REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA DE JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Cours sur les équations de la physique mathématique

$3^{ème}$ année mathématiques

Présenté par

Nora Fetouci

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (E.D.P.) apparaissent extremement fréquement en sciences appliquées pour modéliser de manière continue des phénomènes physiques.

Une équation aux dérivées partielles relie une fonction inconnue à ses dérivées. La fonction inconnue dépend de plusieurs variables (variables d'espace et de temps).

Quand sont apparues les E.D.P. ? Elle ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17 ème siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite le catalogue des E.D.P. s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit de citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'électromagnetisme, de Schrôdinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, de Black-Scholes pour les équations des mathématiques financières et bien sûr de Einstein pour les E.D.P. de la théorie de la relativité.

Cependant l'étude systématique des E.D.P. est bien plus récente, et c'est seulement au cours du 20 ème siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. Un pas de géant a été accompli par L. Schwartz lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrès au moins comparable est dû à L. Hôrmander pour la mise au point du calcul pseudodifférentiel (au début des années 1970). Il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des E.D.P. reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21 ème siècle.

Voici quelques exemples, très simples a priori d'E.D.P. à deux variables. Certaines de ces E.D.P. modélisent l'évolution au cours du temps de certains systèmes, et il est d'usage de garder la notation t pour la variable temps.

1. $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} + c\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 0$ (une équation de transport) ;
2. $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u(t,x)\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 0$ (une équation d'onde de choc) ;
3. $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$ (variante de l'équation des ondes) ;
4. $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$ (l'équation de Laplace) ;
5. $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$ (l'équation des ondes ou des cordes vibrantes).

Comme pour les E.D.O., on parle d'E.D.P. linéaires ou non linéaires. Dans la liste ci-dessus, seule l'équation 2. est non linéaire. Pour mieux comprendre de quoi il s'agit, il est commode de parler de l'opérateur aux dérivées partielles associé à une E.D.P. Par exemple l'opérateur associé à l'équation 1. est $P_1 : u \mapsto \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}$, celui associé à l'équation 2. est :$P_2 : u \mapsto \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}$. On dit que l'E.D.P. est linéaire lorsque l'opérateur P qui lui est associé l'est, c'est à dire, pour toutes fonctions u, v et

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P(\alpha u + \beta v) = \alpha P(u) + \beta P(v).$$

C'est bien le cas pour P_1, et il est très simple de vérifier que $P_2(\alpha u) \neq \alpha P_2(u)$ en général.

D'autre part, on parle également d'E.D.P. linéaire homogène lorsque la fonction nulle $u = 0$ est solution. En d'autres termes, tous les termes de l'équation contiennent la fonction inconnue ou l'une de ses dérivées partielles. Toutes les équations linéaires ci-dessus sont homogènes, alors que l'E.D.P.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y),$$

ne l'est pas.

Première E.D.P. : voici un exemple à priori tès simple d'E.D.P. On veut trouver les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = 0.$$

L'équation ci-dessus signifie que la dérivée partielle par rapport à la première variable, de la dérivée partielle de u par rapport à la première variable est nulle : $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial u}{\partial x}) = 0$. Commençons donc par poser

$v(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$. On doit avoir, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0.$$

Pour tout y fixé, l'application partielle $v(x,y)$ doit donc être constante.

Bien sûr cette constante peut dépendre de y. On voit donc que nécessairement

$$v(x,y) = C(y),$$

pour une certaine fonction C. On est ramené au problème suivant : trouver u telle que

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = C(y).$$

En raisonnant de la même manière, on voit que nécessairement,

$$u(x,y) = C(y)x + D(y),$$

où D est encore une certaine fonction. Il est immédiat de vérifier que n'importe quelle fonction de ce type vérifie l'E.D.P. considérée, pourvu que cette fonction admette des dérivées partielles. Notons dès à présent qu'il y a énormément de solutions pour cette équation, puisque aucune condition sur les fonctions C et D n'est apparue dans la démonstration.

Ce cours est destiné aux étudiants de la 3ème année LMD, il est sensé fournir les outils mathématiques utilisés dans les sciences techniques, il se compose de cinq chapitres, commençant par les E.D.P. linéaires du premier ordre, puis les E.D.P. non linéaires du premier ordre, le troixième chapitre est consacré aux E.D.P. linéaires et quasi-linéaires du second ordre : classification et forme standard. Dans le quatrième chapitre, nous présentons la méthode de séparation des variables et on termine par un chapitre comportant l'étude de quelques exemples classiques d'E.D.P. : équation d'onde, de la chaleur et de Laplace. A la fin de chaque chapitre se trouve une série d'exercices.

Ce cours a été inspiré en grande partie de [9].

CHAPITRE 1

E.D.P. linéaires du premier ordre

Beaucoup de problèmes de physique font intervenir la résolution d'équations aux dérivées partielles. Une E.D.P. est une relation entre les variables et les dérivées partielles de la fonction de plusieurs variables $u : (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto u(x_1, x_2, ..., x_n)$. L'ordre d'une telle équation est l'ordre de dérivation le plus élevé avec lequel figure la fonction inconnue dans l'équation. Ainsi l'équation

$$u(x,y,z) + xy\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y \partial z} - z\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = 0,$$

est une E.D.P. du second ordre à trois variables, ou en dimension 3. Une E.D.O. n'est qu'une E.D.P. à une seule variable.

1.1 E.D.P. linéaires du premier ordre

Définition 1.1.1. *On appelle une E.D.P. linéaire du premier ordre à n variables réelles une équation fonctionnelle de la forme :*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = g(x_1, x_2, ..., x_n, u),$$

où les f_i $(1 \leq i \leq n)$, et g sont des fonctions de $x_1, x_2, ..., x_n$.

Dans le cas particulier de deux variables, une E.D.P. linéaire d'ordre 1 dont l'inconnue est la fonction $z(x,y)$ s'écrit

$$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z), \qquad (E)$$

où f, g et h de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 1.1.1. *Une telle équation n'est pas en général linéaire au sens des opérations linéaires (elle est quasilinéaire). Elle ne serait linéaire que si les fonctions f_i ne dépendait pas de u et si g était fonction linéaire de u.*

Exemple 1.1.1.
1. $z\dfrac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{1-z^2}$.
2. $(x^2-1)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + 4xz = 0$.

1.2 Systèmes différentiels-Intégrales premières

La résolution de l'équation aux dérivées partielles (E) fait en général appel aux systèmes différentiels.

Définition 1.2.1. *Le système différentiel*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y,z), \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = h(x,y,z), \end{cases} \tag{1.1}$$

qui s'écrit plus symétriquement

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)}, \tag{S}$$

s'appelle ***système caractéristique*** *de (E).*

Définition 1.2.2.
1. *On appelle solution du système (S) une courbe γ dont la tangente en tout point (x,y,z) où $\overrightarrow{V}$ n'est pas nul est portée par $\overrightarrow{V}$ ($\overrightarrow{V}$ un vecteur variable de $\mathbb{R}^3$ de composantes $(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z))$.*
   La recherche d'une solution est donc la recherche de trois fonctions ϕ, ψ, η telles qu'il existe une fonction $k(t)$ telle que $\dfrac{d\phi}{dt} = k(t)f[\phi(t),\psi(t),\eta(t)]$, $\dfrac{d\psi}{dt} = k(t)g[\phi(t),\psi(t),\eta(t)]$, $\dfrac{d\eta}{dt} = k(t)h[\phi(t),\psi(t),\eta(t)]$, $t \in [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $((\phi,\psi,\eta)$ est un paramétrage de $\gamma)$.
2. *On appelle* ***intégrale première*** *du système (S) une fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ des trois variables x,y,z non constante, et telle que pour toute solution (ϕ,ψ,η) de (S) la fonction $u(\phi(t),\psi(t),\eta(t))$ est constante.*
   Si on considère un système dans $\mathbb{R}^2$, une intégrale première est une fonction de deux variables telle que $u[\phi(t),\psi(t)]$ sont constantes.

Théorème 1.2.1. *Deux fonctions u et v sont fonctionnellement indépendantes dans un ouvert G de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si :*
Le rang du déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}$ *est 2 dans G.*

Théorème 1.2.2. 1. *Soit u et v deux intégrales premières indépendantes du système (S). Toute intégrale première w de ce système s'exprime alors en fonction de u et v, c-à-d qu'il existe F de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $w = F(u,v)$.*

2. *Soit u une intégrale première du système $\dfrac{dx}{f} = \dfrac{dy}{g}$, toute untégrale première V de ce système s'exprime en fonction de u : il existe une fonction H telle que $v = H(u)$.*

Théorème 1.2.3. 1. *Soient u et v deux intégrales premières indépendantes du système (S), alors pour tous les réels a et b les courbes $\gamma_{a,b}$ intersection des surfaces $u(x,y,z) = a$ et $v(x,y,z) = b$ sont les solutions de (S).*

2. *Pour un système dans $\mathbb{R}^2$ les solutions sont $u(x,y) = a$ où a varie dans $\mathbb{R}$.*

Théorème 1.2.4. 1. *Pour trouver une intégrale première u de $\dfrac{dx}{f(x,y)} = \dfrac{dy}{g(x,y)}$, on utilise l'égalité $\dfrac{dx}{f(x,y)} = \dfrac{dy}{g(x,y)}$ pour trouver A et B telle que : il existe u vérifiant : $du = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ et $0 = A(x,y)f(x,y) + B(x,y)g(x,y)$.*

2. *On procède de façon analogue pour résoudre : $\dfrac{dx}{f(x,y,z)} = \dfrac{dy}{g(x,y,z)} = \dfrac{dz}{h(x,y,z)}$, on cherche u et v indépendantes telles que : $du = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$ (respectivement pour dv) et $0 = A(x,y,z)f(x,y,z) + B(x,y,z)g(x,y,z) + C(x,y,z)h(x,y,z)$.*

Résultat élémentaire : Si $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ et si $a\beta + b\delta \neq 0$, alors $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{a\alpha + b\gamma}{a\beta + b\delta}$.
Si $a\beta + b\delta = 0$, alors $a\alpha + b\gamma = 0$.

Exemple 1.2.1. *Résoudre le système (S) : $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x}$.*

Solution

$\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{xdx - ydy}{xy - xy} = \dfrac{d\frac{1}{2}(x^2 - y^2)}{0}$ donc $x^2 - y^2$ est une intégrale première. Les solutions de (S) sont donc les courbes $x^2 - y^2 = a$ où a varie dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2.2. *Résoudre le système (S) : $\dfrac{dx}{x(y-z)} = \dfrac{dy}{y(z-x)} = \dfrac{dz}{z(x-y)}$.*

Solution

$\dfrac{dx}{x(y-z)} = \dfrac{dy}{y(z-x)} = \dfrac{dz}{z(x-y)} = \dfrac{dx + dy + dz}{0} = \dfrac{d(x+y+z)}{0}$, $u(x,y,z) = x + y + z$ est donc une intégrale première.

$\dfrac{yzdx}{xyz(y-z)} = \dfrac{xzdy}{xyz(z-x)} = \dfrac{xydz}{xyz(x-y)} = \dfrac{yzdx + xzdy + xydz}{0} = \dfrac{d(xyz)}{0}$, $v(x,y,z) = xyz$ est aussi une intégrale première.

u et v sont indépendantes. En effet

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ yz & xz \end{vmatrix} = xz - yz = (x-y)z \neq 0.$$

Les solutions de (S) sont les intersections des surfaces $x + y + z = a$ et $xyz = b$.

1.3 Solution générale d'une E.D.P. linéaire du premier ordre

Soit l'E.D.P.

$$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z). \tag{E}$$

Le théorème suivant établit un lien entre le système (S) et les E.D.P. linéaires du premier ordre.

Théorème 1.3.1. *Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est une intégrale première de (S) si et seulement si dans tout domaine où les solutions de (S) sont définies, elle vérifie :*

$$f(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + h(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{E}$$

Théorème 1.3.2. *Pour résoudre l'équation (E) (où h est non identiquement nulle) :*

1. *On examine si $h(x,y,z) = 0$ définit une solution.*
2. *Dans le domaine $h(x,y,z) \neq 0$, on cherche 2 intégrales premières u et v du système caractéristique*

$$\frac{dx}{f} = \frac{dy}{g} = \frac{dz}{h}. \tag{S}$$

   Toute solution est alors définie par $F[u(x,y,z), v(x,y,z)] = 0$, F étant une fonction arbitraire. Ou encore $v(x,y,z) = \varphi(u(x,y,z))$, φ étant une fonction arbitraire.

Remarque 1.3.1. *Il faut qu'au moins une des fonctions u et v dépende de z.*

Exemple 1.3.1. *Soit (E) : $z\dfrac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{1-z^2}$.*

Solution

1. $\sqrt{1-z^2} = 0$ définit 2 solutions $z = 1$ et $z = -1$.

2. Soit $|z| < 1$: le système caractéristique est :
$\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{0} = \dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, y est une intégrale première, en notant que $dx = zdz\sqrt{1-z^2}$, on constate que $x + \sqrt{1-z^2}$ est également une intégrale première. Toute solution est définie implicitement par $F(y, x+\sqrt{1-z^2}) = 0$, ou aussi bien par $\varphi(y) = x+\sqrt{1-z^2}$, c'est à dire $z^2 = 1-[x-\varphi(y)]^2$, φ étant une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $|x-\varphi(y)| < 1$.

Cas particulier : $(E) : f(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + g(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$
C'est l'équation des intégrales premières de $\dfrac{dx}{f} = \dfrac{dy}{g}$. Une solution est donc de la forme $z = H(x,y)$ où H est une intégrale première de $\dfrac{dx}{f} = \dfrac{dy}{g}$. Soit u l'une de ces intégrales premières, on sait que toutes les autres sont de la forme $z = F(u)$ où F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Méthode pratique : Soit $(E) : f(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ et (S) son système caractéristique. Pour résoudre (E) on cherche une intégrale première u de (S). Toute solution de (E) est alors de la forme $z = F[u]$ où F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 1.3.2. *$z = k$ est solution de (E) pour toute constante k, qu'on aurait obtenue par la méthode générale en cherchant des intégrales premières de $\dfrac{dx}{f} = \dfrac{dy}{g} = \dfrac{dz}{0}$, on retrouve que toute solution est de la forme $G(z, H(x,y)) = 0$ où $z = F(H(x,y))$.*

Exemple 1.3.2. $(E) : y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Solution Le système caractéristique est $(S) : \dfrac{dx}{y} = -\dfrac{dy}{x} = \dfrac{xdx+ydy}{xy-xy}$.
x^2+y^2 est une intégrale première de (S) et toutes les solutions sont de la forme $z = F(x^2+y^2)$.

