due aux impuretés identifiées et relève donc de défauts intrinsèques à la technologie de fabrication du matériau. Les pics d'absorption présents sont liés la présence de métaux de transition (ions Fe^{2+} , Co^{2+} , Cr^{3+} , Ni^{2+} , ...etc.) ; et des ions OH^- (provenant des traces d'eau) comme impureté majeure pour la longueur d'onde $1,3 \mu\text{m}$.

- **Pertes par diffusion**

Quand la lumière rencontre une irrégularité de dimension inférieure à sa longueur d'onde, elle est diffusée (diffusion de Rayleigh). Certaines des directions de diffusion sont telles que les conditions de réflexion totale à l'interface cœur/gaine ne sont plus remplies: une partie de la lumière entre dans la gaine pour y être perdue. L'atténuation due à Rayleigh est proportionnelle à $1/\lambda^4$, ce qui conduit à travailler à des longueurs d'onde élevées (infra-rouge).

- **L'atténuation**

L'atténuation traduit la capacité du guide à transmettre plus ou moins loin une puissance optique modulée (ou une puissance moyenne). Elle est donnée par le

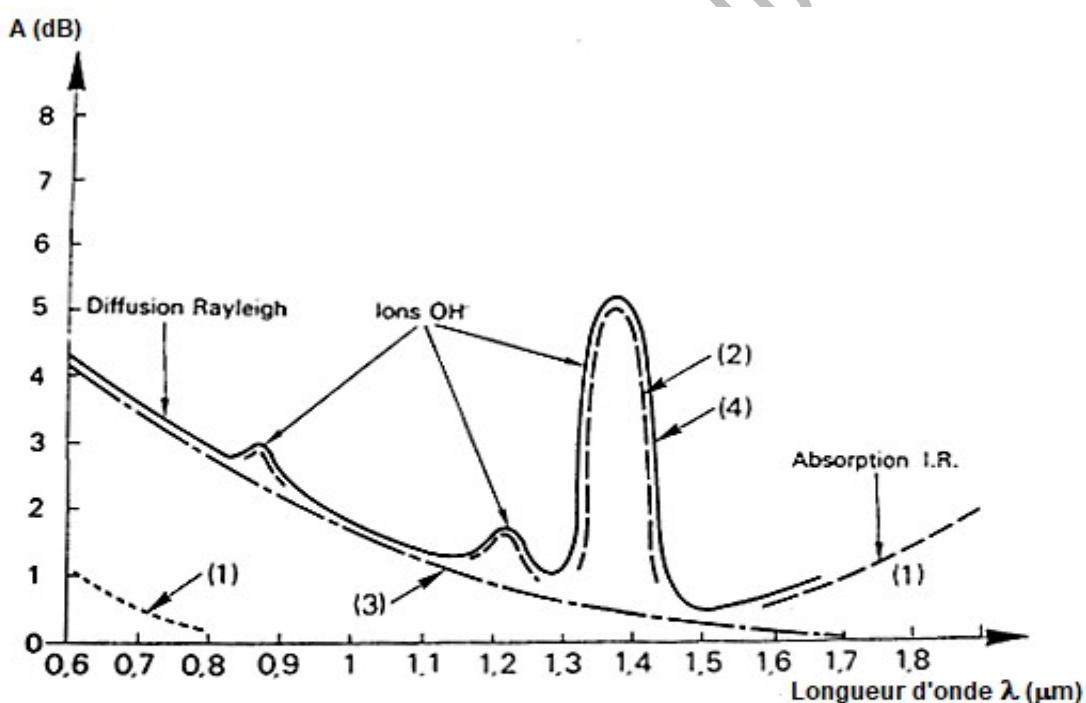
rapport de la puissance optique P_s mesurée en sortie et de la puissance optique P_0 mesurée à l'entrée de la fibre, à la sortie de la fibre de longueur L la puissance transportée est $P_0 e^{-\alpha L}$. α dépend du matériau et de la longueur d'onde λ . Pour que l'atténuation soit faible il faut que α soit le plus petit possible.

