CHAPITRE I : OBJET DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

1.1. Introduction

La théorie de la mécanique des milieux continus est définis comme une branche des sciences de l'ingénieur et des sciences physique qui étudie l'état d'équilibre ou de mouvement des corps qui sont sujet à l'action des forces extérieures ou intérieures des corps à l'échelle microscopique ou macroscopique. Elle peut aussi étudier la mécanique des systèmes de masses ponctuelles, leur mouvement, leur vitesse et leur accélération sous l'effet des forces, des mouvements ou des déformations.

En effet, la mécanique des milieux continus peut être défini comme une branche des sciences fondamentales qui concerne l'état d'équilibre ou le mouvement des corps qui sont sujet à l'action des contraintes. Elle concerne l'étude et l'analyse des structures mécaniques, le dessin et le concept des machines, la mécanique des fluides, l'aérodynamique ainsi que l'instrumentation électrique et le comportement moléculaire et atomique des éléments. Pour ce fait, la théorie des milieux continus fait intervenir des connaissances mathématiques plus complexe que l'on nomme tenseur pour les forces et contraintes, et distributeur pour les vitesses et accélérations.

1.2. Objet de la mécanique des milieux continus

La mécanique des milieux continus permet de représenter théoriquement l'état de contraintes et les forces internes qui s'exercent dans un milieu à l'état statique comme à l'état dynamique. Ces corps peuvent être solides ou liquides. Le milieu continu est défini comme un domaine donné à un instant (t) par rapport à un système cartésien (XYZ) ou ($X_1X_2X_3$) où il existe dans son voisinage un distribution de matière dont les propriétés

physiques qui est d'abord la masse volumique (ρ) est une fonction continue et différentiable par rapport au repère de coordonnées. En conséquence, lorsqu'on connaît l'état initial de ce corps, il est recommandé de définir son état ou son mouvement à un autre instant (t_1) et par rapport à un autre système de coordonnée ($X^{'}Y^{'}Z^{'}$) ou ($X_1^{'}$ $X_2^{'}$ $X_3^{'}$), d'où les descriptions Lagrangienne et Eulérienne du corps par rapport au système original et système final respectivement avec une conservation de masse au cours du temps, d'où l'équation de continuité du milieu continu. Les états de description de se corps se basent essentiellement sur la théorie des tenseurs.

1.3. Les différent axes de la mécanique des milieux continus

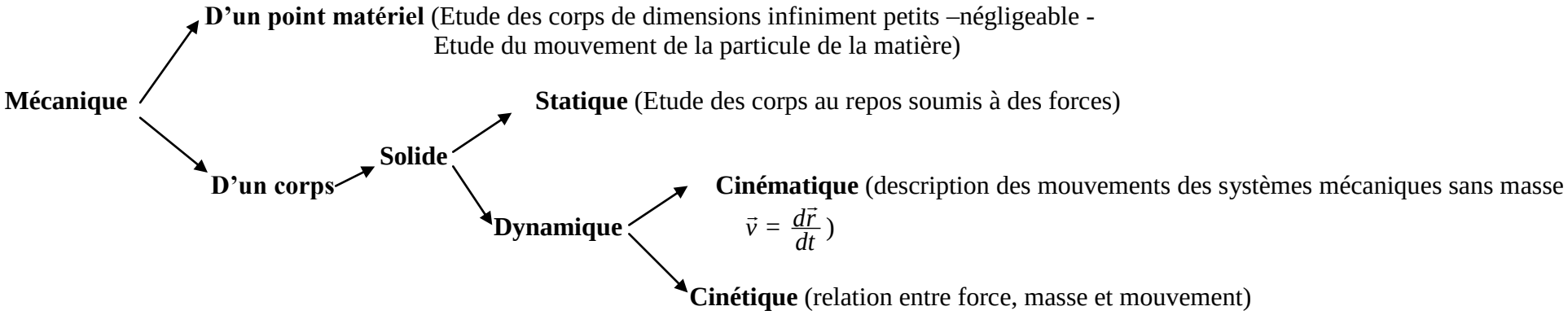
En générale la théorie de la mécanique des milieux continus peut toucher plusieurs domaines dans les sciences technique et physique spécialement la mécanique. Cette dernière peut être divisée en trois thèmes de sciences et technologie suivant les caractéristiques des problématiques considérés et qui se résument en :

a) La mécanique du point matériel, où les dimensions du corps peuvent être négliger en étudiant son mouvement ou son équilibre.
b) La mécanique des corps solides où on peut négliger les déformations durant l'étude du mouvement de ces corps ou durant leur équilibre. Cette étude est habituellement subdivisée en deux parties : la statique et la dynamique. La statique consiste en l'étudie des conditions d'équilibre des corps au repos soumis à l'action des forces. Tandis que la dynamique étudie les lois de mouvement des corps sous l'action des forces extérieures. Cette dernière traite aussi les méthodes géométriques décrivant les mouvements des systèmes mécaniques sans prendre en considération les forces ou les masses causant ce

mouvement (v = dr/dt), c'est à dire la cinématique et elle étudie aussi les relations entre les forces, la masse et le mouvement des corps, c'est à dire la cinétique.