1.4 Problème de Cauchy

On appelle **courbe caractéristique** de l'équation :

$$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z), \tag{E}$$

les solutions de son système caractéristique

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)}. \tag{S}$$

Théorème 1.4.1. *Par chaque courbe caractéristique il passe une infinité de surfaces solutions.*

Démonstration. Soit $u(x,y,z) = a, \quad v(x,y,z) = b$ une caractéristique de γ et F une fonction quelconque telle que $b = F(a)$: γ se trouve sur la surface solution $v(x,y,z) = F[u(x,y,z)]$. $\square$

Théorème 1.4.2. *Par toute courbe γ caractéristique en aucun point passe une solution unique de (E), on l'appelle la solution au problème de Cauchy relatif à γ.*

Pour étudier le problème de Cauchy, nous utiliserons la définition suivante :

Définition 1.4.1. *On dit qu'une courbe γ n'est caractéristique en aucun point pour l'équation*

$$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x,y,z),$$

s'il n'existe aucun point de γ où la tangente est parallèle au vecteur

$$\overrightarrow{V}(x,y,z)=f(x,y,z)\overrightarrow{e_1}+g(x,y,z)\overrightarrow{e_2}+h(x,y,z)\overrightarrow{e_3}.$$

Théorème 1.4.3. (Résolution du problème de Cauchy) :
Soit

$$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x,y,z), \tag{E}$$

et

$$\frac{dx}{f(x,y,z)}=\frac{dy}{g(x,y,z)}=\frac{dz}{h(x,y,z)} \tag{S}$$

son système caractéristique. Pour trouver la solution de (E) qui contient une courbe γ non caractéristique d'équation $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\eta(t)$, on élimine t entre les équations $u(\phi(t),\psi(t),\eta(t))=a$ et $v(\phi(t),\psi(t),\eta(t))=b$ obtenues au moyen de deux intégrales premières u et v de (S). Ceci définit une fonction $H(a,b)=0$.
L'équation de la solution est $H[u(x,y,z),v(x,y,z)]=0$. Si $h\equiv 0$, on n'oubliera pas que z est une intégrale première.

Exemple 1.4.1. *Cherchons les solutions de (E) : $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ qui passent par l'ellipse γ d'équations $z=my$, $x^2+(y-1)^2=R^2$, où $m,R\in\mathbb{R}$.*

Solution

Nous savons que si $m=0$, γ est un cercle horizontal qui est une caractéristique de (E) et que toute surface de révolution contenant γ est une solution.

Supposons donc $m\neq 0$. On sait que $u(x,y,z)=z$, et $v(x,y,z)=x^2+y^2$ sont deux intégrales premières du système caractéristique.

En posant $y=t$, les équations de γ sont :

$$\begin{cases} x^2=R^2-(t-1)^2, \\ y=t, \\ z=mt. \end{cases}$$

$u[\varphi(t), \psi(t), \eta(t)] = mt$, $v[\varphi(t), \psi(t), \eta(t)] = R^2 + t^2 - (t-1)^2$.
Soit donc $mt = a$ et $R^2 + t^2 - (t-1)^2 = b$ alors $b = R^2 + \dfrac{a^2}{m^2} - (\dfrac{a}{m} - 1)^2$ ou $b - R^2 - \dfrac{2a}{m} + 1 = 0$, la fonction $H(u, v)$ est $\dfrac{2u}{m} - v + R^2 - 1$.
L'équation $H[u(x, y, z), v(x, y, z)] = 0$ est $\dfrac{2z}{m} - (x^2 + y^2) + R^2 - 1 = 0$, la surface cherchée est $z = \dfrac{m}{2}[x^2 + y^2 - R^2 + 1]$. C'est l'équation de la surface de révolution obtenue en faisant tourner autour de l'axe oz la parabole $z = \dfrac{m}{2}[x^2 - R^2 + 1]$ placée dans le plan $y = 0$. Pour $m = 2$, $R = 1$, cette surface est le paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2$ qui contient γ dont les équations sont : $z = 2y$, $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

1.5 Exercices

Exercice 1 Résoudre les systèmes différentiels :

1°)

$$\frac{dx}{y^n - z^n} = \frac{dy}{z^n - x^n} = \frac{dz}{x^n - y^n}, \; n = C^{te} \in \mathbb{R}^* - \{-1\}.$$

2°)

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}.$$

3°)

$$\frac{dx}{y(x+y)+z} = \frac{dy}{x(x+y)-z} = \frac{dz}{z(x+y)}.$$

Exercice 2 Montrer qu'une fonction U de classe $\mathcal{C}^1$ est une intégrale première du système

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)} \qquad (S)$$

si et seulement si dans tout domaine où les solutions de (S) sont définies, elle vérifie

$$f(x,y,z)\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} + h(x,y,z)\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = 0.$$

Exercice 3 Donner la solution générale de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

Exercice 4 Déterminer la solution $z(x,y)$ de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

qui satisfait la condition : $z(x,x) = x^2$.

Exercice 5 Soit l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre :

$$z\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

1°) En donner la solution générale.

2°) Déterminer la surface intégrale de cette équation qui contient la parabole (P) d'équations :

$$(P): \quad \{z = 0, \; y^2 = 2x\}.$$

CHAPITRE 2

E.D.P. non linéaires du premier ordre

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de résolution pour les équations aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre. Nous allons voir qu'une famille de surfaces à deux paramètres et ses enveloppes (à un ou deux paramètres) constituent l'ensemble des solutions de l'équation associée à la famille.

2.1 Enveloppe de surfaces

Définition 2.1.1. (***Enveloppe à un paramètre***) *: Soit (S_λ) une famille de surfaces dépendant d'un paramètre λ d'équations $F(x, y, z, \lambda) = 0$. On suppose que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \neq 0$.*
On appelle ***courbe caractéristique*** *de la surface (S_λ) la courbe (Γ_λ) si elle existe, située sur (S_λ) d'équations : (Γ_λ)*

$$\begin{cases} F(x, y, z, \lambda) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

la surface Σ engendrée par les courbes (Γ_λ) s'appelle ***l'enveloppe de la famille*** *(S_λ), Σ et (S_λ) sont tangentes le long de (Γ_λ). L'équation de Σ s'obtient en éliminant λ entre les équations de (Γ_λ).*

Définition 2.1.2. ***Famille à deux paramètres*** *: Soit $(S_{\lambda,\mu})$ une famille de surfaces dépendant de deux paramètrers λ et μ d'équations $F(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$, on suppose que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et qu'une des dérivées d'ordre 2 en λ et μ est non nulle.*

1. *On appelle* ***point caractéristique*** *de* $(S_{\lambda,\mu})$ *un point* (x,y,z) *tel que :*

$$\begin{cases} F(x,y,z,\lambda,\mu)=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda,\mu)=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu}(x,y,z,\lambda,\mu)=0. \end{cases} \tag{2.2}$$

   l'ensemble des points caractéristiques, s'il n'est pas vide, forme une surface Σ *appelée* ***enveloppe*** *de la famille à deux paramètres* $(S_{\lambda,\mu})$*. Son équation s'obtient en éliminant* λ *et* μ *entre les trois équations précédentes. Toutes les surfaces* $(S_{\lambda,\mu})$ *sont tangentes à* Σ *en leurs points caractéristiques.*

2. *Soit* ϕ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$*, si la famille* $F(x,y,z,\lambda,\phi(\lambda))$ *admet une enveloppe* Σ_ϕ*, celle ci s'appelle enveloppe à un paramètre de la famille* $(S_{\lambda,\mu})$*. Les surfaces* Σ_ϕ *sont tangentes à* Σ*.*

2.2 E.D.P. associée à une famille à 2 paramètres

Notation : Soit $z=\phi(x,y)$, on notera $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Définition 2.2.1. *L'E.D.P. associée à la famile* $(S_{\lambda,\mu})$ *est la relation qu'on obtient en éliminant* λ *et* μ *entre les équations :*

$$\begin{cases} F=0, \\ \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p=0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q=0, \end{cases} \tag{2.3}$$

les surfaces $(S_{\lambda,\mu})$ *sont solutions de cette E.D.P.*

Définition 2.2.2. *Soit* (E) *:* $G(x,y,z,p,q)=0$ *une E.D.P. non linéaire du premier ordre et* $G(x,y,z,\lambda,\mu)=0$ *une famille à deux paramètres de solutions de* (E)*. Cette famille s'appelle une* ***intégrale complète*** *de* (E)*. Toute enveloppe à un paramètre s'appelle* ***intégrale générale*** *de* (E)*, s'il existe une enveloppe à deux paramètres, on la nomme* ***intégrale singulière****.*

Exemple 2.2.1. *Les sphères* $(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+z^2=1$ *sont solutions de l'E.D.P. obtenue en éliminant* λ *et* μ *entre les équations suivantes :*

$$\begin{cases} (x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+z^2=1, \\ 2(x-\lambda)+2zp=0, \\ 2(y-\mu)+2zq=0. \end{cases} \tag{2.4}$$

En reportant dans la première équation les expressions de λ *et* μ*, on obtient l'E.D.P.* $z^2(1+p^2+q^2)=1$*, les enveloppes à un paramètre de ces sphères forment les intégrales générales, les plans* $z=-1$ *et* $z=1$ *sont les intégrales singulières.*

2.3 Résolution de l'équation $G(x, y, z, p, q) = 0$

Notation : Nous utiliserons les notations suivantes : $G_x = \dfrac{\partial G}{\partial x}$, $G_y = \dfrac{\partial G}{\partial y}$, $G_z = \dfrac{\partial G}{\partial z}$, $G_p = \dfrac{\partial G}{\partial p}$, $G_q = \dfrac{\partial G}{\partial q}$.

Théorème 2.3.1. *Recherche d'une intégrale complète :*

1. *On cherche une intégrale première H du système (S) suivant telle que $\dfrac{D(G,H)}{D(p,q)} \neq 0$*

$$\frac{dx}{G_p} = \frac{dy}{G_q} = \frac{dz}{G_p p + G_q q} = \frac{-dp}{G_x + pG_z} = \frac{-dq}{G_y + qG_z}.$$

2. *Pour chaque valeur de λ, on calcule p et q solutions du système*

$$\begin{cases} G(x, y, z, p, q) = 0, \\ H(x, y, z, p, q) = \lambda, \end{cases} \tag{2.5}$$

   p et q fonctions de x, y, z et λ.

3. *z étant fixé, on résout pour chaque λ (et chaque z) l'équation $pdx + qdy = 0$, les solutions sont définies implicitement par une relation $\Phi(\lambda, z, x, y) = \phi(z)$, ($\phi(z)$ est une constante en x et y).*

4. *On choisit x_0, celui ci étant fixé, on détermine $\phi(z)$ en imposant que $\Phi(\lambda, z, x_0, y) + \phi(z)$ soit solution de : $q(x_0, y, z)dy - dz = 0$. Alors $F(x, y, z, \lambda, \mu) = \Phi(\lambda, z, x, y) + \phi(z) + \mu$ est une intégrale complète de $G(x, y, z, p, q) = 0$.*

5. *On peut également procéder en fixant $y = y_0$ et chercher une fonction Ψ de sorte que $\Phi(\lambda, z, x, y_0) + \psi(z)$ soit solution de $pdx - dz = 0$. Alors $F(x, y, z, \lambda, \mu) = \Phi(\lambda, z, x, y) + \psi(z) + \mu$ est une intégrale complète de $G(x, y, z, p, q) = 0$.*

Exemple 2.3.1. *Trouver une intégrale complète de : $zpq - p - q = 0$.*

Solution

1. Le système (S) est $\dfrac{dx}{zq-1} = \dfrac{dy}{zp-1} = \dfrac{dz}{2zpq - p - q} = -\dfrac{dp}{p^2 q} = -\dfrac{dq}{pq^2}$.
   Comme $\dfrac{dp}{p} = \dfrac{dq}{q} = \dfrac{-qdp + pdq}{0} = \dfrac{d(\frac{p}{q})}{0}$, $\dfrac{p}{q}$ est une intégrale première. On vérifie immédiatement que $\dfrac{D(G,H)}{D(p,q)} \neq 0$.

2. On résout

$$\begin{cases} zpq - p - q = 0, & \text{ce qui donne } q = \dfrac{\lambda+1}{\lambda z}, \\ \dfrac{p}{q} = \lambda, & p = \dfrac{\lambda+1}{z}. \end{cases} \tag{2.6}$$

3. $pdx + qdy = \frac{\lambda+1}{\lambda z}(\lambda dx + dy)$, λ et z étant fixés. $pdx + qdy = 0$ équivaut à $d(\lambda x + y) = 0$, les solutions sont définies par $\lambda x + y = k$ donc $\Phi(\lambda, z, x, y) = \lambda x + y$.

4. Soit $y = 0$, $\Phi(\lambda, z, x, 0) + \psi(z) = \lambda x + \psi(z)$; soit $W(x, z) = \lambda x + \psi(z)$. Cette fonction est solution de $pdx - dz = 0$ si $\dfrac{\partial W}{\partial x} = \alpha(x, z)p$ et $\dfrac{\partial W}{\partial z} = -\alpha(x, z)p$ ($\alpha(x, z)$ est un facteur intégrant), c'est à dire $\dfrac{\partial W}{\partial x} = \lambda = \alpha(x, z)\dfrac{\lambda+1}{z}$ et $\dfrac{\partial W}{\partial z} = \psi'(z) = -\alpha(x, z)$, ainsi $\alpha(x, z) = \dfrac{\lambda z}{\lambda+1}$ et $\psi'(z) = -\dfrac{\lambda}{\lambda+1}z$, une solution est : $\psi(z) = -\dfrac{\lambda}{2(\lambda+1)}z^2$.
   Une intégrale complète est alors
   $$F(x, y, z, \lambda, \mu) = \lambda x + y - \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}z^2 + \mu = 0.$$
   Les surfaces correspondantes ont pour équation $z^2 = \dfrac{2(\lambda+1)}{\lambda}(\lambda x + y + \mu)$.

Remarque 2.3.1. *Dans le cas particulier où x et y n'intervient pas explicitement dans l'équation, on a donc : $G(z, p, q) = 0$. On cherche une solution particulière du type $z = f(x + \lambda y)$.*

2.4 Problème de Cauchy

Soit $F(x, y, z, \lambda, \mu)$ une intégrale complète de l'équation (E), on appelle **courbe caractéristique**, toute courbe C définie par les relations :

$$\begin{cases} F(x, y, z, \lambda, \mu) = 0,\ \lambda, \mu = ctes, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda, \mu) + v\frac{\partial F}{\partial \mu}(x, y, z, \lambda, \mu) = 0,\ v = cte. \end{cases} \tag{2.7}$$

Soit (γ) une courbe qui n'est pas caractéristique en aucun point, et définie paramétriquement par :

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t).$$

Pour trouver les enveloppes à un paramètre qui contiennent (γ), on opère de la façon suivante :

On résout le système en λ et μ :

$$\begin{cases} F[f(t), g(t), h(t), \lambda, \mu] = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}[f(t), g(t), h(t), \lambda, \mu] = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

on en déduit par exemple $\mu = \psi(\lambda)$, l'enveloppe de la famille à un paramètre $F(x, y, z, \lambda, \psi(\mu)) = 0$ est une surface contenant (γ).

Exemple 2.4.1. *On sait que* $(x-\lambda)^2+(y-\lambda)^2+z^2-1=0$ *est une intégrale complète de l'équation :* $z^2(p^2+q^2+1)=0$.
Cherchons les solutions de (E) *passant par la droite :* $z=0,\ y=1$.

Solution En posant $x=t$, on obtient

$$\begin{cases} (t-\lambda)^2+(1-\mu)^2-1=0, \\ 2(t-\lambda)=0, \end{cases} \tag{2.9}$$

on en déduit que $(1-\mu)^2=1$. Soit $\mu=0$ ou $\mu=2$.

$(x-\lambda)^2+y^2+z^2-1=0$ est la famille des sphères centrées sur l'axe (ox), son enveloppe est le cylindre $y^2+z^2-1=0$.
L'autre surface, enveloppe de $(x-\lambda)^2+(y-2)^2+z^2-1=0$ est le cylindre $(y-2)^2+z^2-1=0$.
La droite n'est sur aucune sphère, et n'est pas dans le plan $z=\pm 1$.

2.5 Exercices

Exercice 1

1°) Vérifier que la forme différentielle :

$$\omega=\arctan(\frac{y}{x})dx+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)dy,$$

est une différentielle totale exacte.

