

1) → Les composantes d'un vecteur $\vec{P}$ dans le système d'axes (Ox_1, Ox_2, Ox_3) sont (P_1, P_2, P_3) . Nous avons :

$$\vec{P} = [P_1, P_2, P_3]$$

on écrit souvent $\vec{P}$ sous la forme P_i ou $[P_i]$

2) → Le module, ou longueur, de $\vec{P}$ est donné par :

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = P_i P_i$$

3) → Un vecteur unitaire est un vecteur de longueur unité.

4) → Le produit scalaire de $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ s'écrit $(\vec{P} \cdot \vec{Q})$:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = P_i Q_i = P Q \cos \theta$$

θ étant l'angle de $\vec{P}$ et $\vec{Q}$.

5) → Le produit vectoriel de $\vec{P}$ et de $\vec{Q}$ s'écrit $\vec{P} \wedge \vec{Q}$:

$$\vec{P} \wedge \vec{Q} = (P Q \sin \theta) \vec{l}$$

$\vec{l}$ étant le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{P}$ et à $\vec{Q}$, d'orientation telle que $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{l}$, forment un système d'axes à droite.

les composantes de $(\vec{P} \wedge \vec{Q})$ rapportées à des axes à droite, sont :

$$[P_2 Q_3 - P_3 Q_2, P_3 Q_1 - P_1 Q_3, P_1 Q_2 - P_2 Q_1]$$

6) → Le gradient d'un scalaire φ , variant d'un point à l'autre, est un vecteur :

$$\vec{\text{grad}} \varphi = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right]$$

7) → La divergence d'un vecteur $\vec{P}$ variant d'un point à un autre, est un scalaire :

$$\text{div} \vec{P} = \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3} = \frac{\partial P_i}{\partial x_i}$$

8) → Le rotationnel d'un vecteur $\vec{P}$ variant d'un point à un autre, est un vecteur qui se note $\text{rot} \vec{P}$, et dont les composantes, rapportées à des axes à droite sont :

$$\left[\frac{\partial P_3}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial x_3}, \frac{\partial P_1}{\partial x_3} - \frac{\partial P_3}{\partial x_1}, \frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \right]$$

Chapitre 1

Bases de la physique cristalline

1.1. Scalars, Vectors et Tenseurs de rang deux.

1) Scalars : En physique, certaines grandeurs usuelles comme la densité et la température d'un corps, sont indépendantes de toute notion d'orientation. Les grandeurs physiques non directionnelles sont des scalaires ; la valeur d'un scalaire est déterminée par un seul nombre. Un scalaire est aussi un tenseur de rang zéro.

2°) Vecteurs : - Il existe des grandeurs physiques qui sont inséparables de la notion de direction. En mécanique, les forces en sont un exemple. Pour définir l'action d'une force sur un point, il faut donner son intensité et sa direction. D'autres exemples de vecteurs : * l'intensité d'un champ électrique en un point, * le moment d'un dipôle magnétique.

- Un vecteur est déterminé par les valeurs de ses trois composantes sur les axes de référence choisis (ox_1, ox_2, ox_3). Les composantes sont les projections du vecteur sur les axes. Si les composantes de $\vec{E}$ sont E_1, E_2, E_3 ; nous écrivons : $\vec{E} = [E_1, E_2, E_3]$.

- Un vecteur est aussi appelé un tenseur de rang un.

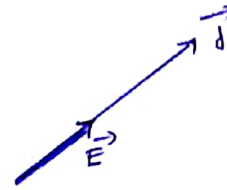
3°) Tenseurs de rang deux :

* Prenons l'exemple d'un ^{champ} électrique, représenté par un vecteur $\vec{E}$, qui agit à l'intérieur d'un conducteur, il se produit un courant électrique. La densité de courant (intensité par unité de surface perpendiculaire au courant) est représenté par le vecteur $\vec{j}$.

a) - Si le conducteur est isotrope (ex : poudre de graphite compactée), $\vec{j}$ est parallèle à $\vec{E}$ et l'intensité de $\vec{j}$ est proportionnelle à l'intensité de $\vec{E}$:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \dots (1)$$

σ : étant la conductivité



- Si, dans le système d'axes ox_1, ox_2, ox_3 , $\vec{j} = [j_1, j_2, j_3]$ et $\vec{E} = [E_1, E_2, E_3]$:

$$j_1 = \sigma E_1, \quad j_2 = \sigma E_2, \quad j_3 = \sigma E_3 \quad \dots (2)$$

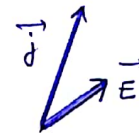
b) - Si le conducteur est un cristal (ex: monocristal de graphite), la relation entre les composantes de $\vec{j}$ et de $\vec{E}$ s'écrit :

$$\begin{cases} j_1 = \sigma_{11} E_1 + \sigma_{12} E_2 + \sigma_{13} E_3 \\ j_2 = \sigma_{21} E_1 + \sigma_{22} E_2 + \sigma_{23} E_3 \\ j_3 = \sigma_{31} E_1 + \sigma_{32} E_2 + \sigma_{33} E_3 \end{cases} \quad \dots (3)$$

σ_{11}, σ_{12} , etc... étant des constantes.

Rq * Les cristaux ont des propriétés de conductivité anisotropes

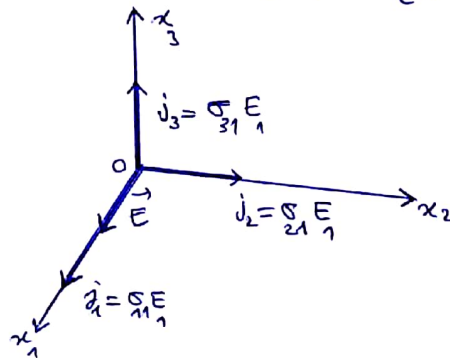
* $\vec{j}$ n'a plus la même direction que $\vec{E}$



Exemple :

Si le champ est appliqué parallèlement à ox_1 , $\vec{E} = [E_1, 0, 0]$ et les équations (3) deviennent :

$$\begin{cases} j_1 = \sigma_{11} E_1 \\ j_2 = \sigma_{21} E_1 \\ j_3 = \sigma_{31} E_1 \end{cases}$$



$\vec{j}$ possède des composantes non seulement sur (ox_1) , mais aussi sur les autres axes

- La conductivité d'un cristal est donnée par neuf coefficients qui peuvent être écrits sous la forme d'un tableau carré : $(3 \times 3 = 9)$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \dots (4)$$

Ce tableau symbolise un "tenseur de rang deux"

Remarques:

- 1) - Un tenseur de rang zéro (scalaire) est caractérisé par un seul nombre indépendant de tout système de référence. (ex: densité ρ).
- 2) - Un tenseur de rang un (vecteur) est caractérisé par trois nombres ou composantes, dont chacun est associé à un axe du système de référence (ex: E_z).
- 3) - Un tenseur de rang deux est caractérisé par neuf nombres ou composantes, dont chacun est associé à deux axes. (ex: conductivité σ_{12}).
Les composantes d'un tenseur de rang deux ont deux indices. Le nombre des indices donne le rang du tenseur.
- 4) - Le tableau suivant donne quelques exemples de propriétés cristallines représentées par des tenseurs de rang deux liant deux vecteurs :

Propriété tensorielle	Vecteur donné (appliqué)	Vecteur résultant (induit)
- conductivité électrique	champ électrique	Densité de courant électrique
- Conductivité thermique	Gradient de température	Densité de flux thermique
- Susceptibilité diélectrique	champ électrique	Polarisation diélectrique
- Susceptibilité magnétique	champ magnétique	Intensité d'aimantation
- Perméabilité	champ magnétique	Induction magnétique

1.2 - Notation des indices muets.