c) La mécanique des corps déformables qui consiste en l'étude du comportement ou du mouvement des corps solides, liquides ou gaz. La mécanique des corps solides déformables étudie la théorie de l'élasticité et la plasticité de ces corps. Concernant l'élasticité, un corps solide soumit à des forces extérieures se déforme mais sa constitution intérieure revient à sa position initiale quand la force est supprimée (résistance des matériaux). Tandis que pour la plasticité la constitution du corps ne revient pas à sa position initiale une fois que la force est supprimée. Parmi ces matériaux on rencontre souvent les matériaux isotropes, orthotropes et les matériaux composites. Par ailleurs la mécanique des corps liquides déformables étudie la théorie de la mécanique des fluides où leur constitution moléculaire se déforme durant leur déplacement. Dans ce contexte il existe plusieurs types de fluides : les fluides compressibles et incompressibles, la thermodynamique, la gazo-dynamique, l'aérodynamique et les turbulences…

Ceci est schématisé explicitement par le tableau suivant :



Corps déformable :

- **corps élastique** (se déforme mais revient à sa position initiale quand les forces sont supprimées)
- **corps plastique** (ne revient pas à sa position initiale quand les forces sont supprimées)
- **corps transformable** (sa constitution moléculaire et sa forme change durant son déplacement)

<u>Exemples</u> : - Mécanique des Fluides

- **Fluide compressible**
- **Fluide incompressible**
- **Thermodynamique**
- **Gazodynamique**
- **Aérodynamique**
- **Turbulence**

1.4. Le contenu du cours

Le contenu de ce cours se base essentiellement sur une théorie générale des calculs tensoriels afin de surmonter certaines difficultés mathématiques et de donner un large aperçu des principales méthodes de la mécanique de milieux continus, dont la connaissance est indispensable à l'ingénieur. En se basant sur cette théorie tensorielle l'analyse des déformations et des contraintes sont étudiées par rapport à différents repères : repère de référence initial et repère après déformation. En conséquence, le tenseur de déformation de Lagrange (par rapport au système original) et le tenseur d'Euler (par rapport au système après déformation) seront déterminés en équations différentielles tensorielles élémentaires. L'analyse des déplacements des fibres uniques des corps continus seront aussi déterminés et analysés.

Par ailleurs, les tenseurs de déformations et de contraintes dans un milieu élastique seront aussi étudiés et déterminées en se basant sur l'expansion de Taylor. Ces relations contraintes – déformations sont liés par des lois appelées lois de comportement mécanique pour différents matériaux qui sont généralement étudiées de point de vue macroscopique ou macro mécanique en considérons le matériau autant qu'un élément par la mécanique des milieux continus homogènes et anisotropes. Le comportement mécanique de tel matériau est différent en un point, dans toutes les directions le matériau anisotrope ne possède pas alors de plan de symétrie sous l'action d'une sollicitation donnée, un tel solide devient le siége d'un champ de contraintes et de déformation.

Parmi les lois utilisées, la plus utilisée est la loi de Hooke généralisée uni et tridimensionnelle qui est appliquée pour obtenir le tenseur des contraintes en fonction du tenseur de déformation en relation avec le tenseur de rigidité généralisé. Ce dernier caractérise les caractéristiques élastiques du matériau qui sont l'orthotrope, l'anisotrope et l'isotrope .

En général, ce cours contient donc cinq chapitres. Le premier chapitre présente les objectifs principaux de la mécanique des milieux continus et ces applications

dans le domaine de la mécanique. Le deuxième chapitre présente les différents éléments de calcul tensoriel utilisés dans les milieux continus où les principaux théorèmes mathématiques utilisés dans ce cours sont démontrés. Le chapitre trois étudie les tenseurs de déformations de Lagrange et d'Euler en fonction des variables initiales et finales respectivement ainsi qu'en fonction des vecteurs de déplacements. Le chapitre quatre présente des applications pour différents types de corps continus où les différents de tenseurs de déformations, de déplacements et de rotations ont été déterminés. Le chapitre cinq consiste en une analyse des contraintes à l'état statique des forces et des moments appliqués sur le corps. Dans le chapitre six, la loi de Hooke généralisée pour les corps uni et tridimensionnel a été déterminée pour différents types de matériaux : orthotropes, anisotropes et parfaitement isotropes.