2°) Donner la solution de l'équation : $\omega=0$.

Exercice 2 Soit la forme différentielle :

$$\omega=(x^2+y^2+1)dx-2xydy.$$

1°) Ecrire l'équation aux dérivées partielles permettant de déterminer les facteurs intégrants de l'équation : $\omega=0$. Donner un facteur intégrant de cette équation.

2°) En utilisant le facteur intégrant obtenue au 1°), écrire la solution de l'équation $\omega = 0$.

3°)Préciser l'expression de tous les facteurs intégrants de cette équation.

Exercice 3 Déterminer la solution de l'équation aux dérivées partielles non linéaire :

$$(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + \frac{\partial z}{\partial y} = y,$$

qui contient la droite (D) d'équations :

$$(D): \quad \{y = 0; \quad z = 0\}.$$

Exercice 4 Donner la solution de l'équation :

$$xy(\frac{\partial z}{\partial x})(\frac{\partial z}{\partial y}) = 1,$$

qui contient la courbe définie par :

$$\{y = 1, \;\; x = e^{z^2}\}.$$

Exercice 5 Déterminer la solution de l'équation :

$$(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = x + y,$$

qui contient le cercle d'équations :

$$\{z = 0, \;\; (x-1)^2 + y^2 = 1\}.$$

CHAPITRE 3

Equations aux dérivées partielles quasi-linéaires du second ordre

Nous considérons dans ce chapitre des E.D.P. du second ordre dont l'inconnue est une fonction réelle u de deux variables réelles définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Nous allons voir comment classifier toutes les E.D.P. linéaires d'ordre 2. Nous aurons trois types d'E.D.P. : hyperboliques, paraboliques et elliptiques. Ensuite nous décrirons la forme canonique (standard) obtenue après un changement de coordonnées pour chacun de ces types d'E.D.P.

3.1 Caractéristiques

Définition 3.1.1. *Une E.D.P.* ***quasi-linéaire*** *du second ordre est une E.D.P. de la forme :*

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y,u,p,q). \tag{E}$$

L'inconnue est la fonction $u(x,y)$, p désigne $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et q désigne $\dfrac{\partial u}{\partial y}$. a, b, c et F sont trois fonctions données dans un domaine Ω.

Définition 3.1.2. (***Equations linéaires à coefficients constants***)
Une équation ***linéaire*** *à coefficients constants du second ordre est une équation de la forme suivante :*

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = F(x,y),$$

a, b, c, d, e, f sont des constantes.

Définition 3.1.3. *1. Les courbes caractéristiques sont les courbes γ qui annulent la quantité :*

$$\Delta(t) = c(\varphi(t), \psi(t))[\varphi'(t)]^2 - 2b(\varphi(t), \psi(t))[\varphi'(t)\psi'(t)] + a(\varphi(t), \psi(t))[\psi'(t)]^2,\ t \in \mathbb{R},$$

où (φ, ψ) est un paramétrage de γ.

2. On dit que γ n'est caractéristique en aucun point si $\forall t\ \ \Delta(t) \neq 0$.

Théorème 3.1.1. *1. Si $a \neq 0$, les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle*

$$a(x, y)(\frac{dy}{dx})^2 - 2b(x, y)\frac{dy}{dx} + c(x, y) = 0.$$

2. Si $c \neq 0$, ce sont les solutions de l'équation différentielle

$$c(x, y)(\frac{dx}{dy})^2 - 2b(x, y)\frac{dx}{dy} + a(x, y) = 0.$$

3. Si $a = c = 0$, ce sont les droites $x =$constante et $y =$ constante.

Démonstration. Soit : $\gamma : x = \varphi(t), y = \psi(t)$ une courbe caractéristique.
Supposons $a[\varphi(t), \psi(t)] \neq 0$ au voisinage de t_0, si $\varphi'(t) = 0$ alors $\psi'(t)$ doit aussi être nul et donc au voisinage de t_0 cela ne peut définir une courbe, donc dans un domaine où $a(x, y) \neq 0$, $\varphi'(t) \neq 0$ la tangente à γ n'est pas verticale, γ est définie par une fonction $y = f(x)$ c'est à dire $x = x$, $y = f(x)$ et $\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = f'(x)$, $\Delta = 0$ est alors équivalente à

$$a(x, y)(\frac{dy}{dx})^2 - 2b(x, y)\frac{dy}{dx} + c(x, y).$$

On raisonne de façon analogue au voisinage d'un point où $c \neq 0$. Dans un domaine où $a = c = 0, \Delta = 0$ devient : $b[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\psi'(t) = 0$. Comme il s'agit d'une équation du second ordre $b \neq 0$, et donc soit φ', soit ψ' est nul. □

3.2 Classification des équations

Définition 3.2.1. *1. Une équation (E) telle que $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0$ dans un domaine D est dite **hyperbolique** dans ce domaine. Elle admet alors deux familles de courbes caractéristiques dans D.*

*2. Une équation (E) telle que $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0$ dans un domaine D est dite **parabolique** dans D. Elle n'admet dans D qu'une famille de courbes caractéristiques.*

*3. Une équation (E) telle que $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) < 0$ dans un domaine D est dite **elliptique** dans D. Elle n'admet pas de courbes caractéristiques réels.*

Dans ce qui suit F désigne une fonction quelconque de x, y, u, p et q.

3.3 Réduction à la forme standard

3.3.1 Changement de variables

Soit $x_1 = \xi(x,y)$ et $y_1 = \eta(x,y)$ deux nouvelles variables. On suppose que

$$J(x,y) = \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

pour tous x, y dans un ouvert Ω. Si ξ et η sont de classe $\mathcal{C}^1$, on sait qu'il existe dans un ouvert G, deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ également telles que $x = f(x_1,y_1)$ et $y = g(x_1,y_1)$ $\forall x_1, y_1 \in G$. Nous allons chercher la nouvelle forme de (E) dans le système x_1, y_1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}. \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y}. \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

On obtient de façon analogue :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial^2 y_1}{\partial y^2}. \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1}\left[\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial y}\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}$$

En reportant dans l'équation (E), on trouve :

$$(E) \Leftrightarrow A(x_1,y_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2B(x_1,y_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1} + C(x_1,y_1)\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = G\big(x_1, y_1, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial y_1}\big),$$

avec :

$$\begin{aligned}
A &= a\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial x_1}{\partial y} + c\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)^2, \\
B &= a\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial x} + b\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial y}\right) + c\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial y}, \\
C &= a\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial y} + c\left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)^2.
\end{aligned}$$

Remarque 3.3.1. 1. *Il est facile de vérifier que $B^2 - AC = J^2(b^2 - ac)$, ce qui montre que le type de l'équation est conservé par le changement de variables.*

2. *On peut choisir x_1 et y_1 de façon à annuler l'un au moins des termes A, B et C.*
Soit $\varphi(x,y) = k$ l'équation d'une courbe caractéristique. Si on pose $x_1 = \varphi(x,y)$, l'équation obtenue par ce changement de variables aura un coefficient nul pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$; s'il existe deux familles de courbes caractéristiques, si $\psi(x,y) = k$ est l'équation d'une carctéristique de la seconde famille et si on pose $y_1 = \psi(x,y)$, l'équation obtenue aura un coefficient nul pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}$.

3.4 Formes standards

3.4.1 Equation hyperbolique

Théorème 3.4.1. *Soient $\varphi_1(x,y) = k_1$ et $\varphi_2(x,y) = k_2$ les deux familles de courbes d'une équation hyperbolique. En posant : $x_1 = \varphi_1(x,y)$ et $x_2 = \varphi_2(x,y)$, l'équation hyperbolique deviendra :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = G(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, u, x_1, x_2).$$

En posant $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$, elle deviendra :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = H(\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}, u, y_1, y_2).$$

Démonstration. La première partie de l'énoncé résulte de la deuxième assertion de la remarque précédente.
Etablissons la seconde : Soit $u(x_1,x_2) = u(y_1(x_1,x_2), y_2(x_1,x_2))$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial y_2}, \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial y_1} - \frac{\partial u}{\partial y_2}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2},$$

ce qui établit le résultat. □

Exemple 3.4.1. *Cherchons la forme standard de l'équation (E) : $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,*

Solution : On sait que les caractéristiques sont $y^2 - x^2 = k_1$ et $y^2 + x^2 = k_2$. Soit $x_1 = y^2 - x^2$ et $x_2 = y^2 + x^2$

$u(x,y) = u(x_1(x,y), x_2(x,y)) = u(y^2 - x^2, y^2 + x^2)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}(-2x) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(2x), \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}(2y) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(2y) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(4x^2) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(-4x^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(4x^2) - 2\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(4y^2) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(4y^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(4x^2) + 2\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2\frac{\partial u}{\partial x_2}.
\end{aligned}
$$

(E) devient

$$
0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(-8x^2y^2 - -8x^2y^2) - 2\frac{\partial u}{\partial x_1}(x^2 + y^2) + 2\frac{\partial u}{\partial x_2}(y^2 - x^2),
$$

or $x_2^2 - x_1^2 = 4x^2y^2$ ainsi (E) devient :

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{x_1}{2(x_2^2 - x_1^2)}\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{x_2}{2(x_2^2 - x_1^2)^2}\frac{\partial u}{\partial x_1}.
$$

Soit maintenant $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial y_2}, \\
\frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{\partial u}{\partial y_1} - \frac{\partial u}{\partial y_2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}.
\end{aligned}
$$

(E) devient

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = \frac{1}{2(x_2^2 - x_1^2)}\left[x_1\frac{\partial u}{\partial y_1} - x_1\frac{\partial u}{\partial y_2} - x_2\frac{\partial u}{\partial y_1} - x_2\frac{\partial u}{\partial y_2}\right],
$$

or : $x_2^2 - x_1^2 = -y_1y_2$ et (E) devient

$$
2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}\right] = \frac{1}{y_2}\frac{\partial u}{\partial y_2} - \frac{1}{y_1}\frac{\partial u}{\partial y_1}.
$$

3.4.2 Equation parabolique

Théorème 3.4.2. *Soit $\varphi(x, y) = c$ la famille de courbes caractéristiques d'une équation parabolique. Soit $x_1 = \varphi(x, y)$ et x_2 une fonction indépendante de $x_1\left(\frac{D(x_1, x_2)}{D(x, y)} \neq 0\right)$. Avec ces nouvelles variables, (E) devient :*

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = G\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, u, x_1, x_2\right).
$$

Démonstration. On sait qu'en choisissant x_1 comme nouvelle variable, on annulle le terme en $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$.
Montrons que B coefficient de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ est aussi nul.
L'équation différentielle des caractéristiques est :

$$0 = a(\frac{dy}{dx})^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = a(\frac{dy}{dx} - \frac{b}{a})^2,$$

puisque $b^2 = ac$.
Soit alors $\varphi_1(x, y) = k$ l'équation d'une caractéristique qui définit implicitement y comme fonction de x : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \dfrac{dy}{dx}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0$. Si on pose $x_1 = \varphi_1(x, y),\ x_2 = x$: $\dfrac{\partial x_1}{\partial x} + \dfrac{b}{a}\dfrac{\partial x_1}{\partial y} = 0$, or

$$B = [a\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial x_2}{\partial x} + b(\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial x_2}{\partial y} + \frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial x_2}{\partial x}) + c\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial x_2}{\partial y}] = a[\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{b}{a}\frac{\partial x_1}{\partial y}][\frac{\partial x_2}{\partial x} + \frac{b}{a}\frac{\partial x_2}{\partial y}],$$

qui vaut donc 0. □

Exemple 3.4.2. (E) : $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y^2} = 0.$

Solution : Les caractéristiques ont pour équation $\dfrac{y}{x} = c$, soit $x_1 = \dfrac{y}{x}$ et $x_2 = y$.

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2} \neq 0.$$

Par dérivation par rapport aux nouvelles variables,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}(-\frac{y}{x^2}),\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{1}{x} + \frac{\partial u}{\partial x_2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{y^2}{x^4} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial x_1},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{x}[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{1}{x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}] + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},
\end{aligned}$$

(E) devient

$$x_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0.$$

On en déduit la forme générale des solutions $u = f(x_1)x_2 + g(x_1)$ où $u(x, y) = yf(\dfrac{y}{x}) + g(\dfrac{y}{x})$, et f et g sont deux fonctions arbitraires.

3.4.3 Equation elliptique

Théorème 3.4.3. *Soit* $\varphi_1(x,y)=k_1, \varphi_2(x,y)=k_2$ *les solutions complexes de* $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b}{a}+-i\sqrt{\dfrac{ac-b^2}{a^2}}$ *; on pose* $y_1+iy_2=\varphi_1(x,y), y_1-iy_2=\varphi_2(x,y)$, *alors* (E) *devient*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}=G(\frac{\partial u}{\partial y_1},\frac{\partial u}{\partial y_2},u,y_1,y_2).$$

Exemple 3.4.3. (E) : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Solution : Les caractéristiques complexes sont solutions de $(\dfrac{dy}{dx})^2+x^2=0$, soit $\dfrac{dy}{dx}=ix$ et $\dfrac{dy}{dx}=-ix$ dont les solutions sont : $2y-ix^2=k_1$ et $2y+ix^2=k_2,\ k_1,k_2\in\mathbb{R}$. On pose donc $2y-ix^2=y_1+iy_2$ et $2y+ix^2=y_1-iy_2$, c'est à dire $y_1=2y$ et $y_2=-x^2$.

Les dérivées dans le nouveau système de coordonnées s'écrivent

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -2x\frac{\partial u}{\partial y_2}\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 2\frac{\partial u}{\partial y_1}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 4\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -2\frac{\partial u}{\partial y_2}+4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}.
\end{aligned}$$

Ceci réduit (E) à l'équation

$$-2\frac{\partial u}{\partial y_2}+4x^2(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2})=0,$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}=\frac{1}{2y_2}\frac{\partial u}{\partial y_2}.$$

Remarque 3.4.1. *Pour trouver la solution générale d'une équation elliptique, on peut utiliser le changement de variables suivant :*
$x_1=\varphi_1(x,y), x_2=\varphi_2(x,y)$ *tels que* φ_1,φ_2 *sont les courbes caractéristiques de l'équation sur* $\mathbb{C}$.

Exemple 3.4.4. (E) : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Solution : L'équation (E) est elliptique, elle admet deux familles de courbes caractéristiques sur $\mathbb{C}$. En effet

$$\begin{aligned}
(\frac{dy}{dx})^2+1=0 &\iff (\frac{dy}{dx}+i)(\frac{dy}{dx}-i)=0\\
&\iff \frac{dy}{dx}=+i \text{ ou } \frac{dy}{dx}=-i\\
&\iff y=ix+c_1 \text{ ou } y=-ix+c_2\\
&\iff y-ix=c_1 \text{ ou } y+ix=c_2
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} x_1=y-ix,\\ x_2=y+ix. \end{cases}$$

Dans le nouveau système de coordonnées, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x}\\
&= -i\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial u}{\partial x_2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(-i\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial u}{\partial x_2})\\
&= -i\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x_1})+i\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x_2})\\
&= -i\big[\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial u}{\partial x_1})\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial u}{\partial x_1})\frac{\partial x_2}{\partial x}\big]+i\big[\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial u}{\partial x_2})\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial u}{\partial x_2})\frac{\partial x_2}{\partial x}\big].\\
&= -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.
\end{aligned}$$

De la même façon, on trouve :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

L'équation (E) devient alors :

$$
\begin{aligned}
4\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 &\iff \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\
&\iff \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \\
&\iff \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_2) \\
&\iff u = \int f(x_2)dx_2 + h(x_1) \\
&\iff u = h(x_1) + g(x_2) \\
&\iff u(x,y) = h(y - ix) + g(y + ix),
\end{aligned}
$$

où f et g sont deux fonctions arbitraires.