Si une propriété T lie deux vecteurs $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ et $\vec{Q} = (q_1, q_2, q_3)$ de telle sorte que :

$$\begin{cases} P_1 = T_{11} q_1 + T_{12} q_2 + T_{13} q_3 \\ P_2 = T_{21} q_1 + T_{22} q_2 + T_{23} q_3 \\ P_3 = T_{31} q_1 + T_{32} q_2 + T_{33} q_3 \end{cases} \quad \dots (5)$$

$T_{11}, T_{12}, \dots$ étant des constantes, et qui représentent un tenseur de rang deux :

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad \dots (6)$$

- on simplifie ces notations. les équations (5) peuvent s'écrire :

$$P_1 = \sum_{j=1}^3 T_{1j} q_j \quad ; \quad P_2 = \sum_{j=1}^3 T_{2j} q_j \quad ; \quad P_3 = \sum_{j=1}^3 T_{3j} q_j \quad \dots (7)$$

ou, sous forme plus condensée :

$$P_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} q_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad \dots (8)$$

En ôtant le signe de sommation Σ , (Notation d'Einstein)
convention

$$P_i = T_{ij} q_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \dots (9)$$

j , dans les équations (9), est appelé "indice muet". Il doit apparaître deux fois dans chaque terme.
 i : est un indice "libre".

- Pour un corps isotrope, l'équation correspondante à (9) serait :

$$P_i = T q_i$$

- le tenseur (6) peut s'écrire sous la forme abrégée $[T_{ij}]$.

1.2. Transformations.

Les neuf coefficients d'un tenseur $[T_{ij}]$ définissant une propriété physique dépendent du repère choisi pour exprimer les composantes des vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{q}$.
Il est donc essentiel d'étudier comment ce tableau se transforme $[P_i] [q_i]$ quand on exprime les vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{q}$ dans un autre système de coordonnées orthonormé.

1.2.1. Transformations des axes.

Le changement d'axes est le passage d'un système d'axes trirectangle à un autre ayant la même origine.

- Soit R un repère donné défini par la base $\{x_1, x_2, x_3\}$ et R' un nouveau repère défini par la base orthonormée $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$. Les nouveaux vecteurs de base s'expriment en fonction des anciens par les relations :

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad (10)$$

où nous avons utilisé la convention d'Einstein. On voit immédiatement que :

$$a_{ij} = x'_i \cdot x_j$$

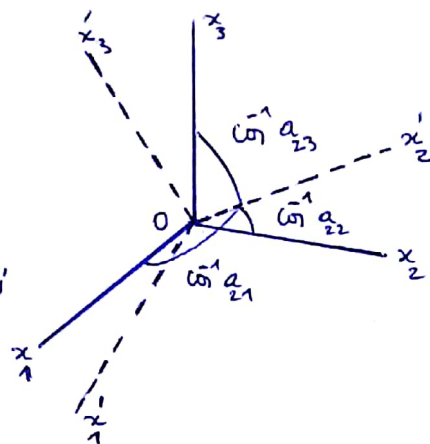
a_{ij} : est le cosinus de l'angle que font x'_i et x_j

- On peut représenter la relation (10)

à l'aide du tableau suivant :

	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

--- (11)



Exemple : $x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3$

$$x_3 = a_{13} x'_1 + a_{23} x'_2 + a_{33} x'_3$$

Rq: * Le premier indice des "a" se rapporte aux nouveaux axes, le second aux anciens.

* $a_{ij} \neq a_{ji}$

1.2.2. Transformation des composantes d'un vecteur

- Considérons un certain vecteur $[P_i]$ dont les composantes par rapport à x_1, x_2 et x_3 sont P_1, P_2, P_3 . Désignons par P'_1, P'_2, P'_3 ses composantes par rapport à x'_1, x'_2, x'_3 .

P'_1 est obtenu en projetant P_1, P_2, P_3 sur la nouvelle direction x'_1 . Ainsi :

$$P'_1 = P_1 \cos \widehat{x_1 x'_1} + P_2 \cos \widehat{x_2 x'_1} + P_3 \cos \widehat{x_3 x'_1}$$

d'où, d'après (11) :

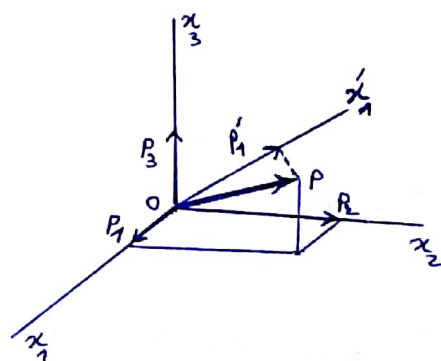
$$P'_1 = a_{11} P_1 + a_{12} P_2 + a_{13} P_3 \quad \text{--- (12.1)}$$

de même : $P'_2 = a_{21} P_1 + a_{22} P_2 + a_{23} P_3 \quad \text{--- (12.2)}$

$$P'_3 = a_{31} P_1 + a_{32} P_2 + a_{33} P_3 \quad \text{--- (12.3)}$$

que l'on peut écrire, selon la notation des indices muets :

$$P'_i = a_{ij} P_j \quad \text{--- (13)}$$



- Reprenant le même raisonnement pour la transformation inverse, d'après (11) :

$$\begin{cases} P_1 = a_{11} P'_1 + a_{21} P'_2 + a_{31} P'_3 \\ P_2 = a_{12} P'_1 + a_{22} P'_2 + a_{32} P'_3 \\ P_3 = a_{13} P'_1 + a_{23} P'_2 + a_{33} P'_3 \end{cases} \quad \text{--- (14)}$$

ou plus simplement :

$$P_i = a_{ji} P'_j \quad \text{--- (15)} ; \quad q_i = a_{ji} q'_j \quad (\text{vecteur } q)$$

1.2.3 Transformation des coordonnées d'un point

- Les coordonnées (x_1, x_2, x_3) d'un point dans le système ox_1, ox_2, ox_3 sont les composantes du vecteur OP . Il résulte des équations (12.1) à (12.3) que les coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3) par rapport à ox'_1, ox'_2, ox'_3 sont données :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ x'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{cases} \quad \text{--- (16)}$$

ou : $x'_i = a_{ij} x_j \quad \text{--- (17)}$

et d'après (14), nous avons aussi :

