

# Chapitre 1 : géométrie des images

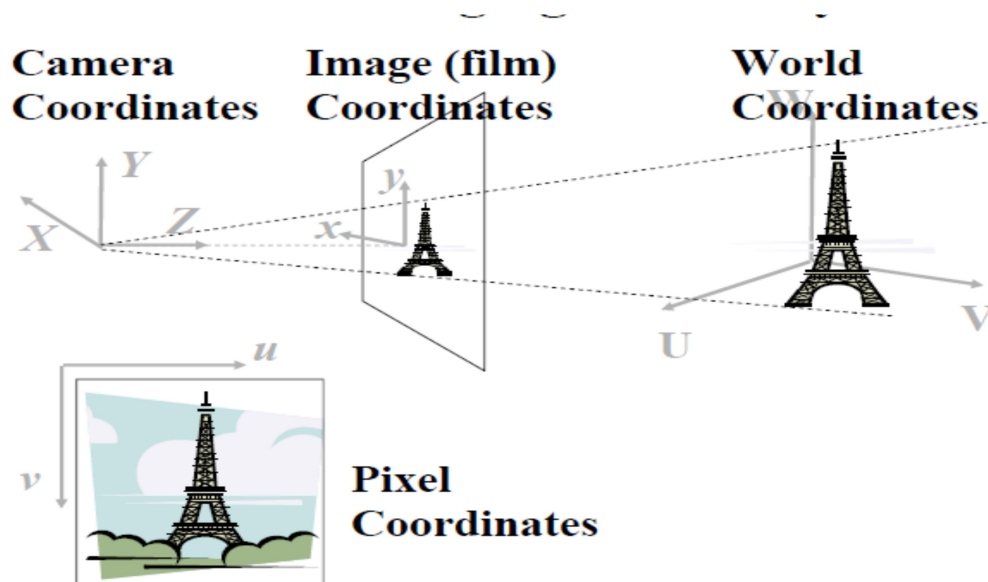
## 1.1.Introduction

Dans ce chapitre nous allons d'écrire le modèle géométrique associée au processus de saisie d'image à l'aide d'une caméra. Ce modèle est caractérisé par un certain nombre de paramètres que nous allons estimer par l'étalonnage (ou calibration ou calibrage). Les paramètres d'une caméra ou paramètres **intrinsèques** seront estimés en même temps que les paramètres **extrinsèques** soit les paramètres qui lient un repère associé à la caméra au repère associe à objet étalon.

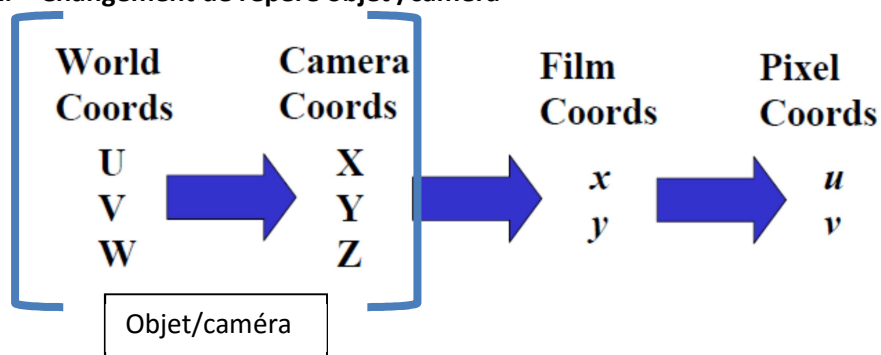
## 1.2. Le modèle géométrique d'une image

Nous allons caractériser le modèle d'une caméra à l'aide de deux transformations.

- Une projection qui transforme un point de l'espace 3D en un point image 2D
- et une transformation d'un repère métrique lié à la caméra à un repère liée à l'image.



### 1.2.1. Changement de repère objet /caméra



$R_c$  : repère caméra,  $R_w$  : repère lié à l'objet

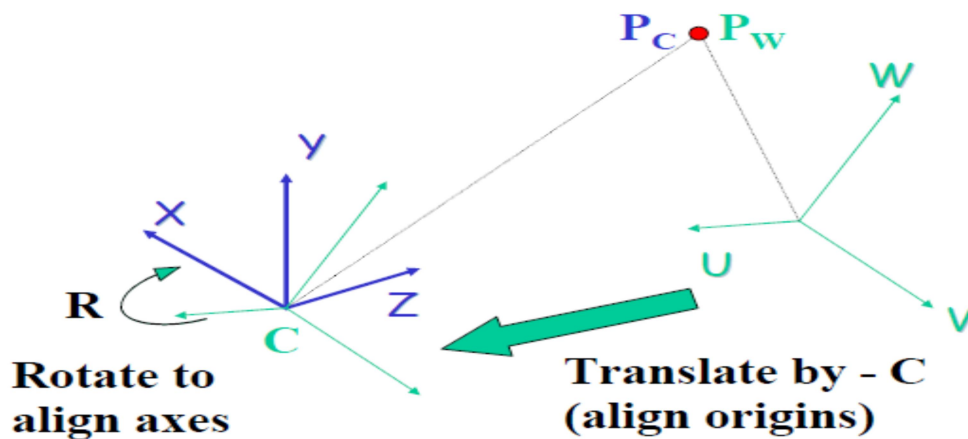
$P_c$  et  $P_w$  représentent le même point physique décrit dans deux repères différents