L'affaiblissement s'exprime en décibels en $\log \frac{P_s}{P_0}$ sous la forme :

$$A_{dB} = 10 \log \frac{P_s}{P_0} (dB) = -10 \log(e^{\alpha L}) (dB) \quad (22)$$

Fréquemment, on donne l'affaiblissement par kilomètre de fibre (dB/km).

La courbe d'atténuation typique d'une fibre de silice est représentée sur la figure 10.



1: Absorption dans le proche ultraviolet et dans l'infrarouge.

2: Absorption due à des impuretés dans la silice.

3: Diffusion Rayleigh.

4: Courbe d'atténuation résultante.

Figure 10. Pertes dans la fibre optique.

II.2.5.2. Dispersion du rayonnement

Lorsqu'une impulsion se propage en régime linéaire dans une fibre optique, elle subit un phénomène de dispersion qui se traduit par un étalement temporel de celle-ci et qui s'ajoute à l'atténuation pour limiter la capacité de transmission de la fibre optique. Plusieurs types de dispersion existent, contribuant tous à l'étalement de l'impulsion au cours de sa propagation dans le guide :

- **la dispersion modale** : elle n'est présente que dans les fibres multimode car il s'agit d'une dispersion liée au fait que les modes se propagent avec des trajets et des vitesses différentes même si le rayonnement est monochromatique. Une impulsion lumineuse injectée dans la fibre va s'élargir. Deux impulsions successives différentes à l'entrée de la fibre peuvent ainsi interférer ce qui provoque une perte d'information. Deux ondes (modes) qui se propagent avec des angles différents, n'arrivent pas en même temps à l'autre extrémité de la fibre.

Le mode axial (rayon direct) est le premier à arriver, le temps mis pour traverser une fibre de longueur L est :

$$\tau_0 = \frac{L}{c} n_c \quad (23)$$

Le temps mis par une onde qui se propage avec un angle ϕ est τ est donné par :

$$\tau = \frac{L}{\cos\phi} \frac{n_c}{c} \quad (24)$$

La différence des deux temps $\Delta\tau$ est :

$$\Delta\tau = \tau - \tau_0 = \frac{L}{c} n_c \left[\frac{1}{\cos\phi} - 1 \right] \quad (25)$$

$$\cos\phi = \sqrt{1 - \sin^2\phi} = \sqrt{1 - \frac{ON^2}{n_c^2}} \approx 1 - \frac{ON^2}{2n_c^2} \quad (26)$$

$$(\cos\phi)^{-1} = 1 + \frac{ON^2}{2n_c^2} \quad (27)$$

La dispersion modale s'écrit alors :

$$\Delta\tau = \frac{L}{2c \cdot n_c} ON^2 \quad (28)$$

On peut aussi écrire:

$$\frac{\Delta\tau}{L} = \frac{ON^2}{2c \cdot n_c} \approx \frac{\Delta \cdot n_c}{c} \quad (29)$$

$\Delta\tau$ est la largeur de la réponse impulsionnelle de la fibre.

La dispersion modale est minimisée par le profil à gradient d'indice et elle est évitée avec les fibres monomode.

- **La dispersion chromatique** est due au fait que l'indice de réfraction du matériau dépend de la longueur d'onde. Elle induit des modifications de la vitesse de groupe et favorise ainsi l'étalement des impulsions lumineuses. La dispersion chromatique est une dispersion propre au matériau avec une influence plus faible que sa précédente.

Une impulsion de rayonnement est un paquet d'ondes dont la vitesse de groupe est donnée par :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (30)$$

Avec $\omega=2\pi\nu$ et $k=2\pi/\lambda$

On peut écrire :

$$v_g = \frac{c}{N_c} \quad (31)$$

Avec : N_c indice de groupe de la propagation guidée : $N_c = n_c - \lambda \frac{\partial n_c}{\partial \lambda}$

Le temps mis par un paquet pour traverser une fibre de longueur L est donc égal à :

$$\tau = \frac{L}{c} N_c = \frac{L}{c} \left(n_c - \lambda \frac{\partial n_c}{\partial \lambda} \right) \quad (32)$$

L'expression de l'étalement dans le temps sur une distance L est :

$$\Delta\tau = \frac{L}{c} \frac{\partial N_c}{\partial \lambda} \Delta\lambda \quad (33)$$

Avec $\Delta\lambda$ la largeur spectrale du rayonnement.