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} x'_1 + a_{21} x'_2 + a_{31} x'_3 \\ x_2 = a_{12} x'_1 + a_{22} x'_2 + a_{32} x'_3 \\ x_3 = a_{13} x'_1 + a_{23} x'_2 + a_{33} x'_3 \end{cases} \quad \text{--- (18)}$$

soit : $x_i = a_{ji} x'_j \quad \text{--- (19)}$

1.2.4 Transformation des composantes d'un tenseur de rang deux.

- Soit P et q deux vecteurs liés par la propriété T . Les valeurs des coefficients T_{ij} dans les équations (5) dépendent du système choisi ; prenons un nouveau système d'axes x'_1, x'_2, x'_3 lié au système précédent par les cosinus directeurs (11). Les vecteurs P et q ont pour composantes P_i et q_i . Pour trouver les relations qui existent entre ces nouvelles composantes, nous utiliserons la série des équations suivantes :

$$p' \xrightarrow{(13)} p \xrightarrow{(9)} q \xrightarrow{(15)} q'$$

On peut écrire l'équation (13) sous la forme :

$$p'_i = a_{ik} p_k \quad \text{--- (13')}$$

en utilisant k comme indice libre et i comme indice muet, on donne à (9)

$$\text{le forme : } p_k = T_{kl} q_l \quad \text{--- (9')}$$

De façon analogue, en changeant l'indice libre i en l , (15) devient :

$$q_l = a_{jl} q'_j \quad \text{--- (15')}$$

En combinant ces équations :

$$p'_i = a_{ik} p_k = a_{ik} T_{kl} q_l = a_{ik} T_{kl} a_{jl} q'_j$$

$$\text{ou } p'_i = T'_{ij} q'_j \quad \text{--- (20)}$$

$$\text{Finalement : } T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl} \quad \text{--- (21)}$$

on note que les indices k et l sont des indices muets alors que i et j sont des indices libres.

Développons par rapport à l :

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{j1} T_{k1} + a_{ik} a_{j2} T_{k2} + a_{ik} a_{j3} T_{k3}$$

k est maintenant un indice muet dans chaque terme, et le développement complet est le suivant :

$$\begin{aligned} T'_{ij} = & a_{i1} a_{j1} T_{11} + a_{i1} a_{j2} T_{12} + a_{i1} a_{j3} T_{13} + \\ & + a_{i2} a_{j1} T_{21} + a_{i2} a_{j2} T_{22} + a_{i2} a_{j3} T_{23} + \\ & + a_{i3} a_{j1} T_{31} + a_{i3} a_{j2} T_{32} + a_{i3} a_{j3} T_{33} . \end{aligned} \quad \text{--- (22)}$$

une équation de ce type correspond à chaque groupe de valeurs de i et j .

on a un système de neuf équations, chacune ayant neuf terme dans son second membre.

- On obtiendra l'équation qui donne les anciennes composantes en fonction des nouvelles en utilisant la série d'équations : $p \rightarrow p' \rightarrow q' \rightarrow q$:

$$T'_{ij} = a_{ki} a_{lj} T_{kl} \quad \text{--- (23)}$$

- Dans le tableau suivant, on regroupe les ^{Lois} de transformation des vecteurs et des tenseurs :

Nom	Rang du Tenseur	Loi de transformation	
		Nouveaux termes en fonction des anciens	Anciens termes en fonction des nouveaux
Scalaire	0	$\varphi' = \varphi$	$\varphi = \varphi'$
vecteur	1	$P'_i = a_{ij} P_j$ --- (13)	$P_i = a_{ji} P'_j$ (15)
tenseur	2	$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$ (21)	$T_{ij} = a_{ki} a_{lj} T'_{kl}$ (23)
—	3	$T'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn}$	$T_{ijk} = a_{li} a_{mj} a_{nk} T'_{lmn}$
—	4	$T'_{ijkl} = a_{in} a_{jm} a_{ko} a_{lp} T_{mnop}$	$T_{ijkl} = a_{mi} a_{nj} a_{ok} a_{pl} T'_{mnop}$

1.3 Définition d'un tenseur

“ Un tenseur de rang n est un ensemble de 3^n composantes caractérisées par n indices qui se transforment lors d'un changement d'un repère orthonormé à un autre repère orthonormé comme le produit de n composantes de vecteurs ”.

Exemples :

* Un tenseur de rang 2 est un ensemble de 9 coefficients T_{ij} définis dans un repère orthonormé donné R et appelés composantes du tenseur qui, dans un autre repère orthonormé R' déduit de R par la matrice de passage (a_{ij}) , deviennent des composantes T'_{ij} telles que :

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$$

et réciproquement : $T_{ij} = a_{ki} a_{lj} T'_{kl}$

* De même un tenseur $[T]$ de rang 3 a 27 composantes T_{ijk} .

* De la même façon, un tenseur $[T]$ de rang 4 possède $3^4 = 81$ composantes T_{ijkl} .

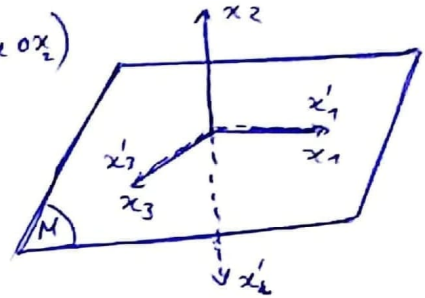
* Ces tenseurs se transforment par changement de repère selon les relations données dans le tableau précédent.

* Un scalaire est un tenseur de rang 0 et un vecteur est un tenseur de rang 1.

Exercice 1 :

Exemples de matrice de passage :

- 1) - Le nouveau repère R' est symétrique de R par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe (Ox_2) .

(symétrie par rapport au plan $M \perp$ à l'axe Ox_2) (R') : en trait pointillé (R) : ... pleinSolution :

Dans ce cas, les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 sont donnés par :

$$e'_1 = e_1 ; \quad e'_2 = -e_2 ; \quad e'_3 = e_3$$

et la matrice de passage pour ce changement de repère est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

- Le nouveau repère R' se déduit du repère R par une rotation d'un angle φ autour de l'axe (Ox_2) .