$$\begin{aligned} P_c &= R(P_w - C) \\ &= RP_w - RC \end{aligned}$$

$$P_c = RP_w + T$$

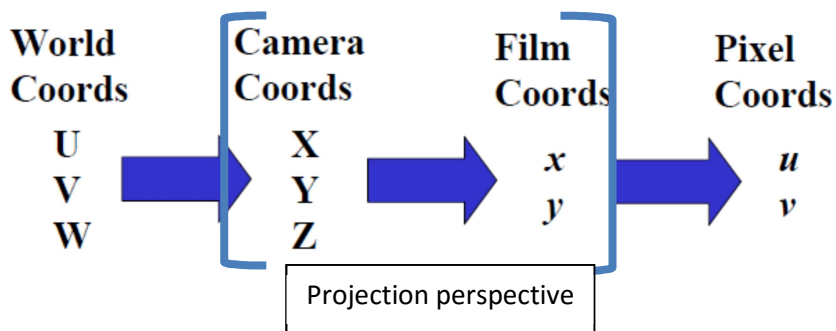
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -c_x \\ 0 & 1 & 0 & -c_y \\ 0 & 0 & 1 & -c_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ 1 \end{pmatrix}$$



### 1.2.2. Changement de repère camera/film image

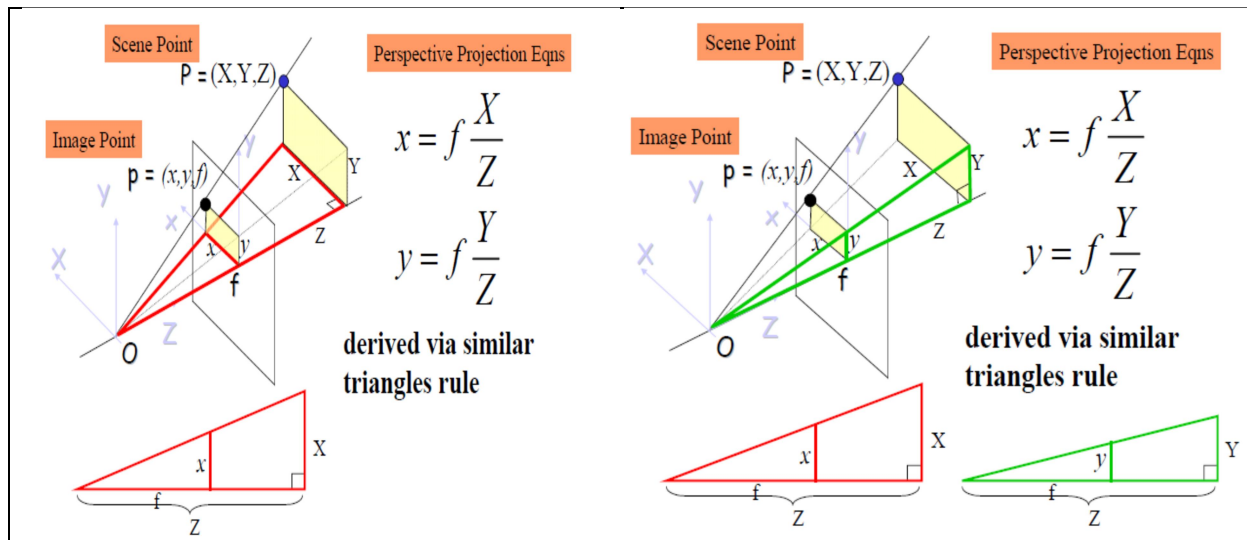
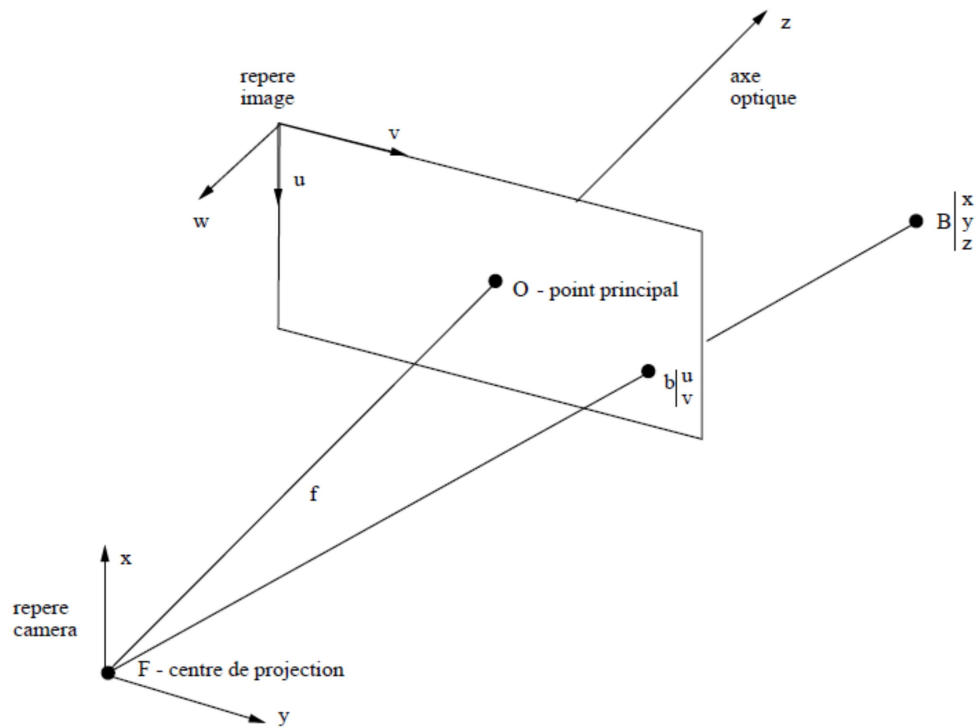
#### La projection perspective