D'autres phénomènes d'affaiblissement dans les fibres optiques sont aussi à prendre en considération lors de la mise bout à bout deux fibres optiques, il apparaît des pertes ponctuelles dues à la réflexion de Fresnel aux deux interfaces fibre/air, à la différence entre les paramètres des deux fibres, au positionnement relatif non correct et les pertes par courbure et micro-courbures.

III. Approche ondulatoire

La lumière est une onde électromagnétique et la manière dont elle se propage dans un milieu matériel dépend essentiellement des propriétés électromagnétiques de ce milieu. La vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu isotrope est reliée à la permittivité diélectrique ϵ et à la perméabilité magnétique μ par la relation $\epsilon\mu\nu^2 = 1$ (en particulier dans le vide $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$).

Au début du XXème siècle on découvrit que la lumière est constituée de particules d'énergie, les photons (théorie corpusculaire). Pour autant, le modèle ondulatoire n'est pas abandonné, mais plutôt intégré à la mécanique quantique. A ce photon d'énergie E est associée une onde de fréquence ν , ainsi le comportement de l'onde associée à cette particule reste parfaitement décrit par le modèle ondulatoire de la lumière. Maxwell conclut que la lumière est un phénomène électromagnétique : c'est à dire une onde électromagnétique.

III.1. Equations de Maxwell

La lumière n'est qu'une oscillation de champs électrique et magnétique s'influencant mutuellement par la loi de l'induction et la loi d'Ampère, telles qu'elles sont décrites par les équations de Maxwell. L'onde électromagnétique est une oscillation transversale, car les champs \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires à la direction de propagation \vec{k} . En 1864, Maxwell synthétisa toutes les lois de l'électromagnétisme et les décrit en termes mathématiques. L'une des conséquences de la théorie de Maxwell est que les champs électriques et magnétiques du champ électromagnétique peuvent s'influencer les uns les autres même quand aucune charge ou courant électrique n'est présent. Autrement dit, les champs électromagnétiques ont une dynamique propre, indépendante de la matière.

Le socle de l'électromagnétisme repose sur les quatre équations de Maxwell, elles couplent l'évolution du champ électrique et du champ magnétique. Sous leur forme locale ces équations sont :

Equation de Maxwell Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (34)$$

Equation de Maxwell flux magnétique

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (35)$$

Equation de Maxwell Faraday (Circulation)

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (36)$$

Equation de Maxwell Ampère (Circulation)

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (37)$$

Avec $\mu = \mu_r \mu_0$ et $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} Fm^{-1}$$
 (Farad par mètre)

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Hm^{-1}$$
 (Henri par mètre)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792 \cdot 10^8 ms^{-1}$$
 : Vitesse c de la lumière dans le vide.

Dans un milieu i , la constante diélectrique ϵ_i et la permittivité diélectrique μ_i définissent une vitesse de propagation spécifique C_i au matériau en question : $C_i = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_i \mu_i}}$

Les équations de Maxwell mettent en jeu au moins les sources et deux grandeurs de champ (\vec{E} et \vec{B}). En faisant des manipulations relativement simples sur les opérateurs, il est possible d'éliminer l'un des champs et d'obtenir une équation de propagation (Equation d'ondes).

II.2. Equation de propagation

La lumière est une onde électromagnétique, l'étude de la propagation de cette dernière dans la fibre optique est basée sur la combinaison des équations de Maxwell pour les

champs électromagnétiques dans une structure diélectrique cylindrique (milieux linéaire homogène et isotrope). Le calcul des champs électromagnétiques dans une fibre optique nécessite de résoudre l'équation de propagation, déduite des équations de Maxwell on obtient ainsi un modèle amélioré de la propagation de la lumière dans la fibre optique.