3.5 Exercices

Exercice 1 Déterminer les régions du plan où l'équation :

$$(2x+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \lambda=cte\in\mathbb{R},\quad y\neq 0,$$

est du type hyperbolique, parabolique ou elliptique.

Exercice 2 1°) Déterminer le type et la forme standard de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

2°) En donner la solution générale.

Exercice 3 Donner la solution générale de l'équation :

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2y^2.$$

Exercice 4 Donner le type et la forme standard de l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4x\frac{\partial u}{\partial x}+4y\frac{\partial u}{\partial y}+4[(x-y)^2+x^2+1]u=0.$$

Exercice 5 On considère l'équation aux dérivées partielles du second ordre à coefficients constants

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad a,b,c\in\mathbb{R},\tag{E}$$

avec $a\neq 0$ et $u\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On suppose cette équation de type hyperbolique et on note

$$P(x,y)=ax^2+bxy+cy^2.$$

1°) Calculer $r_1, r_2\in\mathbb{R}$ tels que $P(x,y)=a(x-r_1y)(x-r_2y)$.

2°) En déduire un changement de variables $v(x_1,y_1)=u(x,y)$ tel que (E) s'écrive

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial y_1}=0,\tag{F}$$

3°) Donner les solutions générales des équations (F) et (E).

CHAPITRE 4

Méthode de séparation des variables

Nous allons indiquer une méthode qu'on peut souvent utiliser pour chercher les solutions d'une E.D.P. vérifiant certaines conditions initiales et certaines conditions frontières. D'une manière générale, la résolution d'une E.D.P. par la méthode de séparation des variables nous amène à résoudre des problèmes aux valeurs propres : équation différentielle du 2 ème ordre avec des conditions aux frontières à respecter, c'est ce qu'on appelle **problème de Sturm-Liouville** ou problème aux valeurs propres.

4.1 Problème régulier de Sturm-Liouville

Définition 4.1.1. *Soit sur un intervalle fermé borné* $[a, b]$ *trois fonctions continues* p, q *et* s *vérifiant* $p > 0$, $s > 0$ *et* p *de classe* $\mathcal{C}^\infty$.
Soit

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{df}{dx}) + q(x)f(x) + \lambda s(x)f(x) = 0, \tag{E}$$

et

$$\begin{cases} a_0 f(a) + a_1 f'(a) = 0, \ |a_0| + |a_1| > 0, & (F) \\ b_0 f(b) + b_1 f'(b) = 0, \ |b_0| + |b_1| > 0. \end{cases}$$

La recherche des nombres λ *et des fonctions* f *non identiquement nulles solutions de* (E) *et vérifiant les conditions (F) s'appelle un* ***problème régulier de Sturm-Liouville****. C'est la recherche des valeurs propres* $-\lambda$ *et des fonctions propres* f *de l'opérateur* A *défini par :*

$$[Af](x) = \frac{1}{s(x)}[\frac{d}{dx}(p(x)\frac{df}{dx} + q(x)f(x)],$$

sur l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables et qui, en outre vérifient les conditions (F).

Théorème 4.1.1. 1. *Il existe une famille dénombrable de valeurs propres réelles et simples de A : $|\lambda_0| < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots < |\lambda_n| < \ldots$ et $\lim_{n\to+\infty} |\lambda_n| = +\infty$, une fonction propre ϕ_n associée à λ_n vérifie :*

$$\frac{d}{dx}[p\phi_n'] + q\phi_n - \lambda_n s\phi_n = 0.$$

2. *La suite ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$ est une base de $L_s^2[a,b]$, a exactement n zéros sur $]a,b[$, ϕ_{n-1} a un zéro entre deux zéros consécutifs de ϕ_n.*

3. *Si ϕ satisfait (F) est continue et sa dérivée ϕ' est continue par morçeaux, alors $\sum_{n=0}^{p} < \phi, \phi_n >_{L_s^2[a,b]} \phi_n$ converge non seulement dans $L_s^2[a,b]$ mais aussi uniformément et absolument sur $[a,b]$ et on a*

$$\forall x \in [a,b],\ \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} < \phi, \phi_n >_{L_s^2[a,b]} \phi_n.$$

Exemple 4.1.1. *Résoudre le problème de Sturm-Liouville suivant :*

$$x \in [0,\pi] \quad (E)\ \ \frac{d^2f}{dx^2} + \lambda f = 0 \quad (F)\ \begin{cases} f(0) = 0, \\ f(\pi) = 0. \end{cases}$$

Solution : **Equation caractéristique** : $r^2 + \lambda = 0$, $\Delta = -4\lambda$.

On distingue trois cas :

♦ 1^{er} **cas** : $\Delta = 0$ soit $\lambda = 0$

La solution s'écrit $f(x) = ax + b$.

$f(0) = 0 \Longrightarrow b = 0$. $f(\pi) = 0 \Longrightarrow a\pi = 0 \Longrightarrow a = 0$.

ce qui implique que $f(x) = 0$,

donc $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre.

♦ $2^{ème}$ **cas** : $\Delta < 0$ soit $\lambda > 0$. On pose $\lambda = \omega^2$, $\omega \neq 0$ soit $\Delta = -4\omega^2 \Longrightarrow r_1 = i\omega, r_2 = -i\omega$

La solution s'écrit : $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$

$f(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$.

$f(\pi) = 0 \Longrightarrow B\sin(\pi\omega) = 0 \Longrightarrow \sin(\pi\omega) = 0 \Longrightarrow \pi\omega = n\pi,\ n \neq 0 \Longrightarrow \omega = n,\ n \neq 0.$,

donc $\lambda_n = n^2$ sont les valeurs propres et les fonctions propres associées aux valeurs propres λ_n s'écrivent

$$f_n(x) = B_n \sin(nx),\ B_n \in \mathbb{R}.$$

♦ $\underline{3^{ème}\ \textbf{cas}}$: $\Delta > 0$ soit $\lambda < 0$. On pose $\lambda = -\gamma^2$, $\gamma \neq 0$, soit $\Delta = 4\gamma^2 \Longrightarrow r \pm \gamma$.

La solution s'écrit : $f(x) = Ach\gamma x + Bsh\gamma x$

$f(0) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$

$f(\pi) = 0 \Longleftrightarrow Bsh\gamma\pi = 0 \Longleftrightarrow B = 0$, donc $f(x) = 0$, $\lambda = \gamma^2$ n'est pas une valeur propre.

4.2 Problème périodique de Sturm-Liouville

Définition 4.2.1. *Un problème de Sturm-Liouville sur $[a, b]$ sera dit* ***périodique*** *si les coefficients de (E) vérifient en plus des conditions frontières les conditions suivantes :*

(F)

$$\begin{cases} f(a) = f(b), \\ f'(a) = f'(b). \end{cases} \tag{4.1}$$

Remarque 4.2.1. *Dans le problème périodique, λ_0 est une valeur propre simple mais λ_n, $n > 0$ peut être double.*

Exemple 4.2.1. *Résoudre le problème périodique de Sturm-Liouville suivant :*

$$x \in [0, \pi] \quad (E)\ \frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda f = 0, \quad (F) \begin{cases} f(0) = f(1), \\ f'(0) = f'(1). \end{cases}$$

Solution :

Equation caractéristique : $r^2 + \lambda = 0$ $\Delta = -4\lambda$.

On distingue trois cas :

♦ $\underline{1^{er}\ \textbf{cas}}$: $\Delta = 0$ soit $\lambda = 0$.

La solution s'écrit $f(x) = ax + b$.

$f(0) = f(1) \Longrightarrow b = a + b \Rightarrow a = 0$; l'autre condition ($f'(0) = f'(1)$ ne nous apprend rien sur b).

Par conséquent, $\lambda = 0$ est une valeur propre simple $f(x) = b$ (où b est une constante arbitraire) est une fonction propre simple.

♦ $\underline{2^{ème}\ \textbf{cas}}$: $\Delta < 0$ soit $\lambda > 0$. On pose $\lambda = \omega^2$, $\omega \neq 0$ soit $\Delta = -4\omega^2 \Longrightarrow r_1 = i\omega, r_2 = -i\omega$

La solution s'écrit : $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$

$f'(x) = -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x$

$$\begin{cases} f(0) = f(1); \\ f'(0) = f'(1). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = A\cos\omega + B\sin\omega; \\ B = -A\sin\omega + B\cos\omega. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(1-\cos\omega) - B\sin\omega = 0; \\ A\sin\omega + B(1-\cos\omega) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & 1-\cos\omega \end{vmatrix} = (1-\cos\omega)^2 + \sin\omega^2 = 2(1-\cos\omega).$$

2(1-cos $\omega) = 0 \Leftrightarrow \cos\omega = 1 \Rightarrow \omega = 2n\pi,\ n \neq 0.$

$\lambda_n = 4n^2\pi^2$ sont des valeurs propres et les fonctions propres associées sont

$$f_n(x) = A_n \cos 2n\pi x + B_n \sin 2n\pi x.$$

♦ <u>$3^{ème}$ **cas**</u> : $\Delta > 0$ soit $\lambda < 0$. On pose $\lambda = -\gamma^2,\ \gamma \neq 0$, soit $\Delta = 4\gamma^2 \Longrightarrow r \pm \gamma$.

La solution s'écrit : $f(x) = Ach\gamma x + Bsh\gamma x$

$$f(x) = Ach\gamma x + Bsh\gamma x$$

$$f'(x) = \gamma(Ash\gamma x + Bch\gamma x).$$

$$\begin{cases} f(0) = f(1); \\ f'(0) = f'(1). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = Ach\gamma + Bsh\gamma; \\ B = Ash\gamma + Bch\gamma. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(ch\gamma - 1) + Bsh\gamma = 0; \\ Ash\gamma + B(ch\gamma - 1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} ch\gamma - 1 & sh\gamma \\ sh\gamma & ch\gamma - 1 \end{vmatrix} &= (ch\gamma - 1)^2 - sh^2\gamma \\ &= ch^2\gamma + 1 - 2ch\gamma - sh^2\gamma \\ &= (1 - ch\gamma) = -4sh\frac{\gamma}{2} \neq 0, \gamma \neq 0. \end{aligned}$$

$A = B = 0 \Rightarrow f \equiv 0$, donc $\lambda < 0$ n'est pas valeur propre.

4.3 Principe de la méthode de séparation des variables

Soit L un opérateur différentiel linéaire et $Au = 0$ des conditions frontières linéaires, on veut résoudre l'équation (E) avec les conditions frontières (F) et les contitions initiales (I) : (E) $Lu = 0$, (F) $Au = 0$, (I) $u(x, 0) = f(x)$.

Théorème 4.3.1. *1. On cherche d'abord les solutions de (E) vérifiant (F) qui sont de la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$. Cela conduit à un problème de Sturm-Liouville dont les solutions sont constituées par une suite $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ de fonctions vérifiant (E) et (F). En général X_n est complètement déterminée mais pas T_n.*

2. Pour réaliser la condition initiale on utilise le fait que la suite X_n, $n \in \mathbb{N}$ est une base dans un certain espace L^2_σ convenable. On suppose que f appartient à cet espace et on la développe par rapport à cette base : $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X_n(x)$, T_n est alors déterminée par la relation $T_n(0) = c_n$ et la solution est

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} X_n(x)T_n(t)$$

Exemple 4.3.1. *On veut résoudre le problème suivant :*
(E) $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ *pour* $0 < x < l,\ t > 0.$,
(F) $u(0,t) = u(l,t) = 0$
(I) $u(x,0) = f(x)$,
où $f(0) = 0,\ f \in L^2([0,l])$.

Solution

On suppose que $u(x,t) = X(x)T(t)$, l'équation (E) devient

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \Longleftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

On obtient

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ T'(t) = \lambda T(t). \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \quad (T(t) \neq 0).$$

On va résoudre le problème de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

1. Si $\lambda = 0$, $X''(x) = 0 \Longrightarrow X(x) = ax + b$,

   $X(0) = 0 \Longrightarrow b = 0$,

   $X(l) = 0 \Longrightarrow al = 0 \Longrightarrow a = 0$,

   ce qui entraine $X \equiv 0$, donc $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre.

2. Si $\lambda > 0$, $\lambda = \omega^2$, $\omega \neq 0$,

   $X(x) = ach\omega x + bsh\omega x$,

   $X(0) = 0 \Longrightarrow a = 0$,

   $X(l) = 0 \Longrightarrow b\omega l = 0 \Longrightarrow b = 0$,

   ce qui implique que $X \equiv 0$, donc $\lambda > 0$ n'est pas une valeur propre.

3. Si $\lambda < 0$, $\lambda = -\gamma^2$, $\gamma \neq 0$,

   $X(x) = a\cos\gamma x + b\sin\gamma x$,

   $X(0) = 0 \Longrightarrow a = 0$

   $X(l) = 0 \Longrightarrow b\sin\gamma l = 0 \Longrightarrow \gamma l = n\pi$, $n \neq 0$,

   $\Longrightarrow \gamma = \dfrac{n\pi}{l}$, $n \neq 0$,

   donc, $\lambda_n = \dfrac{-n^2\pi^2}{l^2}$ sont les valeurs propres et les fonctions propres : $X_n(x) = b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$.

   <u>$(X_n)_n$ forme une base orthonormée de $L^2([0,l])$</u>

$$\begin{aligned}
\langle X_n, X_n\rangle_{L^2[0,l]} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^l (X_n(x))^2 dx = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \int_0^l b_n^2 \sin^2\frac{n\pi}{l} x dx = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{b_n^2}{2}\int_0^l 1 - \cos(\frac{2n\pi}{l}) x dx = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{b_n^2}{2}\big[x - \frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{l}x\big]_0^l = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{b_n^2}{2} l = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad b_n = \pm\sqrt{\frac{2}{l}}.
\end{aligned}$$

   On trouve

$$\begin{cases} \lambda_n = \frac{-n^2\pi}{l^2}, \\ X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x. \end{cases}$$

On résout le deuxième problème : On a :

$$\begin{aligned} T'(t) = \lambda T(t) &\iff T_n'(t) = \lambda_n T_n(t) \\ &\iff \frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = \frac{-n^2\pi^2}{l^2} \\ &\iff \ln|T_n(t)| = \frac{-n^2\pi^2}{l^2}t + c \\ &\iff T_n(t) = ke^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2}t} / k = \pm e^c. \end{aligned}$$

On déduit que

$$u_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\frac{n\pi}{l}x)k_n e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2}t},$$

et

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} k_n\sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\frac{n\pi}{l}x)e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2}t}.$$

Reste à déterminer k_n.