Soit un point O dans le plan image appelé point principal et soit une droite perpendiculaire au plan image passant par O, l'axe optique. Soit un point F placé sur l'axe optique à une distance  $f$  du plan image. Le point F est le centre de projection et  $f$  est la *distance focale*. On peut placer le centre de projection devant ou derrière le plan image, dans ce qui suit nous allons le placer derrière comme sur la figure suivante.

Un point B (P) se projette dans le plan image le long d'une droite passant par B et F. Choisissons un système de coordonnées attaché à la caméra : le plan xy de ce repère est parallèle au plan image et l'axe des z est confondu avec l'axe optique. L'origine de ce repère se trouve en F

Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  les coordonnées du point B (P) dans ce repère, les coordonnées de la projection de B dans le plan image sont



$$x = f \frac{X}{Z} \quad y = f \frac{Y}{Z}$$

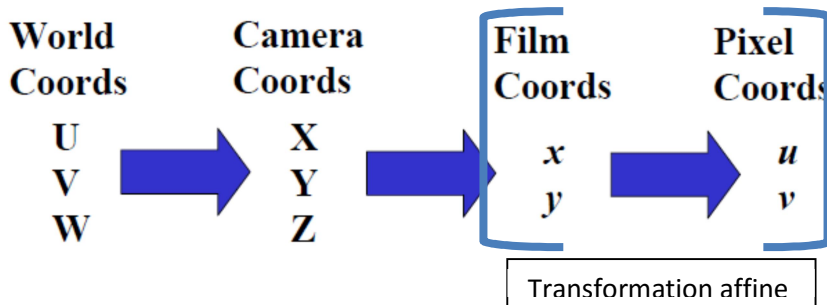
En coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} sx \\ sy \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} sx \\ sy \\ sz \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

La représentation homogène introduit un facteur multiplicatif  $s$  lors de passage 3D à 2D

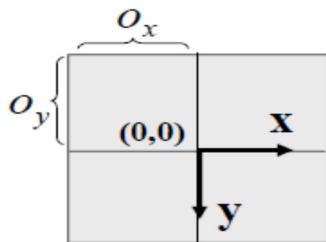
### 1.2.3. Changement de repère film/image

Transformation affine

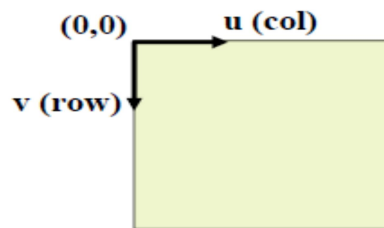


Il est nécessaire d'inclure la différence de pas selon les coordonnées  $x, y$  relatives à la forme élémentaire sur la camera

film plane  
(projected image)



pixel array



$$u = \frac{x}{d_x} + u_0$$

$$v = \frac{y}{d_y} + v_0$$

(sur la figure  $u_0 \rightarrow O_x, v_0 \rightarrow O_y$ )

$u_0, v_0$  : les coordonnées en pixel dans l'image de l'intersection de l'axe optique et du plan image (origine du changement de repère)

$d_x, d_y$  : sont les dimensions selon  $x, y$  respectivement d'un pixel élémentaire de la camera