CHAPITRE II : ELEMENTS DES CALCULS TENSORIELS

2.1. Généralités :

Les lois de la mécanique des milieux continus s'écrivent avec beaucoup d'aisance lorsqu'on utilise la notation tensorielle. Ces lois se résument essentiellement en la loi de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment et de l'énergie. Elles sont invariantes vis à vis du système de référence choisi pour les exprimer. En effet le tenseur est décrit par un groupe de fonctions numériques ordonnées par rapport à un système de coordonnées de telle sorte qu'il est possible de définir des relations mathématiques entre ces fonctions et le système. Il est donc utile de donner une introduction sur les notations des espaces vectoriels et de base utilisant la notation indicielle qui garantit l'invariance de leur loi lors d'un changement de repère. Pour cela on définira un scalaire, un vecteur et un tenseur d'ordre n ainsi que les symboles de substitution et de permutation.

2.2. La Notation Indicielle

2.2.1. Convention de la Sommation :

Considérons un groupe d'éléments constitué de n composants sous la forme : $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Ce groupe d'élément ou set peut être écrit utilisant la notation indicielle comme :

x_i , avec i = 1- n ; où i est appelé comme indice libre.

Si maintenant on considère un autre groupe d'élément sous la forme d'une sommation définit par une suite (S) comme suit :

$$S = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n$$

Cette suite peut être écrite sous une forme plus compacte utilisant aussi la notation indicielle et la convention de la sommation comme :

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

Comme elle peut être aussi écrite d'une façon plus courte en utilisant la convention de la sommation appelée la « convention d'Einstein » et qui est défini comme suit :

$$S = a_k x_k \; ; \; k = 1,n \qquad (2.1)$$

Où k est appelé indice répétitif.

<u>Remarques</u> :

- Il est à noter que les indices répétitifs sont formulés par binôme et que les expressions ayant trois indices répétitifs telle que $a_i x_i y_i$ ne sont pas permises que lorsque le signe de la sommation est utilisé, c'est à dire :

  $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i$$

- Aussi il est à noter que l'égalité n'influx pas sur la notation indicielle c'est à dire :

  $a_i x_i = a_j x_j = a_k x_k$

- La convention de la sommation peut être clairement utiliser pour exprimer la double et la triple sommation et autres.

Exemples :

Exemple 1 :

Si on une double sommation de la forme :

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_{ij} X_i Y_j$$

Elle peut être écrite d'une façon simplifier utilisant la convention de la sommation comme suit :

$$A_{ij} X_i Y_j \quad , \; i = 1,3 \text{ et } j = 1,3$$

Explicitement l'équation 1.5 peut être écrite sous la forme :

$$A_{11}X_1Y_1 + A_{12}X_1Y_2 + A_{13}X_1Y_3 + A_{21}X_2Y_1 + A_{22}X_2Y_2 + A_{23}X_2Y_3 + A_{31}X_3Y_1 + A_{32}X_3Y_2 + A_{33}X_3Y_3$$

Exemple 2 :

Si on une triple sommation de la forme :

$$\sum_{I=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} A_{ijk} X_i Y_j Z_k$$

elle peut être écrite utilisant la notation indicielle comme :

$$A_{ijk} X_i Y_j Z_k \quad , \quad i,j,k = 1,3$$

qui représente explicitement la sommation de 27 termes.

2.2.2. Definition du Kronecker Delta :

Le Kronecker Delta, noté par δij, est défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad (2.2)$$

C'est à dire : $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$ et $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$.

En forme matricielle le Kronecker Delta est la matrice identité définit en fonction des indices libres i et j.

Par exemple si (i et j) varient de 1 à 3, δ_{ij} est donné par la matrice de la forme :

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

Notes :

a) $\delta_{i\,i} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

b) $\delta_{i\,m}\, a_m = a_i$; i = 1-3

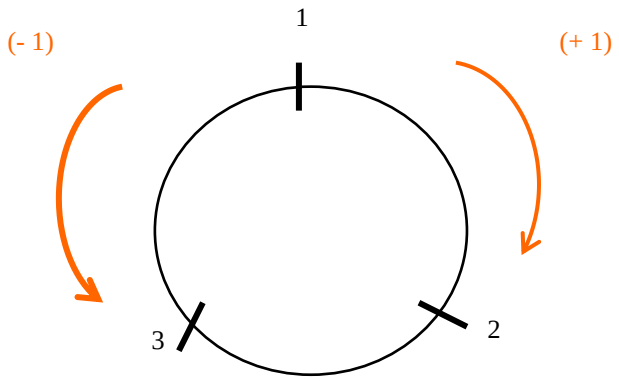
c) $\delta_{i\,m}\, T_{mj} = T_{ij}$

2.2.3. Définition du Symbole de Permutation :

Le symbole de permutation noté par ε_{ijk} est défini comme suit :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1; & \text{quand ijk est de permutation paire } (123, 231, 312) \\ -1; & \text{quand ijk est de permutation paire } (123, 231, 312) \\ 0; & \text{autrement} \end{cases} \qquad (2.4)$$

Voir le sens de permutation ci-dessous :



C'est à dire : $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$ et

$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = \ldots = 0$

En utilisant le symbole de rotation on aura :

$$\vec{W} = w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}$$

En utilisant la notation indicielle l'élément w_i du produit vectoriel est donné par :

$w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k$

où i est un indice libre ; j,k sont des indices répétitif.