On utilise la condition initiale : $u(x,0) = f(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} k_n\sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\frac{n\pi}{l}x) &= f(x) \\ \sum_{n\geq 1} k_n X_n(x) &= f(x) \\ \sum_{n\geq 1} k_n X_n(x)X_m(x) &= f(x)X_m(x) \\ \sum_{n\geq 1} k_n \int_0^l X_n(x)X_m(x)dx &= \int_0^l f(x)X_m(x)dx \\ \sum_{n\geq 1} k_n\langle X_n, X_m\rangle_{L^2([0,l])} &= \langle f, X_m\rangle_{L^2([0,l])} \\ n = m:\ k_n\langle X_n, X_m\rangle_{L^2([0,l])} &= \langle f, X_n\rangle_{L^2([0,l])}, \end{aligned}$$

et par suite $k_n = \langle f, X_n\rangle_{L^2([0,l])}$,

par conséquent

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1}\sqrt{\frac{2}{l}}\langle f, X_n\rangle_{L^2([0,l]}\sin\frac{n\pi}{l}xe^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2}}t.$$

CHAPITRE 5

Equation de Laplace - Equation des ondes - Equation de la chaleur

5.1 Equation de Laplace

Considérons un ensemble de N boules de masse m reliées par des ressorts de raideur k. Chaque boule est assujettie à se mouvoir sur une ligne verticale, et les lignes sont espacées d'une distance d. L'énergie potentielle totale du système est par conséquent :

$$U(...,y_{n-1},y_n,y_{n+1}) = \sum_n \frac{1}{2}k(y_{n+1}-y_n)^2,$$

où y_n est l'ordonnée de la n-ième boule (et x_n=nd son abscisse). Pour quelle valeurs des y_k le potentiel est minimum ? Comme U est une fonction de N variables, pour être extremum, il faut que sa dérivée par rapport à chaque variable soit nulle. Considérons la n-ième boule. Dans l'expression de l'énergie sous la somme, il y a seulement deux termes qui contiennent la coordonnée de y_n qui sont $(y_n - y_{n-1})^2$ et $(y_{n+1}-y_n)^2$. La minimisation de U par rapport à y_n donne donc :

$$\frac{\partial U}{\partial y_n} = k(2y_n - y_{n-1} - y_{n+1}) = 0. \tag{5.1}$$

Cette dernière relation indique simplement que la force exercée sur la n-ième boule doit être nulle : en effet, la force n'est que le gradient (à un signe près) du potentiel. Lextremum du potentiel correspond à une position d'équilibre où les forces exercées s'annulent. Faisant maintenant tendre d vers 0 et N vers l'infini pour retrouver le continuum. La variable $x = nd$ devient continue, de même que la fonction $y(x)$. Comme $y_n = y(nd)$, nous avons, par un simple développement de Taylor,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{dy}{dx}\big|_{x=x_n} d + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=x_n} d^2,$$

et

$$y_{n-1} = y_n - \frac{dy}{dx}\big|_{x=x_n} d + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=x_n} d^2.$$

L'équation (5.1) se transforme donc en une équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. A plusieurs dimensions en appliquant la même démarche, on aboutit à l'équation

$$\Delta y = 0, \tag{5.2}$$

où l'opérateur Δ désigne le laplacien. L'équation (5.1) est appelée justement **l'équation de Laplace**.

Définition 5.1.1. *L'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^n$ est :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

On note Δu le premier membre, ainsi l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^2$ est

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

et dans $\mathbb{R}^3$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

La quantité Δu s'appelle "le laplacien" de u.

Définition 5.1.2. *Une fonction u qui vérifie $\Delta u = 0$ dans un ouvert G de $\mathbb{R}^n$, s'appelle une fonction* ***harmonique*** *dans G.*

Corollaire 5.1.1. *L'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^n$ s'écrit en coordonnées polaires (c-à-d, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$) comme suit*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2},\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

5.1.1 Equation de Laplace sur un disque

Soit D le disque $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R_0^2$ de centre $M_0(x_0,y_0)$ et de rayon R_0.

Soit f une fonction à valeurs réelles de période 2π de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on cherche une fonction u harmonique dans D telle que : $u(R_0,\theta)=f(\theta)$

On a :

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \\ u(R_0,\theta)=f(\theta) \\ u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi). \end{cases} \tag{5.3}$$

En utilisant la méthode de **séparation des variables**, nous poserons d'abord : $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$.

L'équation (5.3) devient alors

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)}+r\frac{R'(r)}{R(r)}+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=0,$$

d'où

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)}+r\frac{R'(r)}{R(r)}=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=\lambda.$$

Ceci nous ramène au problème de **Sturm-Liouville** :

$$\begin{cases} \Theta''(\theta)=-\lambda\Theta(\theta) \\ \Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta), \end{cases} \tag{5.4}$$

ses solutions sont $\Theta_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,\ \lambda=n^2,\ n\in\mathbb{N}$, $R(r)$ doit alors être solution de l'équation **d'Euler** :

$$r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0.$$

Pour $n=0$ les solutions sont : $R(r)=c+d$, pour $n\neq 0$ ce sont $R_n(r)=cr^n+dr^{-n}$. Comme u doit être continue dans le disque il faut $d=0$. Ainsi

$$\Theta_n(\theta)R_n(r)=cr^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta),$$

posons alors

$$u(r,\theta)=\sum_{n\geq 0} r^n(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta). \tag{5.5}$$

Le développement en série de Fourier de f

$$f(\theta) = \sum_{n\geq 1}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

On a :

$$u(R_0, \theta) = f(\theta),$$

équivaut à

$$\sum_{n\geq 0} R_0^n(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

on obtient par identification

$$\begin{cases} a_0 = \alpha_0, \\ a_n = R_0^n \alpha_n, \\ b_n = R_0^n \beta_n, \end{cases} \tag{5.6}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \alpha_0 = a_0, \\ \alpha_n = \frac{a_n}{R_0^n}, \\ \beta_n = \frac{b_n}{R_0^n}. \end{cases} \tag{5.7}$$

Revenons à (5.5), grâce à (5.7) et (5.6), $u(r, \theta)$ s'écrit

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}(\frac{r}{R_0})^n \int_0^{2\pi}(\cos n\theta \cos n\varphi + \sin n\theta \sin n\varphi)f(\varphi)d\varphi$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}(\frac{r}{R_0})^n \int_0^{2\pi}(\cos n(\varphi-\theta)f(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}(\frac{r}{R_0})^n \int_0^{2\pi}(e^{in(\varphi-\theta)} + e^{-in(\varphi-\theta)}f(\varphi))d\varphi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\sum_{n\geq 1}(\frac{r}{R_0})^n e^{in(\varphi-\theta)} + \sum_{n\geq 1}(\frac{r}{R_0})^n e^{-in(\varphi-\theta)}\big)f(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(1+\frac{re^{i(\varphi-\theta)}}{R_0 - re^{i(\varphi-\theta)}} + \frac{re^{-i(\varphi-\theta)}}{R_0 - re^{-i(\varphi-\theta)}}\big)f(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(1+\frac{2R_0 r\cos(\varphi-\theta) - 2r^2}{R_0^2 + r^2 - 2rR_0\cos(\varphi-\theta)}\big)f(\varphi)d\varphi,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R_0^2 - r^2}{R_0^2 + r^2 - 2rR_0\cos(\varphi-\theta)}f(\varphi)d\varphi,
$$

ou encore

$$
u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R_0^2 - (x^2+y^2)}{R_0^2 + 2R_0(x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi) + x^2 + y^2}f(\varphi)d\varphi.
$$

5.1.2 Noyau de Poisson

Définition 5.1.3. *On appelle **Noyau de Poisson** relatif au disque D de centre 0 et de rayon R la fonction harmonique dans D définie par.*

$$
\begin{aligned}
P_\theta(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\frac{R^2 - (x^2+y^2)}{[R^2 - 2R(x\cos\theta + y\sin\theta) + x^2 + y^2]} \\
&= \frac{1}{2\pi}Re(\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}).
\end{aligned}
$$

Remarque 5.1.1. *Pour tout θ et tout x, y tels que $x^2 + y^2 \leq R^2$, on a : $P_\theta(x,y) \geq 0$.*

Théorème 5.1.2. *Soit f une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ telle que $f(0) = f(2\pi)$ et soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ et Γ sa frontière. Alors, il existe une fonction unique u qui satisfait*

1. *u est harmonique sur D.*
2. *$\lim_{z\to Re^{i\theta}} u(z) = f(\theta)$.*

Cette fonction est

$$
u(x,y) = \int_0^{2\pi} P_\theta(x,y)f(\theta)d\theta. \tag{5.8}
$$

Démonstration. 1. Soit $\rho \leq R$. Dans le disque $x^2 + y^2 \leq \rho^2$ la fonction P_θ est de classe $\mathcal{C}^2$, et donc on peut dériver sous le signe d'intégration l'expression (5.8), et on trouve

$$\Delta u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{\partial^2 P_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_\theta}{\partial y^2})f(\theta)d\theta.$$

Comme P_θ est harmonique on obtient

$$\Delta u = 0,$$

d'où u est harmonique sur D.

2. Pour montrer que $\lim\limits_{z\to Re^{i\theta}} u(z) = f(\theta)$, on doit démontrer que

$$\lim_{\substack{|z|<R \\ z\to Re^{i\theta_0}=\xi_0}} u(z) = f(\theta_0) \text{ et } \int_0^{2\pi} P_\theta(x,y)d\theta = 1.$$

On a

$$\begin{aligned} P_\theta(x,y) &= \frac{1}{2\pi}Re(\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}), \\ \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z} &= \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}(1-zR^{-1}e^{-i\theta})}, \\ &= \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}}\frac{1}{1-zR^{-1}e^{-i\theta}}. \end{aligned}$$

Comme $|z| < R$ on trouve donc que $|zR^{-1}e^{-i\theta}| < 1$ et par conséquent

$$\frac{1}{1-zR^{-1}e^{-i\theta}} = 1 + \frac{z}{Re^{i\theta}} + \frac{z^2}{R^2e^{i2\theta}} + \dots\frac{z^n}{R^ne^{in\theta}},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z} &= (1+\frac{z}{Re^{i\theta}})(1+\frac{z}{Re^{i\theta}}+\frac{z^2}{R^2e^{i2\theta}}+\dots) \\ &= 1+2\frac{z}{Re^{i\theta}}+2\frac{z^2}{R^2e^{i2\theta}}+\dots \\ &= 1+2\frac{z}{R}e^{-i\theta}+2\frac{z^2}{R^2}e^{-i2\theta}+\dots+2\frac{z^n}{R^n}e^{-in\theta}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

on obtient

$$Re(\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}) = 1+2\frac{z}{R}\cos(\theta)+2\frac{z^2}{R^2}\cos(2\theta)+\dots+2\frac{z^n}{R^n}\cos(n\theta)+\dots,$$

pour $|z| \leq \rho < R$.

Dans le disque D on peut intégrer cette série terme à terme et comme

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta = \frac{1}{n} \sin n\theta|_0^{2\pi} = 0 \ \ \forall n \geq 1,$$

on otient

$$\int_0^{2\pi} P_\theta(x,y) d\theta = 1.$$

Montrons maintenant que $\lim\limits_{\substack{|z|<R \\ z \to Re^{i\theta_0} = \xi_0}} u(z) = f(\theta_0)$.

D'après ce qui précède on sait que

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P_\theta(x,y) f(\theta) d\theta,$$

d'où

$$\begin{aligned} u(z) - f(\theta_0) &= \int_0^{2\pi} P_\theta(x,y) f(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} P_\theta(x,y) f(\theta_0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} P_\theta(x,y)(f(\theta) - f(\theta_0)) d\theta. \end{aligned}$$

Soient $\eta \in]0, 2\pi[$ et

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} P_\theta(x,y)(f(\theta) - f(\theta_0)) d\theta \\ I_2 &= \int_{|\theta-\theta_0|>\eta} P_\theta(x,y)(f(\theta) - f(\theta_0)) d\theta. \end{aligned}$$

Comme f est continue, soit $\varepsilon > 0$ fixé, il existe η tel que $\forall \theta \in [\theta_0 - \eta, \theta_0 + \eta]$

$$|f(\theta) - f(\theta_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

et par suite

$$\begin{aligned} |I_1| &= \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} P_\theta(x,y)(f(\theta) - f(\theta_0)) d\theta \\ &\leq \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} |P_\theta(x,y)||(f(\theta) - f(\theta_0))| d\theta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} |P_\theta(x,y)| d\theta \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{2\pi} |P_\theta(x,y)| d\theta \\ &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Retournons maintenant au second morçeau. On remarque que

$$\lim_{z \to Re^{i\theta}} \sup_{|\xi-\xi_0| \geq \delta} P_\theta(z) = 0, \quad \xi = Re^{i\theta}, \xi_0 = Re^{i\theta_0}.$$

En effet,
$\sup_{|\xi-\xi_0|\geq\delta} P_\theta(z) = \frac{1}{2\pi}\sup_{|\xi-\xi_0|\geq\delta}\frac{R^2-|z|^2}{|\xi-z|^2} \leq \frac{1}{2\pi}\sup_{|\xi-\xi_0|\geq\delta}\frac{R^2-|z|^2}{|\delta-|\xi_0-z||^2}$, alors la limite du majorant à droite quand $z \to Re^{i\theta_0}$ est $R^2-|z|^2 \to 0$, d'où

$$\lim_{z\to Re^{i\theta}}\sup_{|\xi-\xi_0|\geq\delta} P_\theta(z) = 0,$$

et par suite il existe $\delta' > 0$ assez petit pour que

$$|z-\xi_0| < \delta' \Rightarrow \sup_{|\xi-\xi_0|\geq\delta} P_\theta(z) < \frac{\varepsilon}{2\pi(k+|f(\theta_0)|)}.$$

Alors pour $|z-Re^{i\theta_0}| < \delta'$ on peut effectuer la majoration

$$\begin{aligned} |I_2| &= \int_{|\theta_0-\theta_0|>\eta} P_\theta(z)(f(\theta)-f(\theta_0))d\theta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\{\int_0^{2\pi}|f(\theta)|d\theta + \int_0^{2\pi}|f(\theta_0)|d\theta\} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}k2\pi + 2\pi|f(\theta_0)] = \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où $\lim_{z\to Re^{i\theta_0}} u(z) = f(\theta_0)$.
Par coséquent

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_D u(x,y)dxdy$$

□

Corollaire 5.1.3. *Sous les mêmes conditions précédentes on a*

$$|u(x_0,y_0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}R}\Big[\iint_D |u(x,y)|^2dxdy\Big]^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration. D'après 2 du théorème précédent on a

$$\begin{aligned} |u(x_0,y_0)| &= \Big|\frac{1}{\pi R^2}\iint_D u(x,y)dxdy\Big| \\ &\leq \frac{1}{\pi R^2}\iint_D |u(x,y)|dxdy, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**

$$\begin{aligned} |u(x_0,y_0)| &= \frac{1}{\pi R^2}\iint_D |u(x,y)|dxdy \\ &\leq (\frac{1}{\pi R^2}\iint_D |u(x,y)|^2dxdy)^{\frac{1}{2}}(\iint_D |dxdy)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}R}{\pi R^2}(\iint_D |u(x,y)|^2dxdy)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}R}(\iint_D |u(x,y)|^2dxdy)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

Théorème 5.1.4. *Si u est continue sur le disque de centre (x_0, y_0) et de rayon R et si de plus u est harmonique sur ce disque alors,*

1. $u(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi)d\varphi,$
2. $u(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\iint_{D((x,y),R)} u(x,y)dxdy}{\iint_{D((x,y),R)} dxdy} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_D u(x,y)dxdy.$

Démonstration. 1. Le noyau de Poisson relatif au disque de centre (x_0, y_0) et de rayon R est : $u(x_0+R\cos\varphi, y_0+R\sin\varphi) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0+R\cos\varphi, y_0+R\sin\varphi) \dfrac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\varphi - \theta)} d\varphi.$
Posons $r = 0$ on obtient

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi)d\varphi.$$

2. D'après le premier point du théorème, on a pour tout $0 \leq r \leq R$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi)d\varphi,$$

en multipliant les membres par rdr et en intégrant de 0 à R on trouve que :

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) \int_0^R rdr &= \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi)rdrd\varphi \\ \frac{R^2}{2} u(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \iint_D |u(x,y)|dxdy. \end{aligned}$$

□

5.1.3 L'équation de Laplace dans un rectangle

On cherche une fonction u harmonique pour $0 < x < a$ et $0 < y < b$ telle que :

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), & \forall x \in]0, a[\\ u(x,b) = g(x), & \forall x \in]0, a[\\ u(0,y) = h(y), & \forall x \in]0, b[\\ u(0,y) = k(y), & \forall x \in]0, b[\end{cases} \tag{5.11}$$

On suppose que $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y) + u_4(x,y)$ est solution du problème initial.