Dans un milieu de conductivité nulle diélectrique (isolant) (μ, ϵ), les charges et les courants sont nuls $\rho = 0$ et $j = 0$. De plus le milieu considéré est linéaire, homogène et isotrope (LHI) ce qui permet de simplifier les équations de Maxwell. En l'absence de charge et de courant, les équations de Maxwell du paragraphe III.1 se simplifient donc :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (38)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (39)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (40)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (41)$$

En communications optiques, l'objectif est de faire propager les ondes lumineuses (ondes électromagnétiques) dans des milieux diélectriques comme le Niobate de Lithium LiNbO_3 , les fibres optiques et autres composants optiques. Dans ce cas, la susceptibilité électrique et la permittivité magnétique sont :

$$\epsilon_{\text{matériau}} = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (42)$$

$$\mu_{\text{matériau}} = \mu_r \mu_0 \quad (43)$$

$$c_{\text{matériau}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\text{matériau}} \cdot \mu_{\text{matériau}}}} \quad (44)$$

Où ϵ_r et μ_r représentent respectivement la permittivité et susceptibilité relatives du matériau. Aussi, l'ensemble des matériaux vérifie les relations suivantes :

$$\epsilon_{\text{matériau}} > \epsilon_0 \text{ et } \mu_{\text{matériau}} > \mu_0 \quad (45)$$

Donc :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{matériaux} \cdot \mu_{matériaux}}} = c_{matériaux} \quad (46)$$

Ce qui explique le fait que la vitesse de la lumière dans la matière soit toujours plus faible que dans le vide, le rapport entre les vitesses étant :

$$c_{matériaux} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \cdot \mu_r \mu_0}} \quad (47)$$

$$n = \frac{c}{c_{matériaux}} \quad (48)$$

On appelle n , l'indice de réfraction du matériau. Pour le verre $n=1,5$, pour le silicium $n \sim 3$, l'arséniure de Gallium à 3,5 et le niobate de lithium $n_o \sim 2.21$, $n_e \sim 2.14$.

Une onde qui se propage dans un matériau d'indice n , est donc caractérisée par une vitesse c/n . Le déphasage associé est :

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c/n} \Delta x = 2\pi\nu \frac{n\Delta x}{c} = 2\pi \frac{n\Delta x}{\lambda} \quad (49)$$

Δx représente le chemin géométrique et $n\Delta x$ représente le chemin optique (distance parcourue par l'onde).

Le comportement des guides d'onde en optique intégrée et des fibres est identique, la lumière est guidée à l'intérieur d'une région dont l'indice de réfraction est légèrement plus élevé ($\Delta n \sim 0,01$). Afin d'illustrer l'application de l'équation d'onde aux fibres optiques, nous traiterons le modèle du guide plan symétrique qui pourrait correspondre à une section longitudinale de la fibre par son milieu. L'équation de propagation (ou équation d'onde) traitée correspond à l'équation d'onde vectorielle pour les milieux homogènes avec des solutions harmoniques pour les champs à partir des équations de Maxwell.

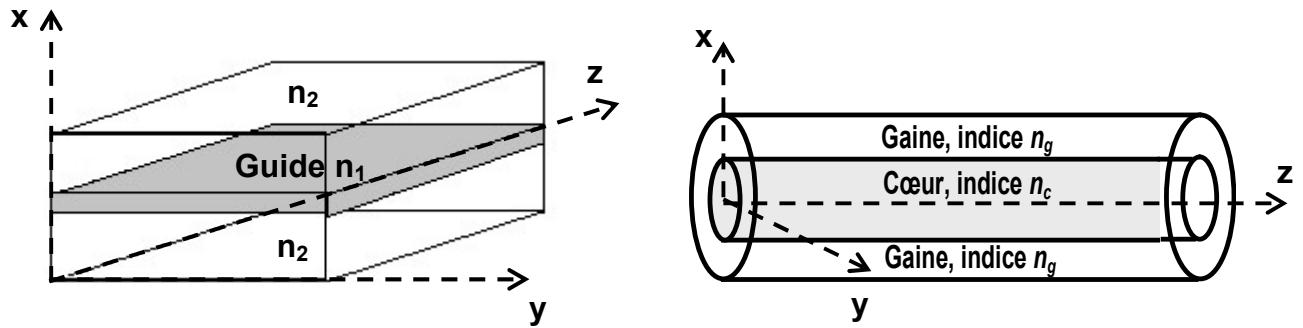


Figure 11. Structures d'un guide plan symétrique (a) et d'une fibre optique cylindrique (b).

Les équations 40 et 41 montrent que les champs électrique et magnétique s'induisent mutuellement.