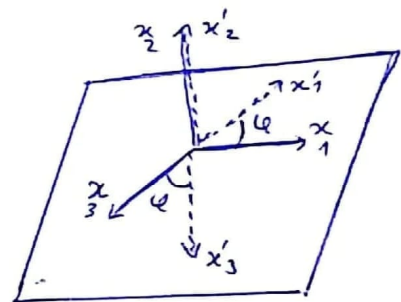
Solution :

Dans ce cas, les vecteurs sont donnés par :

$$\begin{cases} e'_1 = \cos \varphi e_1 - \sin \varphi e_3 \\ e'_2 = e_2 \\ e'_3 = \sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_3 \end{cases}$$

et la matrice de passage pour ce changement de repère est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$



1.3.1. Tenseurs symétriques et antisymétriques

- Un tenseur de rang 2 est symétrique si $T_{ij} = T_{ji}$ quels que soient i et j et la matrice qui le représente dans un système d'axes quelconque donné s'écrit :

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} ; \text{ il y a alors 6 coefficients indépendants}$$

Exemple: $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 8 & 4 \\ -3 & 4 & 12 \end{bmatrix}$ est un tenseur symétrique.

- Un tenseur de rang 2 est antisymétrique si $T_{ij} = -T_{ji}$, par conséquent $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$, soit en représentation matricielle :

$$\begin{bmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple: $\begin{bmatrix} 0 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ -\beta & \gamma & 0 \end{bmatrix}$

1.4. La quadrique représentative

1.4.1. Surface caractéristique du tenseur.

- Certaines propriétés des cristaux sont représentées par des tenseurs de rang deux; les valeurs de ces propriétés sont fonction de la direction dans laquelle on les mesure. D'autres propriétés cristallines sont représentées par des tenseurs d'un rang plus ou moins élevé. Dans cette partie, on va donner une représentation géométrique d'un tenseur de rang deux.
- Considérons l'équation suivante :

$$S_{ij} x_i x_j = 1 \quad \dots \dots (24)$$

où les S_{ij} sont des coefficients; En effectuant les sommations par rapport à i et j dans (24), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & S_{11} x_1^2 + S_{12} x_1 x_2 + S_{13} x_1 x_3 + \\ & + S_{21} x_2 x_1 + S_{22} x_2^2 + S_{23} x_2 x_3 + \\ & + S_{31} x_3 x_1 + S_{32} x_3 x_2 + S_{33} x_3^2 = 1 \end{aligned}$$

posons $S_{ij} = S_{ji}$, cette équation s'écrit, détaillée :

$$S_{11} x_1^2 + S_{22} x_2^2 + S_{33} x_3^2 + 2 S_{12} x_1 x_2 + 2 S_{13} x_1 x_3 + 2 S_{23} x_2 x_3 = 1.$$

- Le lieu des points M de coordonnées x_1, x_2, x_3 dans un repère orthonormé est une surface du second degré ou quadrique (Q) [ellipsoïde ou hyperboloïde] ayant pour centre l'origine O des coordonnées.
- Cherchons l'équation de cette quadrique dans un autre repère $(ox'_1 x'_2 x'_3)$ déduit de $(ox_1 x_2 x_3)$ par la matrice de passage $A = \{a_{ij}\}$. D'après l'équation (19) :

$$x_i = a_{ki} x'_k \text{ et } x_j = a_{lj} x'_l$$

et l'équation (24) devient :

$$S_{ij} a_{ki} a_{lj} x'_k x'_l = 1$$

que l'on peut écrire sous la forme : $S'_{kl} x'_k x'_l = 1$ avec $S'_{kl} = a_{ki} a_{lj} S_{ij}$

Ainsi les coefficients S_{ij} définissant la quadrique (Q) se transforment lors d'un changement de repère orthonormé comme les composantes d'un tenseur de rang 2

Conséquence : la théorie de transformation de tenseur symétrique de rang 2 est identique à la théorie de transformation de la QR.

Conclusion : la QR peut être utilisée pour décrire un tenseur symétrique de rang 2 : elle peut être utilisée pour décrire une propriété tensorielle d'un matériau solide.

(Rq : tous les tenseurs de rang deux représentant les propriétés cristallines étudiées dans ce cours sont symétriques à l'exception du tenseur thermoélectrique. Ainsi, par exemple, dans le cas du tenseur de conductivité électrique, nous avons : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$).

1.4.2 Axes principaux de la QR.

Les quadriques ont les propriétés importantes de posséder des axes principaux.

Le repère (ox_i) dans lequel on a $S_{ij} = 0$ si $i \neq j$ est formé par

ce que l'on appelle les axes principaux de la QR.

Par rapport aux axes principaux, l'équation $S_{ij} x_i x_j = 1$ de la QR s'écrit comme : $S_{11} x_1^2 + S_{22} x_2^2 + S_{33} x_3^2 = 1$ ou bien $S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2 + S_3 x_3^2 = 1$ et le tenseur $[S_{ij}]$ a donc la forme :

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \text{ par rapport à des axes quelconques}$$

$$\text{et } [S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_{11}=S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_{22}=S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33}=S_3 \end{bmatrix} \text{ par rapport à ces axes principaux}$$

S_1, S_2, S_3 sont appelées les composantes principales du tenseur $[S_{ij}]$ ou les composantes principales de la propriété physique représentée par le tenseur $[S_{ij}]$.

L'équation $S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2 + S_3 x_3^2 = 1$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{1}{S_1}\right)} + \frac{x_2^2}{\left(\frac{1}{S_2}\right)} + \frac{x_3^2}{\left(\frac{1}{S_3}\right)} = 1$$

* Si S_1, S_2, S_3 tous > 0 (positifs) $\Rightarrow$ la QR est ellipsoïde dont les longueurs des demi-axes sont $\frac{1}{\sqrt{S_1}}, \frac{1}{\sqrt{S_2}}, \frac{1}{\sqrt{S_3}}$.

* Si une composante au moins S_i est < 0 (S_1 ou S_2 ou $S_3 < 0$), alors la QR est un hyperboloïde.

* Exemple : $\vec{p} = [S_{ij}] \vec{q}$; on suppose que $[S_{ij}]$ est symétrique, est rapporté à ses axes principaux, alors : $p_1 = S_1 q_1$; $p_2 = S_2 q_2$; $p_3 = S_3 q_3$.
(où $S_1 = S_{11}$, $S_2 = S_{22}$, $S_3 = S_{33} \Rightarrow$ composantes principales)

$$\text{Ex : } \vec{J} = [\sigma_{ij}] \vec{E}$$

Par rapport aux axes principaux le tenseur de conductivité électrique s'écrit

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \text{ où } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \text{ sont les } \underline{\text{conductivités principales}}$$

$$\text{tel que : } J_1 = \sigma_1 E_1 ; J_2 = \sigma_2 E_2 ; J_3 = \sigma_3 E_3$$

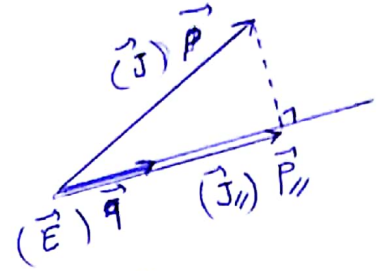
(Remarque : En général, $\vec{J}$ n'est pas parallèle à $\vec{E}$ du fait que $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$.

