

## Série de TD N° 01

### **Exercice 1**

1°) Soit p désignant la proposition « l'enfant sait lire » et q désignant la proposition « l'enfant sait écrire ». Donner la traduction dans le langage courant des propositions suivantes :

$$(1) p \wedge q; (2) p \wedge (\neg q); (3) (q \rightarrow p); (4) (\neg p) \vee (\neg q); (5) (\neg p) \wedge (\neg q)$$

2°) Même question avec p la proposition « l'homme est mortel » et q désignant la proposition « l'homme est éternel » et les propositions :

$$(1) (p \vee q); (2) (\neg p) \vee (\neg q); (3) \neg(p \wedge q); (4) p \wedge (\neg q); (5) (p \rightarrow (\neg q))$$

**Exercice 2** Soit p la proposition « X estime Y » et q la proposition « Y estime X ». Ecrire sous forme symbolique les phrases suivantes :

1. X estime Y mais Y ne lui rend pas son estime ;
2. X et Y s'estiment ;
3. X et Y se détestent ;
4. Y est estimé par X mais X est détesté par Y ;
5. X et Y ne se détestent ni l'un ni l'autre.

**Exercice 3** En interprétant P par « je pars », Q par « tu restes » et R par « il n'y a personne », traduisez les formules logiques suivantes en phrases du langage naturel :

$$(P \wedge \neg Q) \rightarrow R \quad (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R$$

**Exercice 4** Les expression suivantes sont elles bien formées ? Pourquoi ?

$$\begin{array}{ll} 1) ((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow \neg \neg P)) & 2) ((P) \vee (Q \wedge R)) \\ 3) (P_1 \rightarrow ((P_2 \rightarrow Q))) & 4) (\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg \neg Q) R \end{array}$$

**Exercice 5** Soit P, Q et R des propositions. Dans chacun des ces cas suivant ; les propositions citées sont elles la négation l'une de l'autre ?

$$1. (P \text{ et } Q); (\text{non } P \text{ et non } Q) \quad 2. (P \rightarrow Q); (\text{non } Q \rightarrow \text{non } P) \quad 3. (P \text{ ou } Q); (P \text{ et } Q)$$

**Exercice 6** Soit a, b et c des réels. Ecrire la négation des propositions suivantes :

$$1. a \leq -2 \text{ ou } a \geq 3 \quad 2. a \leq 5 \text{ et } a \geq -1 \quad 3. a \leq 5 \text{ ou } 3 > c \quad 4. a+1 \text{ et } a > 1$$

**Exercice 7** Donner la table de vérité des propositions suivantes :

$$1. \neg P \vee Q \quad 2. (P \wedge Q) \wedge R \quad 3. (P \wedge (Q \wedge R)) \quad 4. (P \rightarrow Q) \rightarrow R \quad 5. P \rightarrow (Q \rightarrow R) \quad 6. (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$$

**Exercice 8** Pour chacune des formules suivantes, 1°) construire sa table de vérité ; 2°) indiquer si c'est une tautologie, une contradiction ou ni l'une ni l'autre :

$$\begin{array}{ll} (a) \neg(p \vee q) \vee \neg(p \wedge q); & (b) (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)); \\ (c) (p \wedge q) \vee ((\neg(p \wedge r) \vee q) \rightarrow r); & (d) (x \vee y \vee z) \leftrightarrow x \vee (((u \vee x) \rightarrow u) \leftrightarrow (y \vee z)). \end{array}$$

**Exercice 9** Evaluatez les formules suivantes en considèrent uniquement les valeurs des variables données : Q  $\rightarrow$  (P  $\rightarrow$  R), avec Q=f      P  $\wedge$  (Q  $\vee$  R), avec Q=v      P  $\vee$  (Q  $\rightarrow$  R), avec Q=f

**Exercice 10** Précisez en utilisant la méthode des tables de vérité, si les formules suivantes sont des tautologie, des contradictions, ou des formules simplement satisfiables :

$$\begin{array}{llll} 1. A \vee \neg A & 2. A \wedge \neg A & 3. (P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee Q) & 4. P \vee \neg(P \wedge Q) \\ 5. \neg P \rightarrow (P \wedge Q) & 6. P \rightarrow (P \rightarrow P) & 7. ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow P & 8. (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P) \\ 9. (P \leftrightarrow Q) \wedge (P \leftrightarrow \neg Q) & 10. (P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)) \end{array}$$

**Exercice 11** : Soit une fonction logique f à 4 variables logique, telle que f = 1 si et seulement si le nombre de variables de f qui sont à '1' est supérieur ou égal à 2.