Explicitement :

pour i = 1 :

$w_1 = \varepsilon_{1jk} u_j v_k = \varepsilon_{11k} u_1 v_k + \varepsilon_{12k} u_2 v_k + \varepsilon_{13k} u_3 v_k$

$= \varepsilon_{111} u_1 v_1 + \varepsilon_{112} u_1 v_2 + \varepsilon_{113} u_1 v_3 + \varepsilon_{121} u_2 v_1 + \varepsilon_{122} u_2 v_2 + \varepsilon_{123} u_2 v_3 + \varepsilon_{131} u_3 v_1$

$+ \varepsilon_{132} u_3 v_2 + \varepsilon_{133} u_3 v_3$

$= \varepsilon_{123} u_2 v_3 + \varepsilon_{132} u_3 v_2 = u_2 v_3 - u_3 v_2$

pour i = 2 :

$w_2 = \varepsilon_{2jk} u_j v_k = \varepsilon_{21k} u_1 v_k + \varepsilon_{22k} u_2 v_k + \varepsilon_{23k} u_3 v_k$

$= \varepsilon_{213} u_1 v_3 + \varepsilon_{231} u_3 v_1 = u_3 v_1 - u_1 v_3$

pour i = 3 :

$w_3 = \varepsilon_{3jk}\, u_j\, v_k = \varepsilon_{31k}\, u_1\, v_k + \varepsilon_{32k}\, u_2\, v_k + \varepsilon_{33k}\, u_3\, v_k$

$= \varepsilon_{312}\, u_1\, v_2 + \varepsilon_{321}\, u_2\, v_1 = u_1\, v_2 - u_2\, v_1$

2.3. Rotation des Systèmes de Coordonnées :

2.3.1 Rotations du système de coordonnées bidimensionnel

On considère un point $\vec{P}(x_1,x_2)$ dans un système de coordonnées bidimensionnel (X_1,X_2) ; après une rotation d'un angle θ des ce système (Fig.1), les coordonnées de ce point dans le nouveau système (X'_1,X'_2) deviennent :

$$X'_1 = X_1\cos\theta + X_2\sin\theta \quad \text{et} \quad X'_2 = -X_1\sin\theta + X_2\cos\theta \tag{2.5}$$

En forme matricielle l'équation ci dessus devient :

$$\begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

où la matrice de transformation des coordonnées β_{ij} est définis par :

$$\beta_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

En utilisant la notation indicielle la formule (2.5) s'écris sous la forme suivante :

$$X'_i = \beta_{ij}\, X_j \quad ; i,j = 1,2 \tag{2.7}$$

Où i est un indice libre et j est indice répétitif.

Propriétés de la Matrice de Transformation $[\beta]$:

La matrice de transformation est orthogonale c'est à dire que :