1.5. Intensité d'une propriété dans une direction donnée

1.5.1. Définition

- Soit la propriété physique tensorielle $[S_{ij}]$ tel que : $\vec{P} = [S_{ij}] \vec{q}$
En général, $\vec{P}$ n'est pas parallèle à $\vec{q}$.

- Soit $\vec{P}_{//}$ la composante du vecteur $\vec{P}$ dans la direction du vecteur $\vec{q}$:
elle représente la projection de $\vec{P}$ sur $\vec{q}$.



- Soit $S_{//}$ la propriété suivant la direction de $\vec{q}$, alors on peut écrire :

$$\vec{P}_{//} = S_{//} \vec{q}$$

$S_{//}$ est appelée "intensité de la propriété S dans la direction donnée de $\vec{q}$ ".

Comme $\vec{P}_{//}$ et $\vec{q}$ sont parallèles, alors on en déduit : $S_{//} = \frac{P_{//}}{q}$

1.5.2. Expression de $S_{//}$

* Axes quelconques.

- Par rapport à un système d'axes donné (Ox_i) , la relation tensorielle entre les 2 vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{q}$ est la suivante :

$$\vec{P} = [S_{ij}] \vec{q} \quad \text{ou bien} \quad \vec{P} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \vec{q}$$

- On suppose que par rapport à (Ox_i) le vecteur unitaire $\vec{l}$ de la direction de $\vec{q}$ ($\vec{q}/q$) a pour cosinus directeurs :

$$l_1 = \cos \theta_1 ; l_2 = \cos \theta_2 ; l_3 = \cos \theta_3$$

- La projection de $\vec{P}$ parallèlement à $\vec{q}$ est : $\vec{P} = P_{//} \vec{l}$

Le produit scalaire $\vec{P} \cdot \vec{q}$ est égal à $P_{//} \times q$ ($P_{//} = P \cos(\vec{P}, \vec{q})$)

on en déduit donc : $P_{//} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{q}}{q}$ et $S_{//} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{q}}{q^2}$

sachant que : $\vec{P} \cdot \vec{q} = P_1 q_1 + P_2 q_2 + P_3 q_3 = P_i q_i$ comme $P_i = S_{ij} q_j$

$$\Rightarrow \vec{P} \cdot \vec{q} = S_{ij} q_j q_i$$

aussi : $q_i = q l_i = q \cos \theta_i$ et $q_j = q l_j = q \cos \theta_j$ ($i, j = 1, 2, 3$)

$$\text{alors : } S_{ij} = \frac{S_{ij} q_i q_j}{q^2} = \frac{S_{ij} \cos \theta_i \cos \theta_j}{q^2} q^2$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{ij} = S_{ij} \cos \theta_i \cos \theta_j = S_{ij} l_i l_j}$$

* Axes principaux

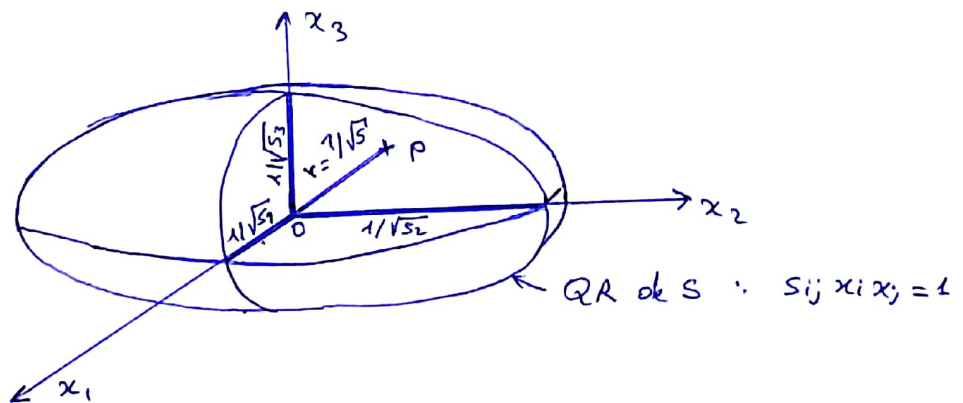
$$\vec{P} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix} \vec{q} \quad \text{càd : } S_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{ii} = S_1 l_1^2 + S_2 l_2^2 + S_3 l_3^2} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{S_{ii} = S_i l_i^2} \quad i=1,2,3$$

1.6. Propriétés géométriques de la quadrique représentative.

1.6.1. Longueur du rayon vecteur d'un point quelconque de la QR.

- On considère la propriété physique S représentée par le tenseur symétrique de rang 2 $[S_{ij}]$.
- On a défini la QR du tenseur $[S_{ij}]$ comme étant la surface (géométrique) donnée par l'équation $S_{ij} x_i x_j = 1$.
- Soit un point "P" de la QR qui est un ellipsoïde.



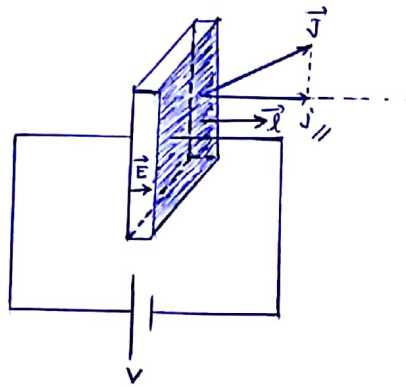
- Les cosinus directeurs de la direction $\vec{OP}$ sont: $l_1 = \cos \theta_1$, $l_2 = \cos \theta_2$, $l_3 = \cos \theta_3$.
- $\|\vec{OP}\|$ représente la longueur du rayon vecteur r du point P de la QR :
 $r = \|\vec{OP}\|$.

- Les coordonnées de $P(x_1, x_2, x_3)$ représentent les composantes du vecteur $\vec{OP} = \vec{r}$: $x_i = r \cos \theta_i$

Par conséquent : $S_{ij} x_i x_j = 1 \Leftrightarrow \boxed{r^2 S_{ij} \cos \theta_i \cos \theta_j = 1}$

Exemple : Intensité d'une propriété physique dans une direction donnée

- La mesure de la conductivité électrique d'un cristal peut se faire en utilisant une lame à faces parallèles de ce cristal, d'épaisseur e , petite devant ses dimensions latérales et dont les faces ont été métallisées. Une différence de potentiel V entre les faces induit un champ électrique $\vec{E}$ qui est normal aux faces du cristal et s'écrit $\vec{E} = \left(\frac{V}{e}\right) \vec{l}$, si $\vec{l}$ est un vecteur unitaire normal aux faces du cristal.
- On mesure alors l'intensité du courant dans le circuit et on en déduit la densité de courant (l'intensité/surface).



celle-ci est la composante $\vec{J}_{||}$ de la densité de courant $\vec{J}$ parallèle à la normale $\vec{l}$ au cristal, soit :

$$j_{||} = \vec{J} \cdot \vec{l} = j_i l_i = \sigma_{ij} E_j l_i = \sigma_{ij} l_j E l_i = \sigma_{ij} l_j l_i E$$

- On appelle "conductivité dans la direction $\vec{l}$ ", la quantité $\sigma_{||}$ telle que :

$$\sigma_{||} = \frac{j_{||}}{E} = \sigma_{ij} l_i l_j$$

- On remarque que la quantité $(S_{ij} \cos \theta_i \cos \theta_j)$ représente l'intensité de la propriété S dans la direction de $\vec{OP}$, d'où :

$$r^2 S = 1 \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{r^2} \text{ ou bien } r = \frac{1}{\sqrt{S}}}$$

Le module (norme, longueur) r d'un rayon vecteur quelconque $\vec{r}$ de la QR est égal à l'inverse de la racine carrée de l'intensité S de la propriété dans cette direction.

