

Série de TD N° 01

Exercice 1

1°) Soit p désignant la proposition « l'enfant sait lire » et q désignant la proposition « l'enfant sait écrire ». Donner la traduction dans le langage courant des propositions suivantes :

(1) $p \wedge q$; (2) $p \wedge (\neg q)$; (3) $(q \rightarrow p)$; (4) $(\neg p) \vee (\neg q)$; (5) $(\neg p) \wedge (\neg q)$

2°) Même question avec p la proposition « l'homme est mortel » et q désignant la proposition « l'homme est éternel » et les propositions :

(1) $(p \vee q)$; (2) $(\neg p) \vee (\neg q)$; (3) $\neg(p \wedge q)$; (4) $p \wedge (\neg q)$; (5) $(p \rightarrow (\neg q))$

Exercice 2 Soit p la proposition « X estime Y » et q la proposition « Y estime X ». Ecrire sous forme symbolique les phrases suivantes :

1. X estime Y mais Y ne lui rend pas son estime ;
2. X et Y s'estiment ;
3. X et Y se détestent ;
4. Y est estimé par X mais X est détesté par Y ;
5. X et Y ne se détestent ni l'un ni l'autre.

Exercice 3 En interprétant P par « je pars », Q par « tu restes » et R par « il n'y a personne », traduisez les formules logiques suivantes en phrases du langage naturel :

$(P \wedge \neg Q) \rightarrow R$ $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R$

Exercice 4 Les expression suivantes sont elles bien formées ? Pourquoi ?

- 1) $((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow \neg \neg P))$ 2) $((P) \vee (Q \wedge R))$
- 3) $(P_1 \rightarrow ((P_2 \rightarrow Q)))$ 4) $(\neg (P \vee Q) \rightarrow \neg \neg Q) R$

Exercice 5 Soit P, Q et R des propositions. Dans chacun des ces cas suivant ; les propositions citées sont elles la négation l'une de l'autre ?

1. $(P \text{ et } Q)$; $(\text{non } P \text{ et non } Q)$ 2. $(P \rightarrow Q)$; $(\text{non } Q \rightarrow \text{non } P)$ 3. $(P \text{ ou } Q)$; $(P \text{ et } Q)$

Exercice 6 Soit a, b et c des réels. Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. $a \leq -2$ ou $a \geq 3$ 2. $a \leq 5$ et $a \geq -1$ 3. $a \leq 5$ ou $3 > c$ 4. $a+1$ et $a > 1$

Exercice 7 Donner la table de vérité des propositions suivantes :

1. $\neg P \vee Q$ 2. $(P \wedge Q) \wedge R$ 3. $(P \wedge (Q \wedge R))$ 4. $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 5. $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 6. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$

Exercice 8 Pour chacune des formules suivantes, 1°) construire sa table de vérité ; 2°) indiquer si c'est une tautologie, une contradiction ou ni l'une ni l'autre :

- (a) $\neg(p \vee q) \vee \neg(p \wedge q)$; (b) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$;
- (c) $(p \wedge q) \vee ((\neg(p \wedge r) \vee q) \rightarrow r)$; (d) $(x \vee y \vee z) \leftrightarrow x \vee (((u \vee x) \rightarrow u) \leftrightarrow (y \vee z))$.

Exercice 9 Evaluez les formules suivantes en considèrent uniquement les valeurs des variables données : $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$, avec $Q=f$ $P \wedge (Q \vee R)$, avec $Q=v$ $P \vee (Q \rightarrow R)$, avec $Q=f$

Exercice 10 Précisez en utilisant la méthode des tables de vérité, si les formules suivantes sont des tautologie, des contradictions, ou des formules simplement satisfiables :

1. $A \vee \neg A$ 2. $A \wedge \neg A$ 3. $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ 4. $P \vee \neg (P \wedge Q)$ 5. $\neg P \rightarrow (P \wedge Q)$
6. $P \rightarrow (P \rightarrow P)$ 7. $((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow P$ 8. $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ 9. $(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \leftrightarrow \neg Q)$
10. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

Exercice 11 : Soit une fonction logique f à 4 variables logique, telle que $f = 1$ si et seulement si le nombre de variables de f qui sont à '1' est supérieur ou égal à 2.

