Chapitre 1

LES FONCTIONS EULERIENNES BETA ET GAMMA

1.1 La fonction bêta $\beta(p,q)$

La fonction $\beta(p,q)$, appelée aussi la fonction d'Euler de $1^{ère}$ espèce, est une fonction de deux variables p et q définie par la relation

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{1.1}$$

cette fonction n'a de sens que pour $p > 0$ et $q > 0$, qui sont les conditions de convergence de l'intégrale pour x=0 et x=1 respectivement.

1.1.1 Propriétés :

1- En posant $x = 1-t$, on peut montrer que

$$\beta(p,q) = \beta(q,p) \tag{1.2}$$

2- En faisant le changement de variable suivant $x = \sin^2 \varphi$, la fonction β s'écrit :

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\varphi)^{2p-1}(\cos\varphi)^{2q-1}d\varphi \tag{1.3}$$

3- $\beta(1,1) = 1, \beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi, \beta(1,\frac{1}{2}) = \beta(\frac{1}{2},1) = 2.$

1.2 La fonction Gamma $\Gamma(x)$

L'intégrale d'Euler de $2^{ème}$ espèce, ou la fonction gamma est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \tag{1.4}$$

cette intégrale converge pour $x > 0$ Pour $x = 1$, la relation (1.4) devient :

$$\Gamma(1) = 1 \tag{1.5}$$

En intégrant (1.4) par parties, on trouve :
$\Gamma(x) = -t^{x-1}e^{-t}\Big|_0^\infty + (x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}dt = (x-1)\Gamma(x-1)$

on déduit alors la relation de réccurence entre les :

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \tag{1.6}$$

en intégrant par parties une autre fois
$\Gamma(x) = (x-1)\left[-t^{x-2}e^{-t}\Big|_0^\infty + (x-2)\int_0^\infty t^{x-3}e^{-t}dt\right] = (x-1)(x-2)\int_0^\infty t^{x-3}e^{-t}dt = (x-1)(x-2)\Gamma(x-2)$
en continuant à intégrer, on trouve :

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)...(x-n)\Gamma(x-n) \tag{1.7}$$

avec n un entier positif si x est un entier, on peut écrire :

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)...2.1 = (x-1)! \tag{1.8}$$

on constate que la fonction factorielle n'est autre que :

$$x! = \Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt \tag{1.9}$$

d'où

$$x! = x\Gamma(x) = x(x-1)! \tag{1.10}$$

on déduit que

$$0! = 1 \tag{1.11}$$

1.3 Relation entre $\beta(p,q)$ et $\Gamma(x)$

Cette relation est donnée par l'expression suivante :

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{1.12}$$

pour montrer cette relation, on calcule l'intégrale double suivante $I = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty x^{2p+1}y^{2q+1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ de deux manière.

Par séparation des variables

posant $\begin{cases} u = x^2 \\ v = y^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ dv = 2ydy \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = \frac{1}{2}u^{-1/2}du \\ dy = \frac{1}{2}v^{-1/2}dv \end{cases}$

d'où

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty u^p e^{-u}du \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty v^q e^{-v}dv$$

d'après (1.9), on obtient :

$$I = \frac{1}{4}p!q! \qquad (*)$$

En passant aux coordonnées polaires

on pose : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $dxdy = rdrd\theta$

$$I = \underbrace{\int_0^\infty r^{2(p+q)+3} e^{-r^2} dr}_{A} . \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^{2p+1}\theta \sin^{2q+1}\theta d\theta}_{B}$$

on pose $r^2 = t \Longrightarrow dt = 2rdr$

La partie radiale A :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{p+q+1} e^{-t} dt = \frac{1}{2}(p+q+1)!$$

La partie angulaire B : est constatée des deux relations (1.2) et (1.3)

$$B = \frac{1}{2}\beta(q+1,p+1) = \frac{1}{2}\beta(p+1,q+1)$$

d'où

$$I = \frac{1}{4}(p+q+1)!\beta(p+1,q+1) \qquad (**)$$

de $(*)$ et $(**)$, on a :

$$\beta(p+1,q+1) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \tag{1.13}$$

d'où :

$$\beta(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{1.14}$$

Exercice :

1- calculer $\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ puis déduire $(-\frac{1}{2})!$ et $(\frac{1}{2})!$.

2-calculer l'intégrale $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$

3- Calculer $J = \int_0^\infty x^{2\lambda+1} e^{-x^2} dx$ puis déduire $J' = \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$

Solution :

1- On pose $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$

d'après (1.14)

$$\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}).\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \frac{\left[(-\frac{1}{2})!\right]^2}{0!} = \left[(-\frac{1}{2})!\right]^2 \qquad (*)$$

de (1.3), on trouve :

$$\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^0\theta\cos^0\theta d\theta = 2\theta|_0^{\pi/2} = \pi \qquad (**)$$

de $(*)$ et $(**)$, on a :

$$\left[(-\frac{1}{2})!\right]^2 = \pi \Longleftrightarrow (-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$$

d'après (1.10)

$(\frac{1}{2})! = \frac{1}{2}.(\frac{1}{2}-1)! = \frac{1}{2}.(-\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = (\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2- Calcul de I

on pose $u = x^2, dx = \frac{1}{2}u^{-1/2}du$

$$I = \int_0^\infty e^{-u}\frac{u^{-1/2}}{2}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}u^{-1/2}du$$

d'après (1.9)

$I = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3- on pose $u = x^2$, $du = 2xdx$, $dx = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$

$J = \int_0^\infty \frac{1}{2}u^\lambda e^{-u}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^\lambda e^{-u}du = \frac{\lambda!}{2}$

$$J = \frac{\lambda!}{2}$$

on pose $2\lambda + 1 = 2 \Longleftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$

$J' = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})! = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$J' = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

1.4 Quelques résultats particuliers sur la fonction Γ

1- La formule des compléments est données par la relation suivante :

$$x.\Gamma(x).\Gamma(1-x) = x!(-x)! = \frac{\pi.x}{\sin\pi x} \qquad (1.15)$$

2- La formule de dulpication de Legendre est la relation donnée par :

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x) \tag{1.16}$$

3- La formule de Stirling permet d'avoir une valeur approchée de $x!$ pour les valeurs de x positives assez grandes souvent utilisées en mécanique statistique, elle est donnée par :

$$x! = \sqrt{2\pi x}x^x e^{-x}$$

la formule de Stirling peut aussi être utilisée sous forme logarithmique

$$\ln x! = (x+\frac{1}{2})\ln x - x + \frac{1}{2}\ln 2\pi$$

pour x d'odre 10^3 ou supérieur, on peut écrire

$$\ln x! \simeq x\ln x - x$$