1.6.2. Rayon normal

- Par rapport aux axes (ox_i) supposés confondus avec les axes principaux de la propriété tensorielle S , on rappelle que l'on peut écrire $[S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$.
- Le tenseur relie un vecteur $\vec{q}$ à un vecteur $\vec{p}$ par la relation :

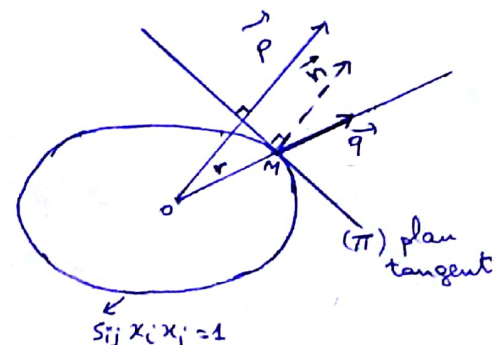
$$\vec{p} = [S] \vec{q} \text{ soit } p_i = S_{ij} q_j$$
- Soit $\vec{l}(\cos \theta_i)$ le vecteur unitaire de $\vec{q}$: $\vec{q} = [q \cos \theta_1, q \cos \theta_2, q \cos \theta_3]$.
 donc : $\vec{p} = [S_{ij}] \vec{q} \Rightarrow \vec{p} = [S_1 q \cos \theta_1, S_2 q \cos \theta_2, S_3 q \cos \theta_3]$
- Les coordonnées x_i d'un point M de la quadrique représentative du tenseur vérifient la relation : $S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2 + S_3 x_3^2 = 1 \Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = 0$ (*)
- La normale au point $M(x_1, x_2, x_3)$ de la quadrique (*) est un vecteur $\vec{n}$ de composantes $x_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = 2 S_{ij} x_j = 2 S_i x_i$
- Si le vecteur cause $\vec{q}$ est parallèle au rayon vecteur $\vec{OM}$, le vecteur effet associé $\vec{p}$ est parallèle à la normale $\vec{n}$ à la quadrique au point M :

$$\vec{q} \parallel \vec{OM} \Rightarrow \vec{OM}(r \cos \theta_1, r \cos \theta_2, r \cos \theta_3)$$

$$\text{alors : la normale } \vec{n} = (2 S_1 r \cos \theta_1, 2 S_2 r \cos \theta_2, 2 S_3 r \cos \theta_3)$$

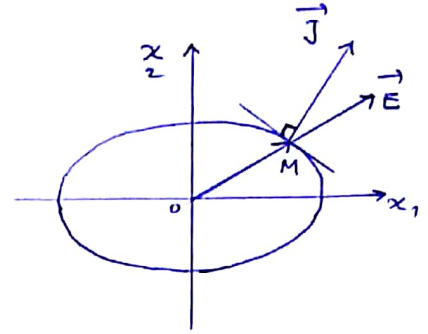
$$\text{puisque : } \vec{p} = [S_{ij} q \cos \theta_j, S_2 q \cos \theta_2, S_3 q \cos \theta_3]$$

$$\text{alors : } \vec{p} \parallel \vec{n}$$



Exemple :

- On choisit le champ électrique $\vec{E}$ comme vecteur cause dont l'effet est la densité de courant $\vec{J}$ qui lui est reliée par la conductivité électrique $[\sigma]$ soit : $\vec{J} = [\sigma] \vec{E}$



- La direction de $\vec{J}$ pour $\vec{E}$ donné peut être déterminée en traçant parallèlement à $\vec{E}$ un rayon vecteur $\vec{OM}$ de la QR, et en prenant ensuite la normale du plan tangent (π) à QR en ce point M. $\vec{J}$ est parallèle à cette normale.

1.6.3. Axes principaux

- $S_{ij} x_i x_j = 1$ étant l'équation de la QR du tenseur symétrique de rang 2 $[S_{ij}]$

- Par rapport aux axes principaux de la QR, cette équation prend la forme suivante : $S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2 + S_3 x_3^2 = 1$

- Aux points d'intersection de la QR avec les axes principaux, la normale à la QR est parallèle au rayon vecteur. Cette condition permet d'établir ce que l'on appelle "l'équation séculaire".

* soit M un point quelconque de la QR : $M(x_i)$

* soit la normale à la QR au point M : $S_{ij} x_j$

* si $\vec{OM}$ est parallèle à la normale, alors on a : $S_{ij} x_j = \lambda x_i$

λ étant une constante

$$\text{Pour } i=1 \text{ on a l'équation } \begin{cases} (S_{11} x_1 - \lambda x_1) + S_{12} x_2 + S_{13} x_3 = 0 \\ i=2 \quad \sim \quad \sim \quad \begin{cases} S_{12} x_1 + (S_{22} x_2 - \lambda x_2) + S_{23} x_3 = 0 \\ i=3 \quad \sim \quad \sim \quad \begin{cases} S_{13} x_1 + S_{12} x_2 + (S_{33} x_3 - \lambda x_3) = 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

→ ce sont 3 équations linéaires homogènes par rapport à x_1, x_2 et x_3 .

* Il existe une solution (en x_i) non nulle si le déterminant de ce système de 3 équations est nul :

$$\det(\lambda) = \begin{vmatrix} (S_{11}-\lambda) & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & (S_{22}-\lambda) & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & (S_{33}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (*)$$

$\det(\lambda)$ est une équation du 3^e degré en λ et elle est appelée "équation séculaire".

- L'équation $\det(\lambda)=0$ admet trois racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ qui représentent les composantes principales du tenseur $[S_{ij}]$.

* Chaque valeur λ_i définit la direction pour laquelle le rayon vecteur $\vec{OM}$ de la quadrique est parallèle à la normale de la QR au point M. Cette direction coïncide donc avec un axe principal.

- On peut montrer que les 3 directions (axes) principales sont perpendiculaires 2 à 2. Pour cela, on part des équations relatives à 2 rayons vecteurs:

$$\begin{cases} S_{ij} x'_j = \lambda_1 x'_i & (a) \\ \text{et } S_{ij} x''_j = \lambda_2 x''_i & (b) \end{cases}$$

* multiplions (a) par x''_i et (b) par x'_i , puis soustrayons. Nous avons:

$$S_{ij} (x'_j x''_i - x''_j x'_i) = (\lambda_1 - \lambda_2) x'_i x''_i$$

puisque $S_{ij} = S_{ji}$, le premier membre est nul. Donc:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) x'_i x''_i = 0$$

pour $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow x'_i x''_i = 0$: produit scalaire de 2 vecteurs nul.