$[\beta]^{-1} = [\beta]^{T}$ ou bien $[\beta].[\beta]^{T} = [I]$

En notation indicielle : $\beta_{ik}\beta_{jk} = \delta_{ij}$

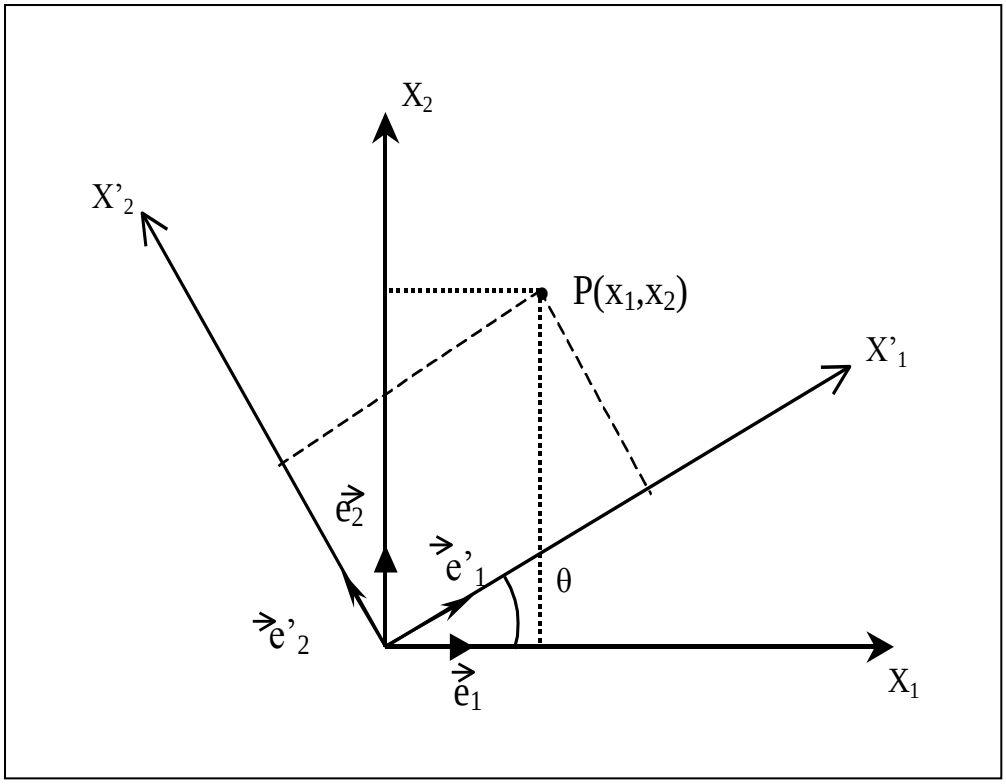


Figure 1: Rotation des coordonnées en deux dimensions

2.5.2) Rotation du système de coordonnées tri dimensionnelle (3-D) :

Maintenant dans le système tri dimensionnelle (X_1,X_2,X_3), on considère un point $\vec{P}$ ayant les coordonnées (x_1,x_2,,x_3) ; après une rotation d'un angle θ des ce système (Fig.2), le vecteur de position de ce point par rapport au premier et au deuxième système est décris par les relations :

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2' + x_3'\vec{e}_3' \qquad (2.8)$$

En notation indicielle les coordonnées du vecteur de position dans les deux systèmes devient :

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i = x'_i \vec{e}'_i \qquad (2.9)$$

