

## Exercice 1: Théorème de Noether

(1) Rappeler le théorème de Noether?

(2) Montrer que, dans le cas général (transformations internes ou externes), le courant de Noether associé à la densité lagrangienne  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$  est

$$J_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} \delta \phi(x) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} \partial_\nu \phi(x) - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \delta x^\nu. \quad (1)$$

où  $\partial_\mu J^\mu = 0$ .

(3) Montrer que

$$\frac{dQ}{dx_0} = 0, \quad Q = \int_V d^3x J_0(x). \quad (2)$$

où  $Q$  est la charge de Noether.

(4) Calculer les courants et les charges de Noether pour

$$\text{Translation: } x_\mu \rightarrow x_\mu + a_\mu. \quad (3)$$

$$\text{Transformation de Lorentz (rotation): } x_\mu \rightarrow x_\mu + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu (\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}). \quad (4)$$

Quelles sont les quantités conservées?

(5) Considérons la densité lagrangienne de Dirac ( $\mathcal{L}_d$ ) et la transformation de jauge globale  $U(\theta)$ :

$$\mathcal{L}_d = \bar{\psi}(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi, \quad U(\alpha) = e^{-ie\theta}. \quad (5)$$

Montrer que le courant et la charge de Noether, dans ce cas, sont donnés par:

$$J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad Q = e. \quad (6)$$

## Exercice 2: Transformation de jauge abélienne: groupe $U(1)$

(1) Écrire la densité lagrangienne de Dirac et montrer qu'elle est invariante sous la transformation globale du groupe abélien  $U(1)$ .

(2) Calculer le courant de Noether associé et montrer qu'il est conservé.

(3) Considérons la densité lagrangienne suivante

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x)(i\mathcal{D} - m)\psi(x).$$

avec

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$$

Dériver la transformation du champs  $A_\mu$  qui laisse la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  invariante sous la transformation locale  $e^{ie\theta(x)} \in U(1)$  (où  $\theta(x)$  est une fonction analytique de  $x$ ).

(4) Au niveau quantique, cette densité lagrangienne est mal définie.

(a) Expliquer pourquoi.

(b) Comment peut-on résoudre ce problème?

(c) Est ce que la nouvelle densité lagrangienne reste invariante sous les transformations de jauge locales des champs  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  et  $A_\mu$ ? Justifier la réponse.

### Exercice 3: groupe SU(2) (devoir!)

Considérons la transformation complexe à deux dimensions,  $x' = Ax$  qui, sous forme matricielle, s'écrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7)$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont complexes ( $\in \mathbb{C}$ ). On suppose que le déterminant de cette matrice est non-nul pour pouvoir construire son inverse.

(1) Quelles sont les conditions que doivent vérifier les paramètres  $a, b, c$  et  $d$  pour que la transformation (7) soit unitaire? Montrer que la matrice  $A$  peut s'écrire sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{a}\bar{b} & d \end{pmatrix}. \quad (8)$$

où  $\bar{b}$  et  $\bar{d}$  sont les complexes conjugués de  $a$  et  $d$ , respectivement.

(2) On suppose que le déterminant de la matrice  $A$  égal à l'unité, montrer qu'on peut écrire cette matrice sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

et que

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (10)$$

où  $|b|^2 = \bar{b}b$  est la norme de  $b$ .

(3) Montrer que l'ensemble des matrices  $A$ , définies dans l'éq. (9), forme un groupe.

(4) On exprime les paramètres  $a$  et  $b$  en terme de leurs parties réels et imaginaires ç.à.d.  $a = a_r + ia_i$  et  $b = b_r + ib_i$  où  $a_r, a_i, b_r$  et  $b_i$  sont les parties réels et imaginaires de ces paramètres. Montrer que la matrice  $A$ , donnée dans l'éq. (9), peut s'écrire comme une combinaison linéaires des matrice de Pauli<sup>1</sup> et la matrice unitaire. Donner les coefficients de cette combinaison.

(5) Montrer les relations suivantes:

(a)  $\sigma_i^2 = 1, \sigma_i^3 = \sigma_i, \sigma_i^{2n} = 1$  et  $\sigma_i^{2n+1} = \sigma_i$  pour  $i = x, y, z$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

(b)  $\sigma_i \sigma_j = i \sigma_k$ .

(c)  $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \mathbb{I}$  ( $\mathbb{I}$  est la matrice unitaire  $2 \times 2$ ).

(d)  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \mathbb{I} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta})$  (où  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  sont deux vecteurs arbitraires à 3 dimensions).

(6) Montrer que les matrice de Pauli, voir (11), forment une base de l'espace vectoriel des matrices  $A$  (voir éq. (9)).

(7) On suppose que la matrice  $U$  s'écrit sous forme exponentielle comme suit

$$U(\varphi, \vec{n}) = \exp\left(-\frac{1}{2}i\varphi \vec{n} \cdot \vec{\sigma}\right) \quad (12)$$

---

<sup>1</sup>Les matrices de Pauli sont données par:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

où  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  et  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ .

Montrer qu'on peut écrire la matrice  $U$  sous la forme

$$U(\varphi, \vec{n}) = \cos(\varphi/2)\mathbb{I} - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin(\varphi/2)) \quad (13)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) - in_z \sin(\varphi/2) & -(n_y + in_x) \sin(\varphi/2) \\ (n_y - in_x) \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) + in_z \sin(\varphi/2) \end{pmatrix} \quad (14)$$

(8) Montrer que la matrice  $U \in SU(2)$  (en vérifiant que la matrice (14) est unitaire et de déterminant égal à 1!).