On obtient quatre problèmes, chacun de ces problèmes peut se résoudre par séparation des variables.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \\ u_1(x,0) = f(x), \\ u_1(x,b) = u_1(0,y) = u_1(a,y) = 0, \end{cases} \tag{5.12}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \\ u_2(x,b) = g(x), \\ u_2(x,0) = u_2(0,y) = u_2(a,y) = 0, \end{cases} \tag{5.13}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0, \\ u_3(0,y) = h(y), \\ u_3(x,0) = u_3(x,b) = u_3(a,y) = 0, \end{cases} \tag{5.14}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial y^2}, \\ u_4(x,0) = k(y), \\ u_4(x,0) = u_4(x,b) = u_4(0,y) = 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

Nous allons indiquer de quelle façon on procède pour calculer u_1.

Soit $u_1(x,y) = X(x)Y(y)$, u_1 est harmonique si

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

soit

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{-Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Le problème de Sturm-Liouville pour X est :

$X''(x) = \lambda X(x)$ et $X(0) = X(a) = 0$ puisque $\forall y \;\; u_1(0,y) = 0 = u_1(a,y)$.

Pour $\lambda = 0$, l'équation $X''(x) = 0$ implique que $X(x) = ax + b$.

En tenant compte des conditions aux frontières $X(0) = X(a) = 0$, on trouve $a = b = 0$, d'où $X \equiv 0$.

Donc $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre.

Pour $\lambda > 0$: On pose $\lambda = \gamma^2$, $\gamma \neq 0$.

$X''(x) = \gamma^2 X(x)$, l'équation caractéristique : $r^2 = \gamma^2$

$X(x) = Ach\gamma x + Bsh\gamma x$

$X(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$

$X(a) = 0 \Longrightarrow Bsh\gamma a = 0 \Longrightarrow B = 0$, alors $X \equiv 0$

Pour $\lambda < 0 : \lambda = -\omega^2,\ \omega \neq 0$

$X''(x) = -\omega^2 X(x) :\ r^2 = (i\omega)^2$

$X(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$

$X(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$

$X(a) = 0 \Longrightarrow B\sin a\omega = 0 \Longrightarrow \sin\omega a = 0 \Longrightarrow a\omega = n\pi, n \neq 0 \Longrightarrow \omega = \frac{n\pi}{a}$.

$\lambda_n = -\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$ sont des valeurs propres et $X_n(x) = B_n \sin\dfrac{n\pi}{a}x$.

La suite (X_n) forment une base de $L^2([a,b])$. (Voir théorème 4.1.1). De plus, on a

$$\begin{aligned}
\langle X_n, X_n\rangle_{L^2([a,b])} = 1 &\iff \int_0^a B_n^2 \sin^2\frac{n\pi}{a}xdx = 1\\
&\iff B_n^2\int_0^a \sin^2\frac{n\pi}{a}xdx = 1\\
&\iff \frac{B_n^2}{2}\int_0^a 1-\cos\frac{2n\pi}{a}xdx = 1\\
&\iff \frac{B_n^2}{2}[x - \frac{a}{2n\pi}\sin\frac{2\pi}{a}x]_0^a = 1\\
&\iff a\frac{B_n^2}{2} = 1\\
&\iff B_n = \pm\sqrt{\frac{2}{a}},
\end{aligned}$$

ce qui rend la suite (X_n) orthonormée pour $B_n = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}$.

Les solutions de ce problème sont

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= -\frac{n^2\pi^2}{a^2},\\
X_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(n\pi ax)\ \ n \geq 1,
\end{aligned}$$

On résout le deuxième problème

$$\begin{cases}
Y_n''(y) - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y_n(y) = 0,\\
Y_n(b) = 0,
\end{cases}$$

la solution est donnée par

$$Y_n(y) = ce^{\frac{n\pi}{a}y} + de^{-\frac{n\pi}{a}y},$$

en utilisant les conditions initiales, on obtient

$$\begin{aligned} Y_n(b) = 0 &\iff ce^{\frac{n\pi}{a}b} + de^{-\frac{n\pi}{a}b} = 0 \\ &\iff c = -de^{-\frac{2n\pi}{a}b}, \end{aligned}$$

il en résulte

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= -de^{-\frac{2n\pi}{a}b}e^{\frac{n\pi}{a}y} + e^{-\frac{n\pi}{a}y} \\ &= de^{-\frac{n\pi}{a}b}(-e^{-\frac{n\pi}{a}(b-y)} + e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}) \\ &= 2de^{-\frac{n\pi}{a}b}sh\frac{n\pi}{a}(b-y), \end{aligned}$$

ce qui impose :

$$Y_n(y) = k_n sh\frac{n\pi}{a}(b-y)$$

on pose donc :

$$u_1(x,y) = \sum_{n\geq 1}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a})k_n sh\frac{n\pi}{a}(b-y).$$

On sait qu'on peut développer f en série de sinus sur $[a,b]$ de la façon suivante :

$$f(x) = \sum_{n\geq 1}\big[\frac{2}{a}\int_0^a f(t)\sin(\frac{n\pi t}{a})dt\big]\sin(\frac{n\pi}{a}x).$$

Pour que $u_1(x,0) = f(x)$ il faut donc

$$\sqrt{\frac{2}{a}}k_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(t)\sin(\frac{n\pi t}{a})dt\frac{1}{sh(\frac{n\pi b}{a})}, \forall n \geq 1,$$

on trouve donc

$$u_1(x,y) = \sum_{n\geq 1}\big[\frac{2}{a}\frac{1}{sh(\frac{n\pi b}{a})}\int_0^a f(t)\sin(\frac{n\pi t}{a})dt\big]\sin(\frac{n\pi x}{a})sh\frac{n\pi}{a}(b-y).$$

Cette formule définit bien une solution si $f \in \mathcal{C}^1$ et $f(0) = f(a) = 0$.

5.2 Equation des ondes

Nous nous sommes préoccupé dans la précédente section de phénomènes statiques. Essayons maintenant de formuler la dynamique. Revenons à notre exemple précédent et supposons que chaque boule a une masse m. Nous pouvons maintenant écrire la relation fondamentale de la dynamique $F = ma$ pour chaque boule. L'accélération de la n-ième boule est donnée par $\frac{d^2 y_n}{dt^2}$. La force sur la n-ième boule étant égale au gradient du potentiel, i.e. $F_n = \frac{-\partial U}{\partial y_n}$, nous avons, en suivant ce que nous avons dit plus haut,

$$m\frac{d^2 y_n}{dt^2} = -k(2y_n - y_{n+1} - y_{n-1}). \tag{5.16}$$

Comme m dépend de notre découpage, la réponse est plus simple cette fois. Si nous désignons par ρ la densité (linéaire à une dimension), nous avons $m = \rho d$. Nous avons également, comme indiqué plus haut, $k = \frac{K}{d}$ et $(2y_n - y_{n+1} - y_{n-1}) \approx -(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2})d^2$.

Quand $d \to 0$, l'équation (5.16) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\frac{K}{d}}{\rho d}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}d^2 \\ &= \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

C'est ce qu'on appelle **l'équation d'onde**. Elle se généralise de lamême manière à plusieurs dimensions.

Question : qu'est ce qui joue le rôle de la densité pour les phénomènes électriques ?

Nous pouvons maintenant aborder plusieurs généralisations. Si les boules baignent en plus dans un liquide, il faut tenir compte de la force de dissipation visqueuse qui est proportionnelle et (opposée à la vitesse), et donc à $-\frac{dy_n}{dt}$. L'équation d'onde devient alors, lors du passage à la limite $d \to 0$,

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \lambda\frac{\partial y}{\partial t} = K\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

En électromagnétisme, λ dénote le coefficient d'absorption d'un matériau (l'inverse de sa transparence). Nous voyons que si la masse des boules (la force interielle) peut être négligée par rapport aux autres forces de frottement et appliquée par les voisins, nous pouvons négliger la dérivée d'ordre 2 par rapport au temps et écrire

$$\frac{\partial y}{\partial t} = D\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

qui n'est rien d'autre que **l'équation de la chaleur**.

Définition 5.2.1. *L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles d'ordre deux hyperbolique s'écrivant sous la forme suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \textit{en dimension 1,} \tag{E_1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \textit{ en dimension 2,} \tag{E_2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \textit{ en dimension 3,} \tag{E_3}$$

où c est une constante non nulle.

5.2.1 Equation des ondes dans $\mathbb{R}$

Il s'agit de résoudre l'équation (E) : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$: il n'y a pas de condition frontière, mais des conditions initiales.

Formule de d'Alembert

Théorème 5.2.1. *La solution de* (E) *telle que* $u(x,0)=f(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$ *est*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(y)dy,$$

cette formule s'appelle la formule de ***d'Alembert****.*

Démonstration. On va chercher la solution générale de (E) par la méthode des caractéristiques. Les courbes caractéristiques sont les solutions de l'équation
$(\frac{dx}{dt})^2-c^2=0\Leftrightarrow(\frac{dx}{dt}+c)(\frac{dx}{dt}-c)=0)\Leftrightarrow\frac{dx}{dt}=c$ ou $\frac{dx}{dt}=-c\Leftrightarrow dx=cdt$ ou $dx=-cdt.$
On obtient :

$$x-ct=k_1 \text{ et } x+ct=k_2,$$

où k_1 et k_2 des constantes réelles. Posons

$$x_1=x-ct,$$

$$x_2=x+ct.$$

On a

$$\begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & c \end{vmatrix}=2c\neq 0.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -c\frac{\partial u}{\partial x_1}+c\frac{\partial u}{\partial x_2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (E), on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}=0.$$

En intégrant cette équation, on trouve la solution

$$u(x,t)=K(x-ct)+G(x+ct).$$

Exprimons les conditions initiales :

$u(x,0) = f(x)$ donne

$$K(x) + G(x) = f(x), \tag{5.17}$$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ donne

$$-K'(x) + G'(x) = \frac{1}{c}g(x), \tag{5.18}$$

En dérivant la relation (5.17), on obtient :

$$K'(x) + G'(x) = f'(x), \tag{5.19}$$

en additionnant (5.18) et (5.19) on obtient

$$G'(x) = \frac{f'(x)}{2} + \frac{1}{2c}g(x),$$

et par suite

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(y)dy + c_1,$$

de (5.17) on a

$$\begin{aligned} K(x) &= f(x) - G(x) \\ K(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(y)dy - c_1, \end{aligned}$$

on a alors,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(y)dy - c_1 + \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(y)dy + c_1,$$

d'où

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy.$$

□

5.2.2 Equation des ondes avec second membre dans $\mathbb{R}$

Théorème 5.2.2. *Soit h une fonction continue de x et t. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, la solution du problème*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x,t),$$

qui vérifie $u(x,0) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} h(y,\tau)dyd\tau.$$

Exemple 5.2.1. *La solution du problème* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2$ *telle que :* $u(x,0) = f(x)$ *et* $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ *est*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} y^2 dy d\tau,$$

en calculant la dernière intégrale, on trouve

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy + \frac{x^2t^2}{2} + \frac{1}{12}c^2t^4.$$

5.2.3 Equation des ondes dans $\mathbb{R}^3$

Soit $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$.

Les coordonnées sphériques d'origine P_0 sont définies par l'angle polaire φ, l'angle azimutal θ et le module ρ ; $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\rho \in \mathbb{R}^+$.

Soit $P = (x, y, z)$ alors :

$$\begin{cases} x - x_0 = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y - y_0 = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z - z_0 = \rho \cos\theta. \end{cases}$$

On notera $B(P_0, r)$ la boule $|P_0P|^2 \leq r^2$ de centre P_0 et de rayon r et $S(P_0, r)$ la sphère $|P_0P|^2 = r^2$.

En coordonnées sphériques l'élément de volume est : $dv = \rho^2 \sin\theta d\theta d\rho d\varphi$ et l'élément de surface sur $S(P_0, \rho)$ est : $d\sigma = \rho^2 \sin\theta d\theta d\varphi$.

Définition 5.2.2. *Soit* Φ *une fonction continue dans une boule* $B(P_0, R)$ *de centre* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *et de rayon* R *et soit* $r < R$. *On appelle moyenne de* Φ *sur* $S(P_0, r)$ *la quantité*

$$\begin{aligned} M_\Phi(P_0, r) &= \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S(P_0,r)} \Phi(x,y,z)d\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \Phi(x_0 + r\sin\theta\cos\varphi, y_0 + r\sin\theta\sin\varphi, z_0 + r\cos\theta)d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta \Phi(x_0 + r\sin\theta\cos\varphi, y_0 + r\sin\theta\sin\varphi, z_0 + r\cos\theta)d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Théorème 5.2.3. *Si* Φ *est continue dans un voisinage de* P_0 *alors,*

$$\Phi(x_0, y_0, z_0) = \lim_{r\to 0} M_\Phi(P_0, r).$$

Démonstration. On sait que

$$\Phi(x_0, y_0, z_0) = M_{\Phi(x_0,y_0,z_0)}(P_0, r)$$

$$\begin{aligned}
|M_\Phi(P_0,r)-\Phi(x_0,y_0,z_0)| &= \\
&= |\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}[\Phi(x_0+r\sin\theta\cos\varphi, y_0+r\sin\theta\sin\varphi, z_0+r\cos\theta)-\Phi(x_0,y_0,z_0)]\sin\theta d\theta d\varphi| \\
&\leq \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}|\Phi(x_0+r\sin\theta\cos\varphi, y_0+r\sin\theta\sin\varphi, z_0+r\cos\theta)-\Phi(x_0,y_0,z_0)||\sin\theta| d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Comme Φ est continue au voisinage de P_0 on obtient pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $0 < r < \eta$ on a

$$|\Phi(x_0+r\sin\theta\cos\varphi, y_0+r\sin\theta\sin\varphi, z_0+r\cos\theta)-\Phi(x_0,y_0,z_0)| < \frac{2\epsilon}{\pi},$$

alors

$$\begin{aligned}
|M_{\Phi(x_0,y_0,z_0)}(P_0,r)-\Phi(x_0,y_0,z_0)| &< \frac{2\epsilon}{4\pi^2}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} d\theta d\varphi \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

et par suite

$$\Phi(x_0,y_0,z_0) = \lim_{r\to 0} M_{\Phi(x_0,y_0,z_0)}(P_0,r).$$

□

Nous aurons aussi besoin du théorème suivant

Théorème 5.2.4. *Soit $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vecteur dont les coordonnées sont continument dérivables à l'intérieur de la boule $B(P_0,r)$ et soit $r < R$. Alors*

$$\begin{aligned}
\iiint_{B(P_0,r)}(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z})dxdydz &= \iint_{S(P_0,r)}\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v}d\sigma \\
&= \int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3)r^2\sin\theta d\theta d\varphi,
\end{aligned}$$

où

$$\overrightarrow{n} = \begin{cases} \alpha = \sin\theta\cos\varphi \\ \beta = \sin\theta\sin\varphi \\ \gamma = \cos\theta \end{cases}$$

est le vecteur unitaire normal à la sphère au point P et dirigé vers l'extérieur de celle-ci.
*v_1, v_2 et v_3 sont exprimées en fonction de $x = x_0+r\sin\theta\cos\varphi$, $y = y_0+r\sin\theta\sin\varphi$ et $z = z_0+r\cos\theta$, cette formule est appelée **formule de Cauchy**.*

Théorème 5.2.5. ***Formule de Kirchoff***
Soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \qquad (E)$$

l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^3$.