La présence des termes $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ dans l'équation (40) et $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans l'équation (41), réalise un couplage entre les champs électrique et magnétique et permet de prévoir le phénomène de propagation.

Supposons que soit créée dans une région de l'espace une perturbation du champ électrique (variation de \vec{E} dans le temps). Le terme $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ crée dans le voisinage de cette région un champ magnétique variable qui, comme le stipule l'équation (40) engendre un champ électrique variable qui crée à son tour un champ magnétique et ainsi de suite. On conçoit ainsi comment une perturbation du champ électromagnétique peut se propager de proche en proche.

Pour déterminer l'équation de propagation des champs en fonction de \vec{E} ou de \vec{B} , on calcule :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (50)$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \text{laplacien}(\vec{E})$$

Pour éliminer \vec{B} , nous prenons le rotationnel de l'équation (7) :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \nabla \wedge \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (51)$$

Mais selon l'équation (5) $\text{div} \vec{E} = \mathbf{0}$, ce dernier calcul se simplifie et devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{E} \quad (52)$$

En utilisant l'équation (8) pour faire disparaître le terme \vec{B} il vient :

$$-\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (53)$$

En final, on obtient:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (54)$$

Cette équation est dite : **équation de propagation** dans un milieu diélectrique (μ, ϵ).

Ou encore en développant $\nabla^2 \vec{E}$ nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu\epsilon \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (55)$$

De la même manière on obtient :

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \mu\epsilon \left(\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (56)$$

D'une manière générale on montre que pour un potentiel V ou pour toute autre grandeur physique F , l'équation de propagation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = 0 \quad (57)$$

Si on se limite au seul axe x , l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = 0 \quad (58)$$

Pour un diélectrique sans perte l'indice est réel :

$$N^2 = n^2 = \epsilon_r(\omega) \quad (59)$$

$n = \sqrt{\epsilon_r}$: indice de réfraction.

Pour déterminer les solutions de l'équation de propagation, il est intéressant de chercher des solutions dans lesquelles les fonctions de l'espace et du temps sont séparées :

- **Dépendance temporelle**

On cherche une onde avec un terme fonction du temps de la forme $e^{j\omega t}$

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 f(x, y, z) \exp(j\omega t) \quad (60)$$

- **Dépendance spatiale**

On cherche une onde se propageant dans la direction z avec un terme de la forme $e^{-i\beta z}$

$$B : \text{constante de propagation dans la direction } z : \beta = \frac{2\pi n_z}{\lambda}$$

n_z : indice de réfraction dans la direction de propagation z .

Le terme qui fait intervenir la dépendance spatiale (fonction de (x, y, z)) est de la forme :

$$f(x, y, z) = f(x, y) \exp(-j\beta z) \quad (61)$$

Donc la solution totale, pour une composante du champ, aura la forme (avec les deux termes de dépendances temporelle et spatiale):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 f(x, y) \exp(-j\beta z) \cdot \exp(j\omega t) \quad (62)$$

II.2.1. Solution de l'équation de propagation

Avant de s'intéresser au champ électromagnétique, qui est composé de deux champs vectoriels \vec{E} et \vec{B} , rappelons les solutions de l'équation de propagation pour la fonction F dont la solution est une onde qui se propage à la célérité c .

- **Onde plane monochromatique**

Une onde est plane si F a la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à une direction fixe définie par un vecteur unitaire \vec{k} qui est la direction de propagation (Onde plane).

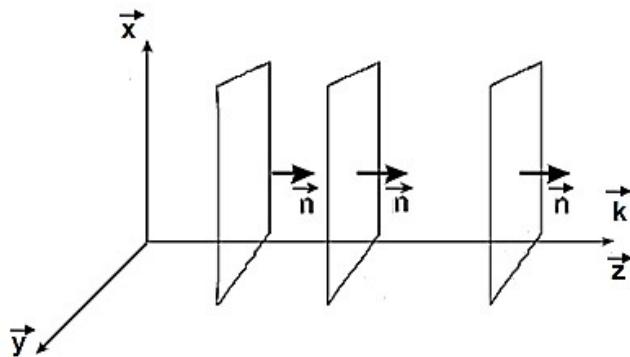


Figure 12. Propagation de l'onde plane.