Donc :

$$\begin{pmatrix} su \\ sv \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_x} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{d_y} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sx \\ sy \\ s \end{pmatrix}$$

- **Expression générale**

Le système complet de formation de l'image s'exprime :

$$\begin{pmatrix} su \\ sv \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_x} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{d_y} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u_0, v_0, d_x, d_y, f$  sont appelés les paramètres intrinsèques de calibrage, ils sont propres au système d'acquisition (caméra)

$r_{11} \dots r_{33}, t_x, t_y, t_z$  sont appelés les paramètres extrinsèques, ils donnent la localisation de l'étalon dans le repère de la camera au moment de la prise de vue

$$\begin{pmatrix} su \\ sv \\ s \end{pmatrix} = M_{int} M_{ext} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ 1 \end{pmatrix} = M_{(3 \times 4)} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ 1 \end{pmatrix}$$

M : matrice de calibrage du système, elle comporte 12 éléments

$$\bullet \quad M_{int} = \begin{pmatrix} \frac{f}{d_x} & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{d_y} & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 5 \text{ parametres intrinseques}$$

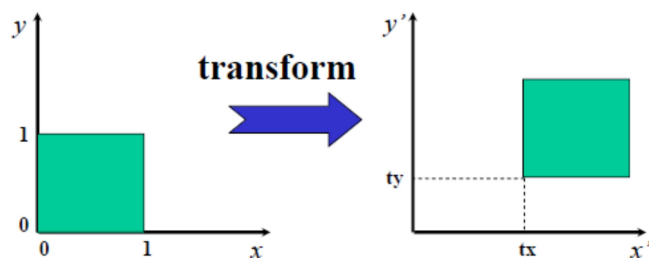
En posant :  $f_x = \frac{f}{d_x}$  et  $f_y = \frac{f}{d_y}$

$\frac{f_x}{f_y} = \frac{d_x}{d_y}$  : rapport pixel fourni par le constructeur

- 12 parametres extrinseques : 9 pour la rotation ( $r_{11} \dots r_{33}$ ) et 3 pour la translation  $t_x, t_y, t_z$  independants de la camera

### ➤ Remarques importantes

- En coordonnées homogènes, une translation est exprimée par :



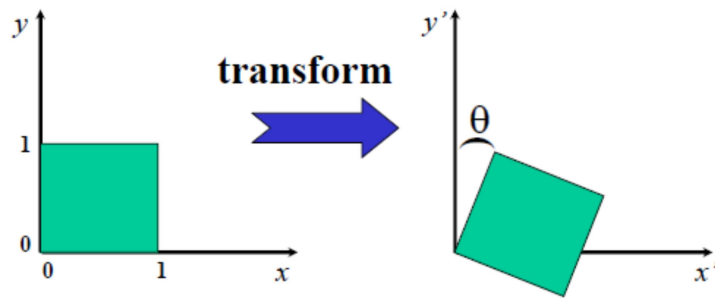
$$\begin{aligned} x' &= x + t_x \\ y' &= y + t_y \end{aligned}$$

**equations**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

**matrix form**

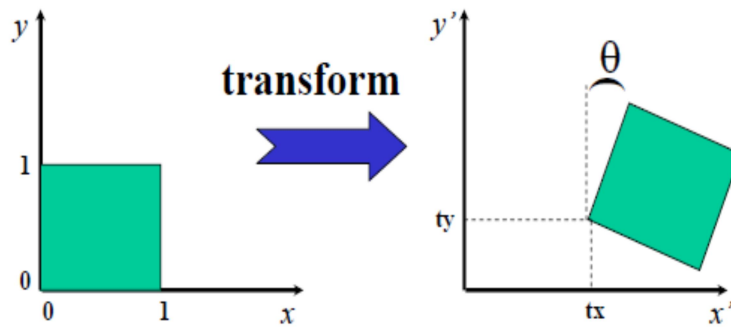
- Une rotation en coordonnées homogènes :



$$\begin{aligned} x' &= x_i \cos \theta - y_i \sin \theta \\ y' &= x_i \sin \theta + y_i \cos \theta \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

**equations** **matrix form**

- Une rotation + translation en coordonnées homogènes



$$\begin{aligned} x' &= x_i \cos \theta - y_i \sin \theta + t_x \\ y' &= x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + t_y \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & t_x \\ \sin \theta & \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

**equations** **matrix form**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & t_x \\ \sin \theta & \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overset{2x1}{p'} \\ \overset{1x1}{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{2x2}{R} & \overset{2x1}{t} \\ \overset{1x2}{0} & \overset{1x1}{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{2x1}{p} \\ \overset{1x1}{1} \end{bmatrix}$$

$$p' = Rp + t$$

- En coordonnées homogènes :

$$(x, y) = (x, y, 1) = (2x, 2y, 2) = (sx, sy, s)$$