1. *Pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ il existe une solution unique u de (E) telle que $u(x,y,z,0)=0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0)=g(x,y,z)$.*
   Cette solution est donnée par
$$\begin{aligned} u(x_0,y_0,z_0,t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{S(P_0,r)} g(x,y,z)d\sigma \\ &= \frac{t}{4\pi c^2t^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(x_0+ct\sin\theta\cos\varphi, y_0+ct\sin\theta\sin\varphi, z_0+ct\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$
   ce qu'on peut aussi écrire
$$u(P_0,t)=tM_g(P_0,ct).$$
   Autrement dit, la valeur de u en P à l'instant t est égale à t fois la moyenne de g sur la sphère de centre P_0 et de rayon ct.
2. *Pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ et toute fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ il existe une seule solution u de (E) telle que $u(x,y,z,0)=f(x,y,z)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0)=g(x,y,z)$. Cette solution est donnée par la formule de Kirchoff suivante*
$$\begin{aligned} u(x_0,y_0,z_0,t) &= \frac{t}{4\pi c^2t^2}\iint_{S(P_0,ct)} g(x,y,z)d\sigma+\frac{\partial}{\partial t}\big[\frac{t}{4\pi c^2t^2}\iint_{S(P_0,ct)} f(x,y,z)d\sigma\big] \\ &= \frac{1}{4\pi c^2t^2}\iint_{S(P_0,ct)}\big[tg(x,y,z)-f(x,y,z)+ct(r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial z})\big]d\sigma \\ &= tM_g(P_0,ct)+\frac{\partial}{\partial t}\big[tM_f(P_0,ct)\big]. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Nous allons calculer
$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_{B(P_0,r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,z,t)dxdydz \\ I_2 &= \iiint_{B(P_0,r)} (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})dxdydz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_{B(P_0,r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,z,t)dxdydz \\ &= \int_0^r\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_0+\rho\sin\theta\cos\varphi, y_0+\rho\sin\theta\sin\varphi, z_0+\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta\varphi \\ &= \int_0^r \rho^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta u(x_0+\rho\sin\theta\cos\varphi, y_0+\rho\sin\theta\sin\varphi, z_0+\rho\cos\theta)d\theta\varphi)d\rho \\ &= 4\pi\int_0^r \rho^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}(M_u(P_0,\rho))d\rho, \end{aligned}$$
où M_u est la moyenne de u au point P_0.
Soit $\overrightarrow{V}$ le vecteur $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$ ($\overrightarrow{V}=gradu$)
$$I_2=\iiint_{B(P_0,r)}(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})=\iint_{\partial S(P_0,r)}\overrightarrow{n}.\overrightarrow{V}d\sigma,$$

D'après la formule de Cauchy

$$I_2 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial z})r^2\sin\theta d\theta d\varphi.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\\ &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial z},\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}I_2 &= r^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}(x_0 + r\sin\theta\cos\varphi, y_0 + r\sin\theta\sin\varphi, z_0 + r\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi\\ &= r^2\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0 + r\sin\theta\cos\varphi, y_0 + r\sin\theta\sin\varphi, z_0 + r\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi.\end{aligned}$$

Si u est solution de l'équation (E) alors

$$I_1 - c^2 I_2 = 0,$$

et donc

$$4\pi r^2 c^2\frac{\partial M_u}{\partial r}(r,t) = 4\pi\int_0^r \rho^2\frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2}(\rho,t)d\rho,$$

en dérivant les deux membres de l'égalité par rapport à r on trouve que

$$2rc^2\frac{\partial M_u}{\partial r}(r,t) + r^2c^2\frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2}(r,t) = r^2\frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2}.$$

Posons $N_u(r,t) = rM_u(r,t)$, alors si u est solution de (E), on a

$$c^2\frac{\partial^2 N_u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 N_u}{\partial t^2} \tag{5.20}$$

De plus N_u satisfait les conditions

$$(F_1)\begin{cases} N_u(r,0) = rM_u(r,0), & (1)\\ N_u(0,t) = 0, & (2)\\ \frac{\partial}{\partial t}[N_u(r,0)] = r\frac{\partial M_u}{\partial t}(r,0) = M_g(r). & (3)\end{cases}$$

Posons $r < ct$ et on résout l'équation (5.20) avec les conditions (F_1). On sait que la solution générale de l'équation des ondes s'écrit sous la forme

$$N_u(r,t) = F(r+ct) + G(r-ct).$$

D'après (1) on trouve que

$$F(r) + G(r) = 0,$$

on dérive cette équation on obtient

$$F'(r) + G'(r) = 0 \tag{5.21}$$

De (3) on obtient

$$F'(r) - cG'(r) = rM_g(r),$$

d'où

$$F'(r) - G'(r) = \frac{1}{c} rM_g(r), \tag{5.22}$$

en additionnant (5.21) et (5.22) on trouve

$$2F'(r) = \frac{r}{c} M_g(r),$$

donc

$$F'(r) = \frac{r}{2c} M_g(r)$$

en intégrant on obtient

$$F(r) = \frac{1}{2c} \int_0^r \rho M_g(\rho) d\rho,$$

alors

$$F(r+ct) = \frac{1}{2c} \int_0^{r+ct} \rho M_g(\rho) d\rho.$$

D'autre part, en utilisant (2)

$$F(ct) + G(-ct) = 0,$$

d'où

$$G(-ct) = -F(ct),$$

et par suite pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$ on a

$$G(\alpha) = -F(\alpha),$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned} G(r-ct) &= -F(ct-r) \quad (r < ct) \\ &= -\frac{1}{2c} \int_0^{ct-r} \rho M_g(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} N_u(r,t) &= \frac{1}{2c} [\int_0^{ct+r} \rho M_g(\rho) d\rho - \int_0^{ct-r} \rho M_g(\rho) d\rho] \\ &= \int_{ct-r}^{ct+r} \frac{1}{2c} \rho M_g(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{r \to 0} M_u(r,t) = u(x_0, y_0, z_0, t),$$

on obtient donc

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} M_u(r,t) &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}N_u(r,t)\\ &= \lim_{r\to 0}\frac{N_u(r,t)-N_u(0,t)}{r}\\ &= \frac{\partial N_u(0,t)}{\partial r}.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\frac{\partial N_u(r,t)}{\partial r} = \frac{1}{2c}[(ct+r)M_g(ct+rt)+(ct-r)M_g(ct-r)],$$

d'où

$$\frac{\partial N_u(0,t)}{\partial r} = \frac{1}{2c}[ctM_g(ct,r)+ctM_g(ct,r)] = tM_g(ct).$$

Alors

$u(x_0,y_0,z_0,t) = tM_g(ct,r)$, ce qui montre le premier résultat annoncé.

D'une façon analogue on démontre le dernier résultat. Dans ce cas N_u est la solution de l'équation (5.20) avec les conditions

$$(F_2)\begin{cases} N_u(r,0) = rM_u(r,0) = rM_f(r)\\ N_u(0,t) = 0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}(N_u(r,0) = 0.\end{cases}$$

La solution générale s'écrit sous la forme suivante

$$N_u(r,t) = \frac{1}{2}[(ct+r)M_f(r+ct)-(ct-r)M_f(ct-r),\ \text{pour } ct>r.$$

$$\frac{\partial N_u(r,t)}{\partial r} = \frac{1}{2}[M_f(ct+r)+M_f(ct-r)]]+\frac{1}{2}[(ct+r)M_f'(ct+r)+(ct-r)M_f'(ct-r)],$$

et $u(x_0,y_0,z_0,t) = M_f(ct)+ctM_f'(ct) = \dfrac{d}{dt}[tM_f(ct)]$.

La solution qui vérifie à la fois

$$\begin{cases} u(x,y,z,0) = f(x,y,z)\\ \dfrac{du}{dt}(x,y,z,0) = g(x,y,z),\end{cases}$$

ne peut être que $tM_g(ct)+\dfrac{d}{dt}[tM_f(ct)]$. □

5.2.4 Equation des ondes dans $\mathbb{R}^2$

On considère une fonction indépendante de z et

$$\begin{aligned} u(x_0,y_0,t) &= \frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(x_0+ct\sin\theta\cos\varphi, y_0+ct\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{t}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} g(x_0+ct\sin\theta\cos\varphi, y_0+ct\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

la solution de l'équation dans $\mathbb{R}^3$ telle que $u(x,y,0)=0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=g(x,y)$.
Pour $\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ on pose $\rho = ct\sin\theta$, alors $d\rho = ct\cos\theta d\theta$, $\rho\in[0,ct]$ et
$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{\rho^2}{c^2t^2}} = \dfrac{1}{ct}\sqrt{c^2t^2-\rho^2}$, de sorte que :

$$\begin{aligned} u(x_0,y_0,t) &= \frac{t}{2\pi}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi} g(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)\frac{\sin\theta}{ct\cos\theta}d\rho d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi c}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi} g(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)\frac{\frac{\rho}{ct}}{\frac{1}{ct}\sqrt{c^2t^2-\rho^2}}d\rho d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi c}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi} g(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)\frac{\rho}{\sqrt{c^2t^2-\rho^2}}d\rho d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi c}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi} \rho\frac{g(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)}{\sqrt{c^2t^2-\rho^2}}\rho d\rho d\varphi. \end{aligned}$$

Alors sur le disque $D(x_0,y_0;ct) : |x-x_0|^2+|y-y_0|^2 \leq (ct)^2$, on a la formule suivante

Théorème 5.2.6. ***Formule de Poisson***
La solution de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

telle que

$$\begin{cases} u(x,y,0)=f(x,y) \\ \dfrac{du}{dt}(x,y,0)=g(x,y), \end{cases}$$

est

$$u(x_0,y_0,t) = \tfrac{1}{2\pi c}\iint\limits_{D(x_0,y_0;ct)} \tfrac{g(x,y)}{\sqrt{c^2t^2-[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}}dxdy + \tfrac{\partial}{\partial t}\big[\tfrac{1}{2\pi c}\iint\limits_{D(x_0,y_0;ct)} \tfrac{f(x,y)}{\sqrt{c^2t^2-[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}}dxdy\big].$$

5.3 Equation de la chaleur

Définition 5.3.1. *Dans un espace de dimension 1, l'équation aux dérivées partielles d'ordre 2 :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

s'appelle ***équation de la chaleur****, ou équation de diffusion. La variable t représente alors le temps, les autres variables, les variables d'espace.*

Soit

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t),$$

La fonction $u(x,t) = w(kx,t)$ est solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Remarque 5.3.1. *Nous supposerons désormais $k^2 = 1$ et $t > 0$.*

Théorème 5.3.1. *Une solution de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ telle que : $\lim\limits_{t \to 0^+} u(x,t) = g(x)$ est*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big[-\frac{(x-y)^2}{4t}\big] g(y)dy.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x^2}(\frac{1}{\sqrt{t}} \exp\big[\frac{-(x-y)^2}{4t}\big]) g(y)dy,\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{\sqrt{t}} \exp\big[\frac{-(x-y)^2}{4t}\big]) g(y)dy,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t})(\frac{1}{\sqrt{t}} \exp\big[\frac{-(x-y)^2}{4t}\big]) g(y)dy.
\end{aligned}$$

Pour démonter que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, il suffit de démontrer que :

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t})(\frac{1}{\sqrt{t}} \exp[\frac{-(x-y)^2}{4t}]) = 0.$$

On a d'une part

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{\sqrt{t}} \exp\big[\frac{-(x-y)^2}{4t}\big]) &= \frac{-1}{2t^{3/2}} \exp\frac{-(x-y)^2}{4t} + \frac{(x-y)^2}{4t^2}\frac{1}{\sqrt{t}} \exp\big[\frac{-(x-y)^2}{4t}\big] \qquad (5.23)\\
&= \exp\frac{-(x-y)^2}{4t}(\frac{(x-y)^2}{4t^{5/2}} - \frac{1}{2t^{3/2}}).
\end{aligned}$$

De l'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{\sqrt{t}} \exp\big[\frac{-(x-y)^2}{4t}\big]) &= \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{-2(x-y)}{4t} \exp\big[\frac{-(x-y)^2}{4t}\big] \qquad (5.24)\\
&= \frac{-1}{2t^{3/2}}(x-y) \exp-\frac{(x-y)^2}{4t}.\\
\frac{\partial}{\partial x^2}(\frac{1}{\sqrt{t}} \exp\big[\frac{-(x-y)^2}{4t}\big]) &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{-1}{2t^{3/2}}(x-y) \exp-\frac{(x-y)^2}{4t})\\
&= \frac{-1}{2t^{3/2}}\big[\exp-\frac{(x-y)^2}{4t} + (x-y) - \frac{2(x-y)}{4t} \exp-\frac{(x-y)^2}{4t}\big]\\
&= (\frac{-1}{2t^{3/2}} + \frac{(x-y)^2}{4t^{5/2}}) \exp\frac{-(x-y)^2}{4t}.
\end{aligned}$$

Il résulte de (5.23) et (5.24) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\Big(\frac{1}{\sqrt{t}} exp[\frac{-(x-y)^2}{4t}]\Big) = 0,$$

ce qui donne le résultat du théorème. □

Théorème 5.3.2. *1. Si $|g(y)| \leq Me^{\alpha|y|}$, alors $|u(x,t)| \leq Me^{\alpha^2 t}e^{\alpha|x|}$.*

2. Si g est une fonction continue en x_0 et $|g(y)| \leq Me^{\alpha|y|}$ alors la fonction $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\infty}^{+\infty} exp - \frac{(x-y)^2}{4t} g(y)dy$ est continue en $(x_0, 0)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ t\to 0}} u(x,t) = g(x_0)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &= |\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})g(y)dy| \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})|g(y)|dy \\
&\leq \frac{M}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})e^{\alpha|y|}dy,
\end{aligned}$$

or $|y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x|$ d'où

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq \frac{M}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})\exp\alpha|y-x|e^{\alpha|x|}dy \\
&\leq \frac{Me^{\alpha|x|}}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\big[-(\frac{x-y}{2\sqrt{t}})^2 + 2\alpha\sqrt{t}\frac{|y-x|}{2\sqrt{t}}\big]dy.
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable : $\xi = \dfrac{y-x}{2\sqrt{t}},\ d\xi = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dy.$

$$|u(x,t)| \leq \frac{Me^{\alpha|x|}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} exp[-\xi^2 + 2\alpha\sqrt{t}|\xi|]d\xi,$$

mais comme la fonction $\xi \to exp(-\xi^2 + 2\alpha\sqrt{t}|\xi|)$ est paire, alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\xi^2 + 2\alpha\sqrt{t}|\xi|)d\xi = 2\int_{0}^{+\infty}\exp(-\xi^2 + 2\alpha\sqrt{t}|\xi|)d\xi,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq \frac{2Me^{\alpha|x|}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\exp[-\xi^2 + 2\alpha\sqrt{t}|\xi|]d\xi \\
&\leq \frac{2Me^{\alpha|x|}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\exp[-(\xi^2 - 2\alpha\sqrt{t}|\xi| + \alpha^2 t - \alpha^2 t)]d\xi \\
&\leq \frac{2Me^{\alpha|x|}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\exp[-(\xi - \alpha\sqrt{t})^2 e^{\alpha^2 t}]d\xi \\
&\leq \frac{2Me^{\alpha|x|}e^{\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\exp-(|\xi| - \alpha\sqrt{t})^2 d\xi.
\end{aligned}$$

On pose $u = \xi - \alpha\sqrt{t}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp -(|\xi| - \alpha\sqrt{t})^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$$

ce qui donne que

$$|u(x,t)| \leq M e^{\alpha|x|} e^{\alpha^2 t},$$

ce qui achève la démonstration.