(9) Calculer les matrices suivantes:

$$U(0, \vec{n}), \quad U(2\pi, \vec{n}), \quad U(4\pi, \vec{n}), \quad U(\varphi + 2\pi, \vec{n}), \quad U(\varphi + 4\pi, \vec{n}). \quad (15)$$

(10) Montrer que  $\{U(0, \vec{n}), U(2\pi, \vec{n})\}$  forme un sous-groupe distingué du groupe  $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ .

(11) Montrer que les groupes  $SU(2)/\mathbb{Z}_2$  et  $SO(3)$  sont isomorphes.

## Exercice 4: Transformation de jauge non-abélienne et Isospin

Considérons la densité lagrangienne du Nucléon

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (16)$$

(1) Montrer que  $\mathcal{L}$  est invariant sous la transformation d'Isospin globale  $U(\vec{\alpha}) = \exp(i\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}}{2})$  (où  $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  sont les matrices de Pauli, et  $\vec{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  sont des constantes arbitraires).

(2) Montrer que  $U(\alpha)$  s'écrit

$$U(\alpha) = \cos(\varphi/2) + i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin(\varphi/2)), \quad \vec{n} = \frac{\vec{\alpha}}{|\alpha|}, \quad \varphi = |\alpha|. \quad (17)$$

est que l'ensemble des transformations  $\{U(\alpha)\}$  forme le groupe non-abelien  $SU(2)$ .

(3) Montrer que le courant de Noether correspondant est

$$\vec{J}^\mu = \frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi(x))} \vec{\sigma} \psi(x) = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\vec{\sigma}}{2} \psi. \quad (18)$$

(4) Montrer que pour que la densité lagrangienne suivante soit invariante sous la transformation de jauge locale ( $\vec{\alpha} \equiv \vec{\alpha}(x)$ )

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(iD_\mu \gamma^\mu - m)\psi. \quad (19)$$

il faut que

$$D_\mu = \partial_\mu + igB_\mu, \quad B'_\mu = U(x)B_\mu U^{-1}(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x). \quad (20)$$

(5) Utiliser la transformation infinitésimale pour montrer que

$$b'_\mu = b_\mu^l - \epsilon_{jkl} \alpha^j(x) b_\mu^k - \frac{\partial_\mu \alpha^l(x)}{g},$$

$$\text{où } B_\mu = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha}(x) \quad (21)$$

(6) Montrer que la densité lagrangienne de jauge est invariante sous la transformation de jauge locale

$$\mathcal{L}_{jauge} = -\frac{1}{4} \vec{\mathbf{F}}_{\mu\nu} \vec{\mathbf{F}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} Tr[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]. \quad (22)$$

où

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{F}}_{\mu\nu} \cdot \vec{\sigma} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \sigma^a. \quad (23)$$

$$F_{\mu\nu}^l = \partial_\mu b_\nu^l - \partial_\nu b_\mu^l + g\epsilon_{jkl} b_\mu^j b_\nu^k. \quad (24)$$

## Exercice 5: groupe $SU(3)$

$SU(3)$  est le groupe des matrices  $3 \times 3$  unitaires de déterminant égal à 1. Montrer qu'un élément de ce groupe s'écrit

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = e^{i\alpha_a T_a}. \quad (25)$$

Les matrices  $3 \times 3$  qui vérifient les conditions de  $SU(3)$  sont les matrices de Gell-Mann, elles sont données par

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

Traditionnellement, on définit les générateurs de  $SU(3)$  comme suit

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a, \quad a = 1, \dots, 8. \quad (27)$$

avec

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}/2. \quad (28)$$

L'algèbre de Lie de  $SU(3)$  est défini par le commutateur

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c. \quad (29)$$

- (1) Montrer que les éléments  $U(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ , définis dans l'éq. (25), forme le groupe  $SU(3)$ .
- (2) On considère la densité lagrangienne suivante:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i \not{D} - m)\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix} \quad (30)$$

Montrer que  $\mathcal{L}$  est invariant sous la transformation de jauge locale du groupe  $SU(3)$ .

## Exercice 6: Théories de jauge basé sur le groupe $O(n)$

Considérons deux champs scalaires,  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , qui se transforme suivant la représentation vectorielle du groupe  $O(n)$ , comme suit:

$$(\phi'_\alpha)_i = U_{ij}(x)(\phi_\alpha)_j, \quad \alpha = 1, 2. \quad (31)$$

où  $O(n)$  est le groupe des matrices orthogonales  $n \times n$  d'éléments réels.

- (1) Montrer qu'on écrit la représentation infinitésimale de  $O(n)$  sous la forme:

$$(\phi'_\alpha)_i = (\phi_\alpha)_i + \varepsilon_{ij}(\phi_\alpha)_j \quad (32)$$

où  $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ .

- (2) Construire la dérivé covariante pour les champs  $\phi_\alpha$
- (3) Donner la lagrangien total de ce modèle.

## Exercice 7: Théorie de Yang-Mills scalaire

Considérons le lagrangien libre d'une théorie de trois champs scalaires

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi)^2 - m\phi^2], \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (33)$$

On suppose que  $\mathcal{L}$  est invariant sous les transformations de  $SU(2)$  dans la représentation à 3 dimensions.

- (1) Construire les générateurs de  $SU(2)$  dans cette représentation.
- (2) Construire le lagrangien de Yang-Mills associé.