Université Mohamed Seddik Ben Yahia -Jijel-
Département D'Informatique
2eme année Licence

Module : logique Mathématique
2020/2021

Série de TD N° 03

Exercice 1 Utiliser la méthode de résolution pour prouver ou infirmer les affirmations suivantes.

1. $\models p \Rightarrow p$
2. $\models ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3. $\models ((s \Rightarrow r) \wedge p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg r \wedge \neg s \wedge p$
4. $\models [(p \wedge q) \vee (r \wedge q)] \Rightarrow (p \vee r)$
5. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \Rightarrow r$
6. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \wedge r$
7. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models p \wedge q \wedge r$.
8. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

Exercice 2 prenez les formules de l'exercice 4 de la série 2, et vérifier si ces formule sont satisfiables ou pas en utilisant la méthode de résolution.

Exercice 3 : Soit la théorie T du calcul propositionnel :

A1 : $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ et la règle du Modus Ponens : $A, A \rightarrow B \vdash B$.
A2 : $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
A3 : $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Montrer dans la théorie *T* que :

1. $A \vdash A \rightarrow A$ 2. $\vdash B \rightarrow B$ 3. $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$ 4. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta \vdash \alpha \rightarrow \gamma$ 5. $\neg\neg\beta \vdash \beta$
6. $\beta \vdash \neg\neg\beta$ 7. $\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta \vdash \neg\alpha$, 8. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$, 9. $\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha$

Exercice 4 : Montrer dans la théorie *T* que :

1. $\beta \rightarrow \alpha, \neg\alpha \vdash \neg\beta$ 2. $\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \gamma \vdash \neg\beta \rightarrow \gamma$ 3. $\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \gamma \vdash \neg\gamma \rightarrow \beta$
4. $\vdash \neg(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

Exercice 3 : Montrer que les formules suivantes sont des théorèmes :

1. $(A \rightarrow A)$
2. $(\neg B \rightarrow (\neg B \rightarrow (B \rightarrow A)))$
3. $(\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))$
4. $((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$

Exercice 4 : Soient les deux formules F1, F2 et suivantes :

F1 $\equiv (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
F2 $\equiv ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$

1) Montrer, à l'aide du théorème de déduction, que F1 et F2 sont des théorèmes.
2) Montrer, maintenant, que F1 et F2 sont des théorèmes ; et cela sans utiliser d'hypothèses.

Exercice 5 : Effectuer une déduction naturelle montrant les raisonnements ci-dessous sont correctes:

1. $q \rightarrow (p \rightarrow r) \vdash (q \wedge p) \rightarrow r$.
2. $r \vdash p \rightarrow (p \wedge r)$.
3. $P \wedge R, R \wedge S \vdash P \wedge S$
4. $Q, Q \rightarrow \neg R \vdash \neg R \vee T$
5. $T \rightarrow R \vdash (P \wedge T) \rightarrow R$
6. $(Q \wedge R) \vee (T \rightarrow R), \neg R \vdash \neg T$
7. $P, \neg R \vdash \neg(P \rightarrow R)$

Exercice 6 : Les raisonnements suivants sont corrects. Trouver une déduction naturelle qui le prouve.

1. $P \rightarrow (Q \vee R), \neg Q, \neg R \vdash \neg P$
2. $\neg(P \rightarrow Q) \vdash P \wedge \neg Q$
3. $(P \rightarrow Q) \rightarrow R, \neg R \vdash P \wedge \neg Q$
4. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow S), \neg S \vee \neg Q, P \rightarrow Q \vdash \neg R \vee \neg P$