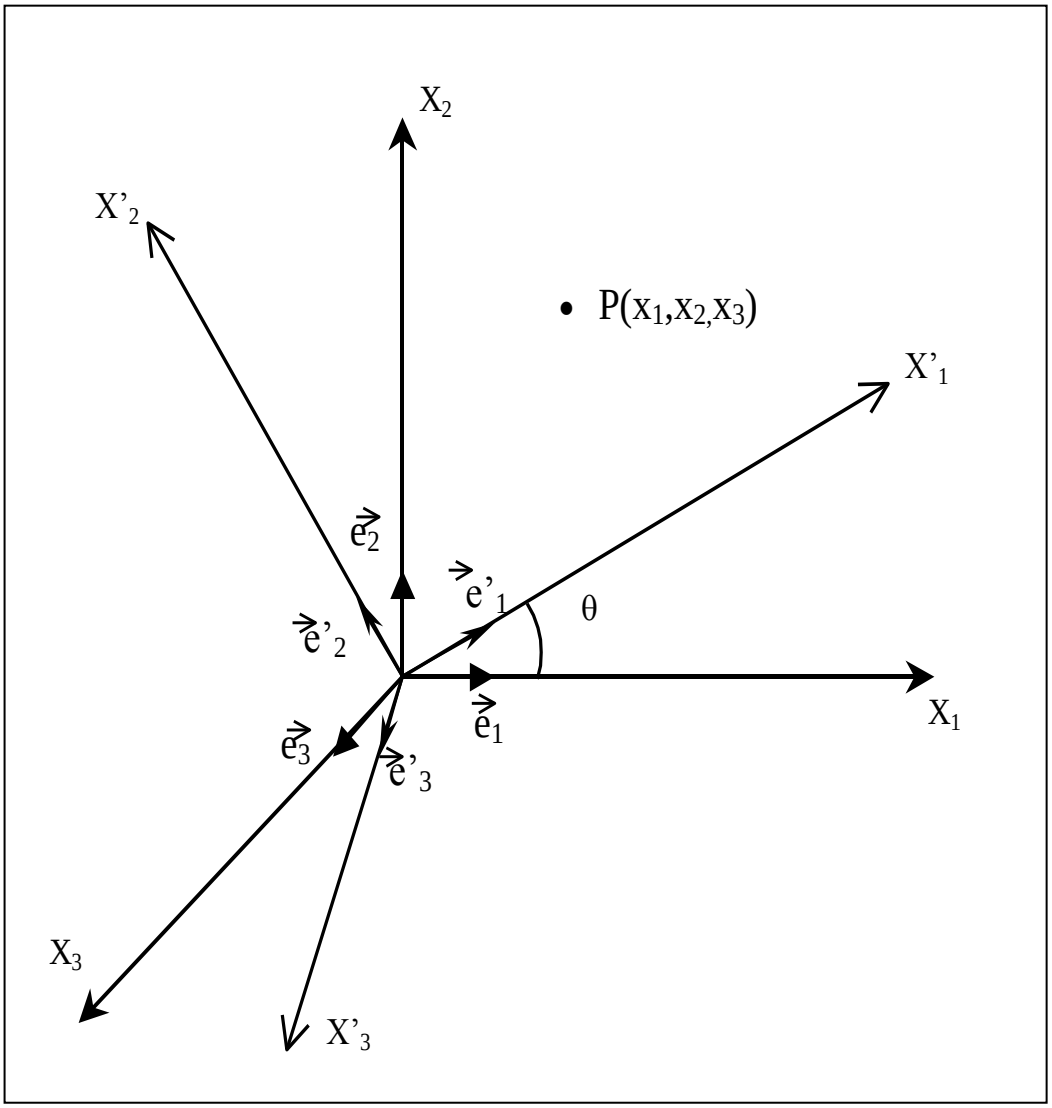


Figure 2: Rotation des coordonnées en trois dimensions

Multiplions les deux membres de l'équation (2.9) par le tenseur $\vec{e}'_j$:

$$x_i \vec{e}_i \,.\, \vec{e}'_j = x'_i \vec{e}'_i .\, \vec{e}'_j \qquad (2.10)$$

et en tenant compte de l'orthogonalité des systèmes de coordonnées, c'est à dire:

$$\vec{e}'_i \,.\, \vec{e}'_j = \delta'_{ij} = \delta_{ij} \qquad (2.11)$$

L'équation (2.10) devient :

$$x_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j = x'_i \delta_{ij} \qquad (2.12)$$

En utilisant la commutativité du produit scalaire et la définition du Kronecker delta, l'équation ci-dessus devient :

$$\vec{e}'_j . \vec{e}_i \; x_i = x'_j$$

ou bien :

$$x'_i = \vec{e}'_i . \vec{e}_j \, x_j \qquad (2.13)$$

Le produit scalaire des vecteurs unitaires des deux systèmes nous donne en effet un tenseur du deuxième ordre nommé par la matrice de transformation de coordonnées β_{ij} où l'équation (6) devient :

$$x'_i = \beta_{ij} \, x_j \qquad (2.14)$$

où la matrice de transformation dans les systèmes tri dimensionnelle est défini par :

$$\beta_{ij} = \vec{e}'_i . \vec{e}_j \qquad (2.15)$$

2.4. Définition du champ de tenseur :

Dans un système de n'importe quel ordre (x_1 , x_2 , x_3 ,…, x_n), un champ de vecteur donné sous la forme :

$T_{ijk.....}(x_1 , x_2 , x_3 ,\ldots, x_n)$ est dit tenseur si et seulement si il vérifie (suit) la règle de transformation des coordonnées suivante :

$$T'_{ijk....}(x'_1 , x'_2 , x'_3 , \ldots . x'_n) = ß_{im} ß_{jn} ß_{kl} ..... T_{mnl.....}(x_1 , x_2 , x_3 , \ldots, x_n) \qquad (2.16)$$

L'ordre de ce champ de tenseur est défini en fonction du nombre de ses indices libres.

2.5. Cas particuliers des tenseurs :

a) Si dans un système cartésien (x_i) , i =1-3, le champ de tenseur a un seul indice libre c'est à dire (T_i), le tenseur est dit tenseur du premier ordre ou bien vecteur ayant trois composantes (T_1 , T_2 , T_3), et l'équation (2.16) devient :

$$T'_i(x'_i) = ß_{im}\ T_m(x_i)$$

En notation matricielle : $[T'] = [ß][T]$

b) Si le champ de tenseur a deux indices libres c'est à dire (T_{ij}), le tenseur est dit du deuxième ordre et la relation (2.16) s'écrit sous la forme :

$$T'_{ij}(x'_i) = ß_{im}\, ß_{jn}\, T_{mn}(x_i) \qquad (2.18)$$

En notation matricielle : $[T'] = [ß][T][ß]^T$

c) Si le tenseur n'a aucun indice libre, il est dit tenseur d'ordre zéro ou fonction scalaire $\Phi(x_i)$ et l'équation (2.16) s'écrit simplement :

$$\Phi'(x'_i) = \Phi(x_i)$$

d) Dans le cas inverse où les champs de tenseur dans le système prime sont connus, les tenseurs dans le système original peuvent être déterminer comme suit :

$$T_i(x_i) = ß_{ii}\, T'_j(x_i)$$

En notation matricielle : $[T] = [ß]^T [T']$

$$T_{ij}(x_i) = ß_{mi}\ ß_{nj}\ T'_{mn}(x_i)$$

En notation matricielle : $[T] = [ß]^T [T'] [ß]$

2.6. Contraction et Opération des tenseurs :

La contraction sur les tenseurs réduit l'ordre de ce dernier par deux. C'est à dire, si on a tenseur de deuxième ordre T_{ij} où i,j = 1-3 qui a neuf composantes, sa contraction nous donne un autre tenseur T_{ii} où i est un indice répétitif variant de 1 à 3 et ayant seulement une seule composante de la forme :