1°) Etablir la table de vérité de f.

2°) Donner la forme normale conjonctive de f et la forme normale disjonctive de f

Exercice 12 a) L'ensemble $E = \{ a, ((b \rightarrow a) \vee c), \neg c, (b \vee c) \}$ est il satisfiable ?

b) L'ensemble $A = \{ a, \neg a \}$ est il satisfiable ?

Exercice 13: En associant les énoncés élémentaires « Ali est étudiant », « Djawed est étudiant », « Chiheb est étudiant » aux propositions p, q, r, respectivement ; associer à chacun des énoncés suivants la formule propositionnelle qui semble lui correspondre sémantiquement :

- (a) Ali et Djawed sont étudiants.
- (b) Ali ou Djawed est étudiant.
- (c) Exactement un seul parmi Ali et Djawed est étudiant.
- (d) Ni Ali ni Chiheb ne sont étudiants.
- (e) Au moins l'un des trois n'est pas étudiant.
- (f) Un seul parmi les trois n'est pas étudiant.
- (g) Seulement deux, parmi les trois, sont étudiants.
- (h) Si Ali est étudiant, Djawed l'est.
- (i) Si Ali est étudiant, Djawed l'est ; sinon Djawed ne l'est pas.
- (j) Ali est étudiant à condition que Chiheb le soit.
- (k) Que Chiheb soit étudiant est une condition nécessaire pour que Ali le soit.
- (l) Que Chiheb soit étudiant est une condition suffisante pour que Ali le soit.
- (m) Que Chiheb soit étudiant est une condition nécessaire et suffisante pour que Ali le soit.
- (n) Ali n'est étudiant que si exactement l'un des deux autres l'est.
- (o) Si Ali est étudiant alors au moins l'un des deux autres ne l'est pas.

Exercice 14: On considère les énoncés suivants :

- (A) Si Pierre est rentré chez lui, alors Jean est allé au cinéma.
- (B) Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui.
- (C) Si Jean est allé au cinéma, alors Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui.
- (D) Marie n'est pas à la bibliothèque et Jean est allé au cinéma.
- (E) Pierre est rentré chez lui.

Formaliser cette famille d'énoncés en calcul propositionnel. On notera A, B, C, D, E les cinq formules obtenues. Montrer que l'on peut inférer E des prémisses A, B, C, D :

- en utilisant les *tables de vérité* ;
- en écrivant un *raisonnement en Français*.

Exercice 15 Mohamed, ali et salim sont prévenus de fraude fiscale. Ils prêtent serment de la manière suivante :

Mohamed : Ali est coupable et Salim est innocent. (I)

ALI: Si Mohamed est coupable alors Salim aussi. (II)

SALIM: Je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable. (III)

Soient M, A et S les énoncés « Mohamed est innocent », « Ali est innocent » et « Salim est innocent ».

- 1) Exprimer le témoignage de chacun des suspects dans le symbolisme logique.
- 2) Calculer les valeurs de vérités des trois formules obtenues.
- 3) Les témoignages des trois suspects sont-ils compatibles (simultanément satisfiables) ?
- 4) Le témoignage de l'un des suspects s'ensuit-il de celui d'un autre suspect ? Desquels deux témoignages s'agit-il ?
- 5) En supposant que tous sont innocents, lequel aurait commis un faux serment ?

Exercice 16: On se trouve sur une île dont les habitants sont répartis en deux catégories : les Purs et les Pires. Les Purs disent toujours la vérité, tandis que les Pires mentent toujours. On rencontre trois habitants de l'île : Moe, Jon et Will.

Moe déclare : « Nous sommes Pires tous les trois ».

Jon déclare : « Il y a exactement un Pire parmi nous ».

Que peut-on déduire de ces déclarations ?

Exercice 17: Trois personnes, Ali (A), Belaid (B) et Chérif (C) exercent chacune une profession différente : pharmacien, dentiste ou chirurgien.

Sachant que les implications suivantes sont vraies, retrouver leur profession :

- (A chirurgien \rightarrow B dentiste),
- (A dentiste \rightarrow B pharmacien),
- (B non chirurgien \rightarrow C dentiste).