L'onde plane en général, s'applique pour les ondes électromagnétiques de vecteurs \vec{E} et \vec{B} se propageant suivant \vec{k} avec la particularité d'avoir \vec{E} et \vec{B} orthogonaux entre eux dans un plan normal à la direction de propagation \vec{k} .

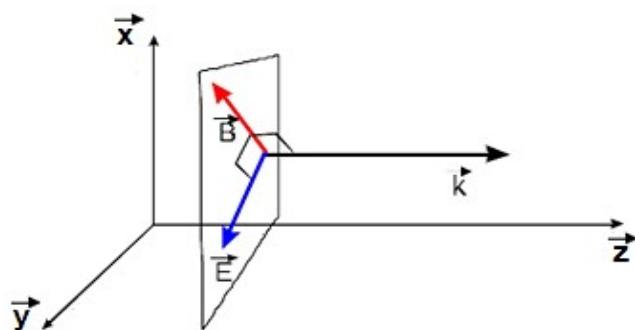


Figure 13. Orthogonalité des champs.

Une onde plane monochromatique (une seule fréquence donc une seule longueur d'onde) qui se propage suivant un seul axe x peut s'écrire sous la forme algébrique suivante :

$$\vec{E} = E_0 \cos(k(x - ct)) \quad (63)$$

Ce qui donne une double périodicité à la fois :

Dans le temps avec : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

et dans l'espace avec : $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$

$$\text{où : } \boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}$$

Calculons les dérivées de la composante du champ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ (62)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x, y, z)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(xy)}{\partial x^2} \vec{E}_0 \exp(-j\beta z) \exp(jwt) \quad (64)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x, y, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(xy)}{\partial y^2} \vec{E}_0 \exp(-j\beta z) \exp(jwt) \quad (65)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x, y, z)}{\partial z^2} = -\beta^2 f(x, y) \vec{E}_0 \exp(-j\beta z) \exp(jwt) \quad (66)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x, y, z)}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x, y) \vec{E}_0 \exp(-j\beta z) \exp(jwt) \quad (67)$$

En remplaçant dans l'équation de propagation (56) on obtient :

$$\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \beta^2 f(x, y) \right] \vec{E}_0 \exp(-j\beta z) \exp(jwt) + \epsilon \mu \omega^2 \vec{E}_0 \exp(-j\beta z) \exp(jwt) = 0 \quad (68)$$

Ce qui donne après simplification :

$$\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right] \vec{E}_0 + (\epsilon \mu \omega^2 - \beta^2) f(x, y) \vec{E}_0 = 0 \quad (69)$$

En remplaçant : $\epsilon \mu = \frac{1}{v^2} = \frac{n^2}{c^2}$ on obtient :

$$\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right] \vec{E}_0 + \left(\frac{n^2}{c^2} \omega^2 - \beta^2 \right) f(x, y) \vec{E}_0 = 0 \quad (70)$$

$$\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right] \vec{E}_0 + (k^2 n^2 - \beta^2) f(x, y) \vec{E}_0 = 0 \quad (71)$$

L'équation (71) est appelé équation de Helmholtz.

Dans le guide plan, on pose qu'il n'y a pas de variation selon y on obtient l'équation :

$$\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right] \vec{E}_0 + (k^2 n^2 - \beta^2) f(x, y) \vec{E}_0 = 0 \quad (72)$$

$$\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right] + (k^2 n^2 - \beta^2) f(x, y) = 0 \quad (73)$$

On obtient une équation différentielle du 2nd ordre sans second membre de la forme :

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] + C \cdot F = 0 \quad (74)$$

Toutes les composantes du champ vont satisfaire à la même équation, qui est l'équation scalaire de Helmholtz

La solution dépend du signe de $(k^2 n^2 - \beta^2)$, on obtient une solution oscillatoire ou exponentielle.