$\Downarrow$

Les 2 vecteurs x'_i et x''_i sont perpendiculaires.

Idem pour $(\lambda_1 \text{ et } \lambda_3)$ et $(\lambda_2 \text{ et } \lambda_3)$.

Rque :

- Les trois racines de (*) l'équation séculaire, sont égales aux trois coefficients principaux S_1, S_2, S_3 :

- On peut noter que si la quadrique est déjà rapportée à ses axes principaux, l'équation séculaire est

$$\begin{vmatrix} S_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & S_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & S_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire: $(S_1 - \lambda)(S_2 - \lambda)(S_3 - \lambda) = 0$,

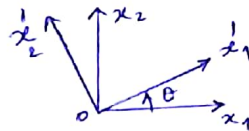
dont les racines sont évidemment S_1, S_2, S_3 .

1.7. Détermination géométrique des axes et coefficients principaux (Construction du cercle de Mohr).

- Nous venons de voir qu'un tenseur $[T]$ symétrique s'écrit dans le système de ses axes principaux $(ox_1x_2x_3)$:
$$\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix}$$
- Considérons un nouveau système d'axes $(ox'_1x'_2x'_3)$ déduit de $(ox_1x_2x_3)$ par une rotation d'un angle θ autour de ox_3 . Dans ce nouveau système d'axes les composantes T'_{ij} de $[T]$ s'écrivent :

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$$

où la matrice de passage $A = (a_{ij})$ est :
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



On obtient :

$$T'_{11} = a_{1k} a_{1l} T_{kl} = a_{11} a_{11} T_{11} + a_{12} a_{12} T_{22} + a_{13} a_{13} T_{33} ,$$

$$T'_{11} = \cos^2\theta T_{11} + \sin^2\theta T_{22} ;$$

$$T'_{22} = a_{2k} a_{2l} T_{kl} = a_{21} a_{21} T_{11} + a_{22} a_{22} T_{22} + a_{23} a_{23} T_{33}$$

$$T'_{22} = \sin^2\theta T_{11} + \cos^2\theta T_{22} ;$$

$$T'_{33} = T_{33} .$$

De même : $T'_{13} = 0 ; T'_{32} = 0 ;$

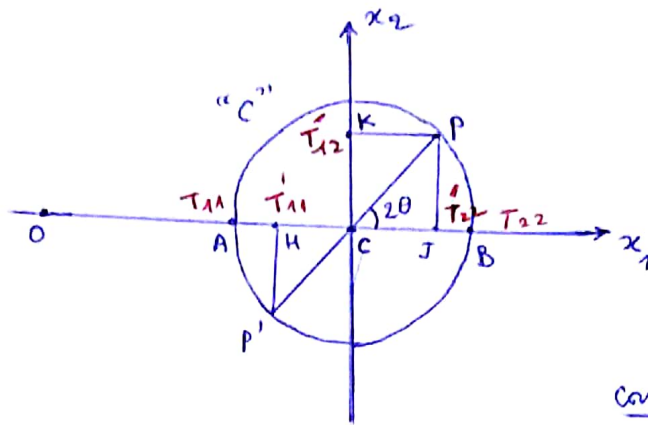
$$T'_{12} = T'_{21} = -\sin\theta \cos\theta T_{11} + \sin\theta \cos\theta T_{22} .$$

Ainsi le tenseur $[T]$ s'écrit dans le repère $(ox'_1x'_2x'_3)$:
$$\begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} & 0 \\ T'_{12} & T'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix}$$

- Exprimons T'_{11} , T'_{22} et T'_{12} en fonction de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$:

$$\left. \begin{aligned} T'_{11} &= \frac{1}{2} (T_{11} + T_{22}) - \frac{1}{2} (T_{22} - T_{11}) \cos 2\theta , \\ T'_{22} &= \frac{1}{2} (T_{11} + T_{22}) + \frac{1}{2} (T_{22} - T_{11}) \cos 2\theta , \\ T'_{12} &= \frac{1}{2} (T_{22} - T_{11}) \sin 2\theta . \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

- On peut traduire graphiquement l'ensemble des relations (*) en utilisant la représentation du cercle de Mohr.



construction du cercle de Mohr

- On place le long d'un axe ox_1 les points A et B tels que $\overline{OA} = T_{11}$ et $\overline{OB} = T_{22}$. On trace le cercle "C", de centre c, milieu du segment AB et de diamètre d'égale au module de AB. Les relations (*) deviennent :

$$T'_{11} = \overline{OC} - \frac{\overline{AB}}{2} \cos 2\theta,$$

$$T'_{22} = \overline{OC} + \frac{\overline{AB}}{2} \cos 2\theta,$$

$$T'_{12} = \frac{\overline{AB}}{2} \sin 2\theta.$$

- On trace l'axe Cx_2 tel que l'angle (Cx_1, Cx_2) soit égal à $\frac{\pi}{2}$ puis le rayon CP du cercle "C" faisant l'angle 2θ avec l'axe ox_1 . Soit P' le point diamétralement opposé à P. Soit H et J les projections respectives de P' et P sur l'axe Cx_1 et K la projection de P sur l'axe Cx_2 .

On voit que $T'_{11} = \overline{OH}$, $T'_{22} = \overline{OJ}$ et $T'_{12} = \overline{OK}$.

- Cette construction permet de déterminer facilement comment varie les coefficients du tenseur lors de la rotation des axes de coordonnées.

1.8. Effet de la symétrie cristalline.

- Pour déterminer le nombre des coefficients indépendants d'un tenseur matériel (c'est-à-dire représentant une propriété physique du cristal) de rang 2 symétrique, on utilise la quadrique représentative du tenseur qui doit être aussi symétrique que le cristal. Les éléments de symétrie d'une

quadrique quelconque sont :

- * 1 centre de symétrie,
- * 3 axes A_2 qui sont les axes principaux,
- * 3 miroirs perpendiculaires aux axes A_2 .

- par exemple, si le cristal possède un axe d'ordre 2, un des axes principaux de la quadrique est forcément parallèle à cet axe d'ordre 2.

1.8.1 système triclinique

- Un cristal de groupe ponctuel 1 ne possède aucun élément de symétrie. Les directions des axes principaux de la quadrique n'ont alors aucun lien particulier avec celles des vecteurs de base $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ du cristal. Le tenseur représentant la propriété physique du cristal considéré a alors 6 coefficients indépendants.
- Le tenseur a la forme la plus générale suivante :

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

1.8.2 système monoclinique.