2- On a :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4t}) g(y) dy.$$

On pose : $\xi = \dfrac{y-x}{2\sqrt{t}}$, donc $d\xi = \dfrac{dy}{2\sqrt{t}}$ et

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} g(2\sqrt{t}\xi + x) d\xi$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} g(2\sqrt{t}\xi + x) d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} g(x_0) d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} g(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \\
&= g(x_0).
\end{aligned}$$

□

La résolution analytique : On cherche une fonction u telle que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } 0 < x < l \text{ et } t > 0, \qquad (E)$$

avec

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, \qquad (F)$$

et

$$u(x,0) = f(x). \qquad (I)$$

Soit $u(x,t) = X(x)T(t)$, (E) s'écrit $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$, (F)...$X(0)T(t) = 0$, $X(l)T(t) = 0$, et nous savons que X et T sont solutions des problèmes suivants $X''(x) = \lambda X(x)$, $X(0) = 0$, $X(l) = 0$

et $T'(t) = \lambda T(t)$.

Le premier problème :

1. $\lambda = 0 : X(x) = ax + b$,

   $X(0) = 0 \Rightarrow b = 0$,

   $X(l) = 0 \Rightarrow al = 0 \Rightarrow a = 0$,

   alors $X \equiv 0$ n'est pas une fonction propre.

2. $\lambda > 0 : \lambda = \omega^2, \omega \neq 0$ l'équation caractéristique $r^2 = \omega^2$.

   $X(x) = Ach\omega x + Bsh\omega x$,

   $X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$,

   $X(l) = 0 \Rightarrow Bsh\omega l = 0 \Rightarrow B = 0$, donc $X \equiv 0$ et $\lambda > 0$ n'est pas valeur propre.

3. $\lambda < 0$, $\lambda = -\gamma^2, \gamma > 0$: l'équation caractéristique $r^2 = -\gamma^2 = (i\gamma)^2$.

   $X(x) = A\cos\gamma x + B\sin\gamma x$,

   $X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$,

   $X(l) = 0 \Rightarrow B\sin\gamma l = 0 \Rightarrow \gamma l = n\pi \Rightarrow \gamma = \frac{n\pi}{l}$.
   Les valeurs propres sont $\lambda_n = \dfrac{-n^2\pi^2}{l^2}$, $n \geq 1$ et les fonctions propres sont
   $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x$, $n \geq 1$ forment une base orthonormée de $L^2[0, l]$.

Le deuxième problème : $T_n'(t) = \lambda_n T_n(t) \Leftrightarrow T_n(t) = k_n e^{\lambda_n t} = k_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}$.

$$\begin{aligned}
u_n(x,t) &= k_n\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}xe^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t},\\
u(x,t) &= \sum_{n\geq 1} k_n\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}xe^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}.\\
u(x,0) &= \sum_{n\geq 1} k_n\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x = f(x)\\
\sum_{n\geq 1} k_n X_n(x)X_m(x) &= f(x)X_m(x),\\
\sum_{n\geq 1} k_n\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx &= \int_0^l f(x)X_m(x)dx,
\end{aligned}$$

ce qui entraine

$$\sum_{n\geq 1} k_n\langle X_n, X_n\rangle_{L^2[0,l]} = \langle f, X_n\rangle_{L^2[0,l]},$$

on obtient

$$k_n = \int_0^l f(x)X_n(x)dx = \int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} f(x)dx,$$

par conséquent

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n\geq 1} k_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} (\int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} y f(y)dy) \\ &= \sum_{n\geq 1} k_n \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} (\int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} y f(y)dy). \end{aligned}$$

5.4 Exercices

Exercice 1 Résoudre les problèmes de Sturm-Liouville

1°)

$$-\frac{d^2f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0, \text{ avec : } f(0) = 0 \text{ et } \frac{df}{dx}(\pi) = 0.$$

– Donner une base orthonormée de $L^2[0, \pi]$.

2°) $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0$, avec : $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$.

Exercice 2 Résoudre le problème périodique de Sturm-Liouville :

$\dfrac{d^2f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0$, avec : $f(0) = f(2\pi)$ et $\dfrac{df}{dx}(0) = \dfrac{df}{dx}(2\pi)$.

Exercice 3 Résoudre par séparation des variables le problème suivant :

(E) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ pour $0 < x < 1$ et $0 < t$.

(F) $u(0,t) = 0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(1,t) + u(1,t) = 0$.

(I) $u(x,0) = f(x)$, f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f(0) = 0$ et $f'(1) + f(1) = 0$, $f \neq 0$.

Exercice 4

1. En effectuant le changement de variable $x = e^t$, résoudre le problème de Sturm-Liouville :

$$x^2\frac{d^2X}{dx^2}(x) + 3x\frac{dX}{dx}(x) + \lambda X(x) = 0,$$

   $\lambda = c^{te}$, avec : $X(1) = 0$ et $X(e) = 0$.

2. Donner une base orthonormée de $L^2_x[1, e]$.

3. Résoudre par la méthode de séparation des variables l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3x\frac{\partial u}{\partial x},$$

$1 < x < e,\ t > 0$ avec les conditions aux limites :

$u(1,t) = 0,\ u(e,t) = 0,\ t > 0$, et les conditions initiales :

$u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x),\ f$ étant continue, $1 < x < e$.

Annexe

A1 **: Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$**

Définition 5.4.1. *Soit $k \in \mathbb{N}$, et soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite :*

1. *de classe $\mathcal{C}^k$ si f est k fois continûment différentiable sur Ω,*
2. *de class $\mathcal{C}^\infty$ si f est indéfiniment différentiable sur Ω.*

A2 **: Séries de fonctions**

Définition 5.4.2. *On appelle série de fonctions et on note $\sum f_n$, une série dont les termes sont des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toutes définies sur une partie Δ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \Delta$, la suite de fonctions $(S_n)_n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

Convergence simple

Définition 5.4.3. *On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur Δ vers la fonction S si*

$$\forall t \in \Delta,\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(t) = S(t).$$

Convergence uniforme

Définition 5.4.4. *On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur Δ vers f si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\Delta} (\sum_{k=0}^{n} f_k(t) - S(t)) = 0$$

Convergence normale

Définition 5.4.5. *Soit* $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ *une suite de fonctions définies sur* Δ. *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge normalement s'il existe une série numérique* $\sum u_n$ *convergente telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \Delta : |f_n(t)| \leq u_n.$$

Théorème 5.4.1. *Si* $\sum f_n$ *converge uniformément alors* $\sum f_n$ *converge simplement.*
Si $\sum f_n$ *converge normalement alors* $\sum f_n$ *converge uniformément.*

A3 : Espace $L^2[a,b]$ **- Espace** $L^2_S[a,b]$: Soit $[a,b]$ un intervalle (borné ou non) de $\mathbb{R}$.

Définition 5.4.6. *On note* $L^2[a,b]$ *l'espace vectoriel des classes d'équivalence pour l'égalité presque partout des fonctions telles que :*

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

La quantité $\langle f.g \rangle_{L^2[a,b]} = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx$ *est un produit scalaire sur cet espace qui est complet pour la norme associée et est ainsi un espace de Hilbert.*
On définit la convergence en moyenne quadratique par rapport à S *ainsi* $f_n \to f$ *dans* $L^2[a,b]$ *si* $\|f_n - f\|^2_{L^2[a,b]} = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx$ *tend vers zéro.*

Définition 5.4.7. *Soit* S *une fonction strictement positive sur* $[a,b]$. *On note* $L^2_S[a,b]$ *l'espace vectoriel des classes d'équivalence pour l'égalité presque partout des fonctions telles que :*

$$\int_a^b |f(x)|^2 S(x) dx < \infty.$$

La quantité $\langle f.g \rangle_{L^2_S[a,b]} = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)S(x)dx$ *est un produit scalaire sur cet espace qui est complet pour la norme associée et est ainsi un espace de Hilbert.*
On définit la convergence en moyenne quadratique par rapport à S *ainsi* $f_n \to f$ *dans* $L^2_S[a,b]$ *si* $\|f_n - f\|^2_{L^2_S[a,b]} = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 S(x) dx$ *tend vers zéro.*

A4 : Séries de Fourier :

1. La suite de fonctions $R_0 = \frac{1}{\sqrt{T}}, S_1 = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}, ..., S_n = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi n t}{T}, ..., C_1 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T}, ...,$ $C_n = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi n t}{T}...$ est une base de $L^2[0,T]$.
2. Soit $g \in L^2(0,T)$ et $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T g(u)du, a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(u)\cos\frac{2\pi n u}{T}du, b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(u)\sin\frac{2\pi n u}{T}du.$
   Les nombres $a_0, a_n, ..., b_n...$ s'appellent coefficients de Fourier de g.
   $g_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^p a_n \cos\frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin\frac{2\pi n t}{T}$ est la meilleure approximation au sens des moindres carrés de g par une fonction linéaire des sinus et cosinus jusqu'à l'indice p inclus.

3. $\lim_{p\to\infty} \|g - g_p\|_2 = 0$ c'est à dire $g = \lim_{p\to\infty} g_p$ dans $L^2[0,T]$ ce qu'on note

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{p} a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}.$$

Remarque 5.4.1. *On sait qu'à toute fonction définie sur* $[0,T]$ *on peut faire correspondre une fonction périodique de période* T *sur* $\mathbb{R}$ *et qu'on peut appliquer le développement précédent dit développement en série de Fourier.*

A5 : Valeurs propres des opérateurs linéaires

1. Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace vectoriel de fonctions E, on appelle valeur propre de A un nombre μ tel qu'il existe une fonction f de E, non identiquement nulle, vérifiant $Af = \mu f$. On dit que f est une fonction propre associée à la valeur propre μ.

2. On dit que μ est valeur propre simple si toutes les fonctions propres associées à μ sont proportionnelles.

   On dit que c'est une valeur propre de multiplicité k si les fonctions propres associées forment un espace vectoriel de dimension k.

   On dit que μ est de multiplicité infinie si l'espace vectoriel des fonctions propres est de dimension infinie.

A6 : Résolution de l'équation $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$ - Facteur intégrant

Définition 5.4.8. *Soient* A *et* B *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *dans un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$*. On appelle facteur intégrant de l'équation*

$$A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0, \tag{E}$$

une fonction μ *telle que :* $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu A) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu B)$.

Cas particulier : $\dfrac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial B}{\partial x}(x,y)$.

- Lorsque $\dfrac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial B}{\partial x}(x,y)$ toutes les constantes sont des facteurs intégrants.
- $H(x,y) = \int_{x_0}^{x} A(u,y)du + \int_{y_0}^{y} B(x_0,v)dv$, $H(x,y) = 0$ définit une solution de l'équation (E) passant par le point de Ω de coordonnées (x_0, y_0).

Cas général : $\dfrac{\partial A}{\partial y}(x,y) \neq \dfrac{\partial B}{\partial x}(x,y)$.

Si $\dfrac{\partial A}{\partial y}(x,y) \neq \dfrac{\partial B}{\partial x}(x,y)$ il faut trouver un facteur intégrant.

Théorème 5.4.2. *Soient A et B deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.*

1. *Toute solution μ de l'équation linéaire $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu A) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu B)$ qui s'écrit aussi $B(x,y)\dfrac{\partial \mu}{\partial x} - A(x,y)\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(x,y)(\dfrac{\partial A}{\partial y} - \dfrac{\partial B}{\partial x})$ est un facteur intégrant.*
2. *Si μ_0 est un facteur intégrant, à tout autre facteur intégrant μ est associée une fonction H qui définit implicitement une solution de l'équation (E) telle que*

$$\mu(x,y) = \mu_0(x,y)H(x,y).$$

Soit μ un facteur intégrant, alors

$$H(x,y) = \int_{x_0}^{x} \mu(u,y)A(u,y)du + \int_{y_0}^{y} \mu(x_0,v)B(x_0,v)dv,$$

définit la solution de (E) qui passe par le point (x_0, y_0).
Soit $B(x,y)\dfrac{\partial \mu}{\partial x} - A(x,y)\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(x,y)(\dfrac{\partial A}{\partial y} - \dfrac{\partial B}{\partial x})$ l'équation des facteurs intégrants, soit u une intégrale première dépendant de μ du système caractéristique

$$\frac{dx}{B} = \frac{-dy}{A} = \frac{d\mu}{\mu(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x})}. \tag{S}$$

$u(x,y,\mu) = k$ définit pour chaque valeur de la constante k un facteur intégrant.

Exemple 5.4.1. *Résoudre $(x+y)dx + dy = 0$.*

Solution *On remarque que $\dfrac{\partial A}{\partial y} = 1 \neq \dfrac{\partial B}{\partial x} = 0$, il faut chercher un facteur intégrant μ solution de $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu(x+y)) = \mu + (x+y)\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu}{\partial x}$ le système caractéristique est*
$\dfrac{dx}{1} = -\dfrac{dx}{x+y} = \dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{d\ln|\mu|}{1} = \dfrac{dx - d\ln|\mu|}{0}$ donc $x - \ln|\mu|$ est une intégrale première : $x - \ln|\mu| = 0$ définit donc un facteur intégrant soit $\mu = e^x$.
Il faut alors résoudre $e^x(x+y)dx + e^x dy = 0$; la solution qui passe par $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ est

$$\int_0^x e^u(u+y)du + \int_0^y dv = (x+y-1)e^x + 1.$$

Les solutions sont définies par $(x+y-1)e^x = k$ ou $y = 1 - x + ke^{-x}$.

On vérifie immédiatement que $dy = -dx - ke^{-x}dx = (y+x)dx$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *K. Baddari et A. Abbassov, Equations de la physique mathématique appliquée, OPU ; 2009.*

[2] *J. Bass, Cours de Mathématiques, tome 2 : Equations différentielles et aux dérivées partielles, optimisation, Dunod, 1978.*

[3] *J. D. Jackson, Electrodynamique classique, Dunod, Paris, 2001.*

[4] *A. Martin, Exercices résolus, équations aux dérivées partielles, Dunod, Paris, 1991.*

[5] *P. M. Morse, and H. Feshbach, Methods of theoretical physics, 2 volumes, New York, McGraw-Hill, 1953.*

[6] *V. Nikolenko, Equations de la physique mathématique, UM. Moscou. 1981.*

[7] *V. P. Pikulin, and S. I. Pohozaev, Equations in mathematical physics : A practical course. Birkhäuser Verlag, 2001.*

[8] *Y. Pinchover and J. Rubinstein, An introduction to partial differential equations, Cambridge, UK, 2005.*

[9] *H. Reinhard, Equations aux dérivées partielles, Dunod, Paris, 2001.*

[10] *W. A. Strauss, Partial differential equations, Wiley, New York, 2007.*