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

Qui est un tenseur d'ordre zéro (ou fonction scalaire) qui peut être démontrer utilisant la définition du tenseur (2.8) comme suit :

$$T'_{ij} = ß_{im}\, ß_{jn}\, T_{mn}$$

La contraction nous donne : $T'_{ii} = ß_{im}\, ß_{in}\, T_{mn}$

$$T'_{ii} = \delta_{mn}\, T_{mn} = T_{mm} = T_{nn} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

Qui est une quantité invariante par rapport à la transformation des coordonnées.

En général la contraction est opération sur les tenseurs qui égalise deux de ses indices libres en indices répétitifs, puis on applique la sommation sur ses indices. En conséquence, si on a un tenseur d'ordre n, après contraction on obtiendra un autre tenseur d'ordre (n-2).

Application :

Utilisant cette théorie, démontrer que le champ de tenseur A_{ijk} est un tenseur et justifier de quel ordre est il ?

Solution :

Considérons un tenseur non nul d'ordre un (V_i) et étudions le champ de tenseur obtenu par le produit de : $A_{ijk} V_i = B_{jk}$

Dans le système de transformation on a :

$$A'_{ijk} V'_i = B'_{jk} = ß_{jr} ß_{ks} B_{rs}$$

$$= ß_{jr} ß_{ks} (A_{mrs} V_m) = ß_{jr} ß_{ks} A_{mrs} ß_{im} V'_i$$

ou bien:

$$A'_{ijk} V'_i - ß_{jr} ß_{ks} A_{mrs} ß_{im} V'_i = 0$$

C'est à dire : $(A'_{ijk} - ß_{jr} ß_{ks} A_{mrs} ß_{im}) V'_i = 0$

Comme $V_i \neq 0$; par conséquent :

$$A'_{ijk} = ß_{jr} ß_{ks} ß_{im} A_{mrs}$$

Qui vérifie absolument la règle de la transformation pour un champ de tenseur d'ordre trois.

2.7. Dérivées Partielles en notation indicielle :

Soit un vecteur (tenseur d'ordre un), V_i où i = 1-3, dans un système x_i, notre but est déterminé une relation entre les dérivées partielles après transformation du système à un autre repère prime :

Comme V_i est un tenseur c'est à dire :

$$V'_i = ß_{ik} V_k$$

$$\frac{\partial V'_i}{\partial x'_j} = ß_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x'_j} = ß_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} \qquad (2.17)$$

avec : $x_l = ß_{ml} x'_m$

et :

$$\frac{\partial x_l}{\partial x'_j} = ß_{ml} \frac{\partial x'_m}{\partial x'_j} = ß_{ml}\ \delta_{mj} = ß_{jl}$$

autrement dit :

$$\frac{\partial V'_i}{\partial x'_j} = ß_{ik}\ ß_{jl} \frac{\partial V_k}{\partial x_l} \qquad (2.18)$$

qui vérifie la relation des transformation des coordonnées et qui un tenseur du deuxième ordre. Par conséquent, la dérivée partielle de n'importe quel tenseur se conduit comme les composants d'un champ de tenseur cartésien et qui peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = V_{i,j} = \partial_j V_i \qquad (2.19)$$

2.8. Théorème de l'Intégrale (Théorème de Gauss) :

Considérons un champ de tenseur T_{ijk} (x) dans un volume ou région v limitée par une surface s ; le théorème de Gauss stipule que :

$$\int_v \partial_i T_{jkm\ldots\ldots} dv = \int_s n_i T_{jkm\ldots\ldots} ds \qquad (2.20)$$

où n_i sont les composants de vecteur unitaire tout le long de la normale extérieure à la surface s contournant le volume v.

Dans notre cours on s'intéressera beaucoup plus à l'application de ce théorème dans le domaine des milieux continus qu'à sa démonstration qui n'est aussi importante pour nous.