1- Solution oscillatoire (Sinusoïdale)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right] + (k^2 n^2 - \beta^2) f(x, y) = 0 \\ & f = A \cos(\sqrt{(k^2 n^2 - \beta^2)} x) + B \sin(\sqrt{(k^2 n^2 - \beta^2)} x) \end{aligned} \quad (75)$$

Avec $(k^2 n^2 - \beta^2) > 0$

2- Solution évanescante (exponentielle)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right] + (k^2 n^2 - \beta^2) f(x, y) = 0 \\ & f = C \exp(-\sqrt{(k^2 n^2 - \beta^2)} x) + D \exp(\sqrt{(k^2 n^2 - \beta^2)} x) \end{aligned} \quad (76)$$

Avec $(k^2 n^2 - \beta^2) < 0$

Les deux solutions sont possibles selon la nature du problème et les conditions aux limites. On cherche une solution oscillatoire dans le cœur de la fibre pour représenter le mode qui se propage et une exponentielle décroissante dans la gaine pour représenter les champs évanescents dans ces régions.

- **Dans la région du cœur : $n = n_c$**

La solution est oscillatoire, on sépare les solutions en deux classes de modes pairs et impairs

- Mode pair : $f = A \cos(\sqrt{(k^2 n^2 - \beta^2)} x)$ (77)

- Mode impair : $f = B \sin(\sqrt{(k^2 n^2 - \beta^2)} x)$ (78)

- Dans la région de la gaine : $n = n_g$

Le champ est une exponentielle décroissante pour de grandes valeurs de $x \rightarrow \pm\infty$

$$f = C \exp(-\sqrt{(k^2 n^2 - \beta^2)} x) \quad (79)$$

$$f = B \exp(-\sqrt{(k^2 n^2 - \beta^2)} x) \quad (80)$$

A la frontière entre les deux régions cœur/gaine, le champ E_y et sa dérivée doivent être continus. On détermine les valeurs de A, B, C, D par les conditions aux frontières et aux limites.

Dans cette étude nous pouvons aussi traiter la propagation dans les fibres optiques (modèle du guide plan symétrique illustré en figure 11), on a :

$n_1 > n_2$ pour le guide plan symétrique et $n_c > n_g$ pour la fibre optique.

On peut alors écrire :

$$n_c > n_g \Rightarrow k n_c > k n_g$$

L'étude du signe de $(k^2 n^2 - \beta^2)$, se fait selon β de la manière suivante :

$$k^2 n_c^2 > k^2 n_g^2 \Rightarrow k^2 n_c^2 - \beta^2 > k^2 n_g^2 - \beta^2$$

- a) $\beta > k n_c$
- b) $k n_c > \beta > k n_g$
- c) $\beta < k n_g$

IV. Evolution et perspectives de la fibre optique

La fibre optique est l'objet de nombreuses recherches portant sur l'amélioration de ses performances. L'une des voies de recherche prometteuse explorée dans les laboratoires de recherche universitaires et industriels est : la fibre optique à cristaux photoniques, ou à bande interdite photonique : fibre à BIP (Photonic Band Gap Fiber : PBG Fiber).

On réalise des fibres optiques qui, au lieu d'être constituées d'un cœur et d'une gaine, ou encore d'une structure à gradient d'indice, seraient constituées d'un cristal photonique à deux dimensions

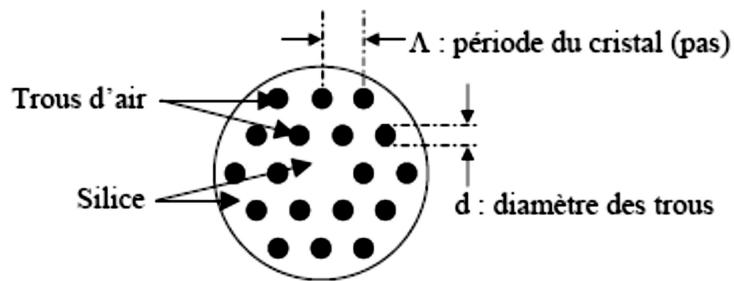


Figure 14. Fibre optique à cristal photonique

Dans les fibres à cœur creux, l'indice du cœur est cette fois inférieur à l'indice effectif de la gaine, le mécanisme de guidage ne repose plus sur le phénomène de réflexion interne totale mais sur l'existence de bandes photoniques interdites. Concrètement, il existe des plages de fréquences pour lesquelles la propagation de la lumière est impossible dans la gaine, mais autorisée dans le cœur, ce qui assure donc le guidage de certaines longueurs d'onde de manière selective.