- Un tel cristal possède au moins un axe binaire (groupe 2) ou un miroir (groupe m). L'un de ces éléments de symétrie coïncide donc avec l'un des éléments de symétrie de l'ellipsoïde. Si on choisit un système d'axes orthonormés tel que l'axe ox_3 soit parallèle à l'axe A_2 ou perpendiculaire au miroir m, le tenseur est alors de la forme :

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix}.$$

1.8.3. système orthorhombique

- Dans ce système, un cristal possède au minimum trois axes d'ordre 2 orthogonaux entre eux (groupe 222) ou deux miroirs orthogonaux entre eux (groupe mm2). Les éléments de symétrie doivent être communs

au cristal et à l'ellipsoïde représentant la propriété physique. Les axes de l'ellipsoïde sont donc parallèles aux vecteurs de base de la maille orthorhombique. Dans un système d'axes parallèles aux vecteurs de base $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, le tenseur est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix}.$$

1.8.4. Systèmes uniaxes : quadratique, rhomboédrique et hexagonal.

- Un cristal de l'un quelconque de ces systèmes possède au moins un axe d'ordre n où n est supérieur à 2 (exception faite des groupes $\bar{4}$ et $\bar{4}2m$). Il doit donc en être de même pour l'ellipsoïde qui est alors de révolution autour de cet axe. Si on choisit l'axe (ox_3) parallèle à l'axe A_n , le tenseur est de la forme :

$$\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix}.$$

1.8.5 Système Cubique.

- Tous les groupes de ce système cristallin possèdent 4 axes A_3 . Le seul ellipsoïde compatible avec la présence de 4 axes A_3 est une sphère. La quadrique est donc une sphère. Le tenseur est diagonal avec ses 3 coefficients égaux :

$$\begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}.$$

Rque : Les propriétés physiques représentées par un tenseur de rang 2 sont isotropes pour un cristal cubique.

1.9. Propriétés de la matrice de transformation des repères (a_{ij})

1.9.1 Repère droit et repère gauche

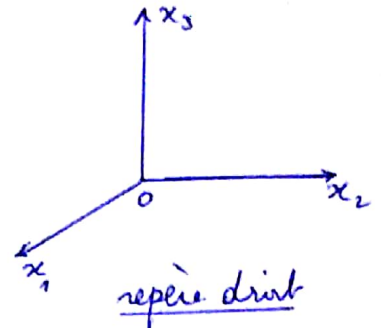
* Le repère droit présente un ordre cyclique (permutation circulaire) :

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots$$

- Rotation de 90° autour de $x_1 > 0 \Rightarrow x_2$ passe en x_3

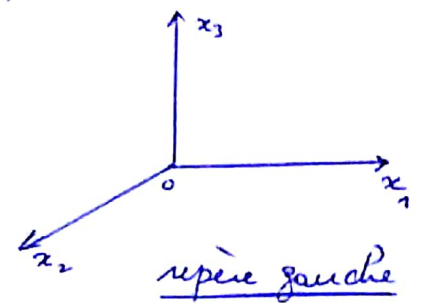
- Rotation de 90° autour de $x_2 > 0 \Rightarrow x_3$ passe en x_1

- Rotation de 90° autour de $x_3 > 0 \Rightarrow x_1 \rightarrow x_2$



* Le repère qui n'est pas droit est appelé repère gauche.

pour faire tourner x_1 sur x_2 , il faut une rotation $/x_3$ dans le sens < 0 (sens contraire).



Rq :

Le repère intervient dans le cas des opérations de symétrie comme la réflexion dans un plan ou l'inversion par rapport à un centre.

1.9.2. Relations d'orthogonalité

- Le repère orthonormé (ox_i) se transforme en un autre repère orthonormé (x'_i) à l'aide de la matrice de transformation (a_{ij}) .

- Chaque ligne du tableau (11) représentant les trois cosinus directeurs d'une droite par rapport aux trois axes orthogonaux ox_1, ox_2, ox_3 .

$$\begin{aligned} \text{* Vecteurs unitaires} &\Rightarrow \begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1 \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \end{cases} \\ &\text{(3 équations)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_{ik} a_{jk} = 1 \text{ si } i=j} \\ i, j = 1, 2, 3$$

- (1)

* Vecteurs unitaires perpendiculaires 2 à 2 :

(Deux lignes successives du tableau (11) représentent les cosinus directeurs de deux axes rectangulaires).

$$\begin{aligned} \text{(3 éqs.)} &\Rightarrow \begin{cases} a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} + a_{13} a_{23} = 0 \\ a_{11} a_{31} + a_{12} a_{32} + a_{13} a_{33} = 0 \\ a_{21} a_{31} + a_{22} a_{32} + a_{23} a_{33} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_{ik} a_{jk} = 0 \text{ si } i \neq j} \quad (2)$$

- (1)

Les équations (1) et (2) peuvent être sous la forme suivante :

$$\boxed{a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}} \quad \text{ce sont les 6 équations d'orthogonalité}$$

où δ_{ij} étant le "symbole de Kronecker" : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Rque : Pour la transformation inverse :

où $x_i \xrightarrow{(a_{ij})} x_i$, les équations d'orthogonalité sont exprimées comme suit :

$$\boxed{a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}}$$

Conséquence :

i) $\forall i, j : \delta_{ij} p_i = p_j \quad (\text{ou } \delta_{ij} p_j = p_i)$

ii) $\forall i, j : \delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$

$\forall i, k : \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij}$

iii) La matrice $(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est appelée matrice unité ou "matrice de substitution".

ii) Exemples : $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det a_{ij} = |a_{ij}| = +1$
permutation des axes x_i circulaire
 $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots$

$\ast (a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det a_{ij} = |a_{ij}| = -1$
il y a changement de l'indicateur des axes : $x_1 \rightarrow -x_1 ; x_2 \rightarrow x_2 ; x_3 \rightarrow x_3$

1.10. Vecteurs axiaux ou tenseurs antisymétriques de rang 2.

1.10.1. Vecteurs polaires, vecteurs axiaux.

- On distingue deux types de grandeurs physiques vectorielles :

- $\ast$ les grandeurs représentées par des vecteurs (déplacement, vitesse, accélération, force ...) et on les appelle vecteurs polaires.
- $\ast$ les grandeurs qui décrivent une rotation comme la vitesse angulaire, le moment d'une force, le champ magnétique...

on les appelle des vecteurs axiaux. On les note $\vec{V}$ et on les représente par une droite et un sens de rotation autour de cette droite. On les représente aussi par des vecteurs avec la convention suivante :

"le vecteur pointe dans la direction telle que le sens de rotation du vecteur axial soit, pour ce vecteur, le sens direct".



- Les deux familles de vecteurs se transforment différemment par certaines opérations de symétrie. Le vecteur polaire et le vecteur axial se transforment de la même façon par une opération de rotation. En revanche, il n'en est pas de même pour les opérations de symétrie centrale et de symétrie par rapport à un plan.