Cas spéciaux :

a) Gradiant d'un tenseur d'ordre zéro (fonction scalaire) :

$\int_v \partial_i \Phi \, dv = \int_s n_i \Phi \, ds$

En notation vectorielle : $\int_v \nabla \Phi \, dv = \int_s \vec{n} \Phi \, ds$

b) Divergence d'un vecteur :

$\int_v \partial_i V_j \, dv = \int_s n_i V_j \, ds$

En notation vectorielle : $\int_v \nabla . \vec{V} \, dv = \int_s \vec{n} . \vec{V} \, ds$

c) Rotationelle d'un vecteur :

$\int_v \epsilon_{ijk} \partial_i V_j \, dv = \int_s \epsilon_{ijk} n_i V_j \, ds$

En notation vectorielle : $\int_v \nabla \wedge \vec{V} \, dv = \int_s \vec{n} \wedge \vec{V} \, ds$

2.9. Applications aux calculs tensoriels :

1) gradient d'un vecteur $\vec{V}$:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x_1} & \frac{\partial V_3}{\partial x_2} & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \text{grad } \vec{V} = \nabla \vec{V}$$

où : ∇ = gradient = $\frac{\partial}{\partial x_1}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{k} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, i = 1-3

2) divergence d'un vecteur $\vec{V}$:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \partial_i V_i = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \text{div}\,\vec{V} = \nabla . \vec{V}$$

3) Laplacient d'un vecteur $\vec{V}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} V_j = V_{j,ii} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) V_j = \nabla^2 \vec{V} = \Delta \vec{V}$$

4) Produit vectoriel d'un vecteur $\vec{V}$:

$$\nabla \text{ x } \vec{V} = \varepsilon_{ijk}\partial_j V_k = \varepsilon_{ijk} V_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial V_k}{\partial x_j} \quad \text{(avec i,j,k = 1-3)}$$

i est un indice libre ; j et k sont des indices répétitifs.

5) Notation matricielle :

En générale une matrice $[A]$, (A_{ij} en notation indicielle) est un tenseur du deuxième ordre avec : i = 1,n ; j = 1,m ; représenté comme suit :

$$[A] = A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ldots\ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \ldots\ldots & A_{2m} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \ldots\ldots & A_{3m} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \ldots\ldots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

- Dans le cas où n = m , la matrice est dite matrice carrée

- Si $n \neq m$, la matrice est dite matrice rectangulaire
- Si n = 1 et m est quelconque, la matrice est dite vecteur ligne (tenseur d'ordre un) noté comme :

  $[A] = A_{1j} = [\ A_{11}\ A_{12}\ A_{13}\ \ldots\ A_{1m}\ ]$

- Si m = 1 et n est quelconque, la matrice est dite vecteur colonne (tenseur d'ordre un) noté comme :

$$[A] = A_{i1} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \\ . \\ . \\ A_{n1} \end{bmatrix}$$

- Matrice symétrique :

  La matrice $[A]$(ou le tenseur A_{ij}) est dite symétrique si $A_{ij} = A_{ji}$;

  quand $i \neq j$.
- Matrice inverse :

  La matrice inverse de $[A]$ notée par $[A]^{-1}$ est définie par :

$$[A]^{-1} = \frac{Adjoint\ de\ [A]}{Determinant\ [A]}$$

où : Adjoint de $[A]$ = $\left[\overline{A}_{ij}\right]^T$, qui est la matrice transposée des cofacteurs. Cette matrice des cofacteurs est donnés par :

$\left[\overline{A}_{ij}\right]$ = $(-1)^{i+j}$ déterminant de $[A]$

$$\text{Si } [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Déterminant de $[A]$ = A_{11} (cofacteur de A_{11}) - A_{12} (cofacteur de A_{12})

+ A_{13} (cofacteur de A_{13})

En général le cofacteur de n'importe quel élément A_{ij} est défini par :
Cofacteur $A_{ij} = (-1)^{i+j}$ [déterminant obtenu en éliminant la ligne et la colonne à lesquels appartiennent l'élément A_{ij} de la matrice]

- Matrice orthogonale :
  La matrice $[A]$ dite orthogonale si $[A]\ [A]^T = [I]$; où $[I]$ est la matrice identité. Autrement dit : $[A]^T = [A]^{-1}$
  où $[A]^{-1}$ est la matrice inverse de $[A]$.

6) Produit de deux matrices :

Le produit de deux matrices $[A]$ et $[B]$ d'ordre (mxn) et (nxp) respectivement est une autre matrice $[W]$ d'ordre (mxp) donnée en notation indicielle par :

$W_{ij} = A_{ik} B_{kj}$, avec : i = 1-m , j = 1-p et k = 1-n

Note :

- Pour pouvoir effectuer ce produit il faut que le nombre de colonne de la $1^{ière}$ matrice soit identique au nombre de ligne de la $2^{ième}$ matrice.

7) Inverse du produit de deux matrices :

$$([A] [B])^{-1} = [B]^{-1} [A]^{-1}$$

qui peut être clairement démonter comme suit:

$$([A] [B])x[B]^{-1} [A]^{-1} = [A]([B] x [B]^{-1}) [A]^{-1} = [A] [I] [A]^{-1} = [A] [A]^{-1} = [I]$$

donc : $[B]^{-1} [A]^{-1} = ([A] [B])^{-1}$

8) Transposé d'un produit de deux matyrices :

$$([A] [B])^{T} = [B]^{T} [A]^{T}$$