1°) Etablir la table de vérité de f.

2°) Donner la forme normale conjonctive de f et la forme normale disjonctive de f

**Exercice 12** a) L'ensemble E= { a, ((b  $\rightarrow$  a)  $\vee$  c),  $\neg$  c, (b  $\vee$  c)} est il satisfiable ?  
b) L'ensemble A= { a,  $\neg$  a} est il satisfiable ?

**Exercice 13:** En associant les énoncés élémentaires « Ali est étudiant », « Djawed est étudiant », « Chiheb est étudiant » aux propositions p, q, r, respectivement ; associer à chacun des énoncés suivants la formule propositionnelle qui semble lui correspondre sémantiquement :

- (a) Ali et Djawed sont étudiants.
- (b) Ali ou Djawed est étudiant.
- (c) Exactement un seul parmi Ali et Djawed est étudiant.
- (d) Ni Ali ni Chiheb ne sont étudiants.
- (e) Au moins l'un des trois n'est pas étudiant.
- (f) Un seul parmi les trois n'est pas étudiant.
- (g) Seulement deux, parmi les trois, sont étudiants.
- (h) Si Ali est étudiant, Djawed l'est.
- (i) Si Ali est étudiant, Djawed l'est ; sinon Djawed ne l'est pas.
- (j) Ali est étudiant à condition que Chiheb le soit.
- (k) Que Chiheb soit étudiant est une condition nécessaire pour que Ali le soit.
- (l) Que Chiheb soit étudiant est une condition suffisante pour que Ali le soit.
- (m) Que Chiheb soit étudiant est une condition nécessaire et suffisante pour que Ali le soit.
- (n) Ali n'est étudiant que si exactement l'un des deux autres l'est.
- (o) Si Ali est étudiant alors au moins l'un des deux autres ne l'est pas.

**Exercice 14:** On considère les énoncés suivants :

- (A) Si Pierre est rentré chez lui, alors Jean est allé au cinéma.
- (B) Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui.
- (C) Si Jean est allé au cinéma, alors Marie est à la bibliothèque ou Pierre est rentré chez lui.
- (D) Marie n'est pas à la bibliothèque et Jean est allé au cinéma.
- (E) Pierre est rentré chez lui.

Formaliser cette famille d'énoncés en calcul propositionnel. On notera A, B, C, D, E les cinq formules obtenues.

Montrer que l'on peut inférer E des prémisses A, B, C, D :

- en utilisant les *tables de vérité* ;
- en écrivant un *raisonnement en Français*.

**Exercice 15** Mohamed, ali et salim sont prévenus de fraude fiscale. Ils prêtent serment de la manière suivante :

Mohamed : Ali est coupable et Salim est innocent. (I)

ALI: Si Mohamed est coupable alors Salim aussi. (II)

SALIM: Je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable. (III)

Soient M, A et S les énoncés « Mohamed est innocent », « Ali est innocent » et « Salim est innocent ».

- 1) Exprimer le témoignage de chacun des suspects dans le symbolisme logique.
- 2) Calculer les valeurs de vérités des trois formules obtenues.
- 3) Les témoignages des trois suspects sont-ils compatibles (simultanément satisfiables) ?
- 4) Le témoignage de l'un des suspects s'ensuit-il de celui d'un autre suspect ? Desquels deux témoignages s'agit-il ?
- 5) En supposant que tous sont innocents, lequel aurait commis un faux serment ?

**Exercice 16:** On se trouve sur une île dont les habitants sont répartis en deux catégories : les Purs et les Pires. Les Purs disent toujours la vérité, tandis que les Pires mentent toujours. On rencontre trois habitants de l'île : Moe, Jon et Will.

Moe déclare : « Nous sommes Pires tous les trois ».

Jon déclare : « Il y a exactement un Pire parmi nous ».

Que peut-on déduire de ces déclarations ?

**Exercice 17:** Trois personnes, Ali (A), Belaid (B) et Chérif (C) exercent chacune une profession différente : pharmacien, dentiste ou chirurgien.

Sachant que les implications suivantes sont vraies, retrouver leur profession :

- ( A chirurgien → B dentiste ),
- ( A dentiste → B pharmacien ),
- ( B non chirurgien → C dentiste ).