Chapitre I
Système électrique monophasé

I. 1. Définition et représentation d'une grandeur sinusoïdale

I. 1. 1. Grandeur périodique, alternative

Considérons une grandeur g(t) (tension ou courant) variable dans le temps. On dit que la grandeur g(t) est périodique si seulement si sa valeur instantanée g(t) est telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}\, , g(t) \equiv g(t + n\, T) \qquad \text{(I.1)}$$

T est la période (Unité seconde, s).

On peut définir la fréquence f (Unité Hertz, Hz) par :

$$f = \frac{1}{T} \qquad \text{(I.2)}$$

On dit que la grandeur g(t) est alternative, si sa valeur instantanée g(t) change de signe régulièrement, tantôt positif et tantôt négatif. On appelle alternance positif la partie où g(t) est positive, alternance négative celle où g(t) est négative.

Afin de fixer les idées, la figure I. 1 représente quelques ondes de grandeurs continues et alternatives

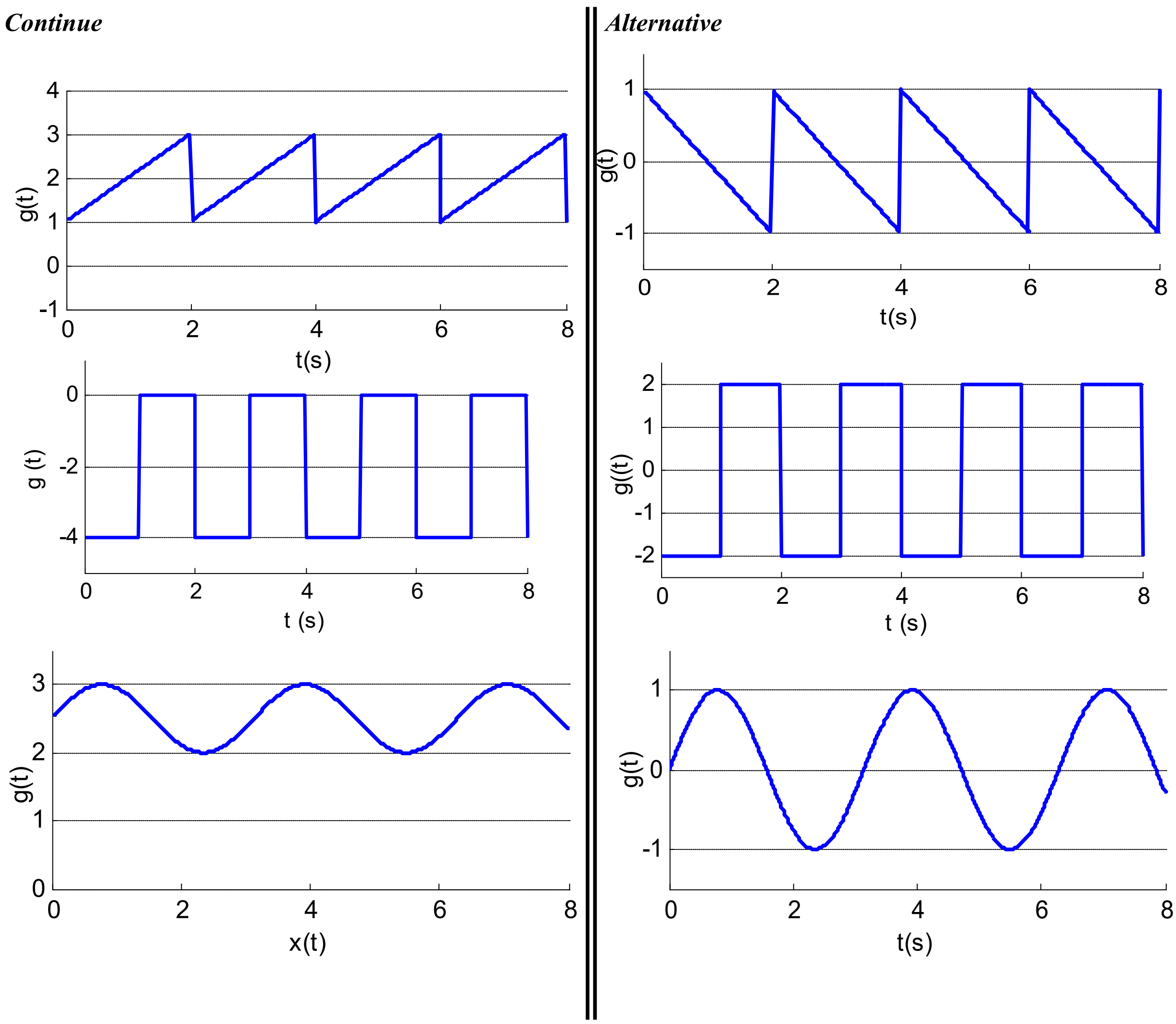


Figure I. 1. Quelques formes de grandeurs continues et alternatives

I. 1. 2. Grandeur électrique sinusoïdale

Dans la majorité des applications en génie électrique, l'onde utilisée est alternative sinusoïdale plutôt que des ondes triangulaires, carrées, ou autres formes.
Une grandeur sinusoïdale g(t) est définit par l'expression mathématique :

$$g(t) = G_m \sin(wt + \varphi) \tag{I.3}$$

G_m: Amplitude (même unité de g(t)).

$wt + \varphi$: Phase instantanée (unité Radian, rd).

φ : Phase initiale (Unité Radian, rd)

w : Pulsation (Unité radian /seconde, rd/s). $w = \frac{2\pi}{T}$ Ou $w = 2\pi f$.

La figure I. 2 illustre l'évolution temporelle de tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ (Unité volt, V)), telles que :

$$v_1(t) = 10\ \sin(100\,\pi\,t) \tag{I.4}$$

$$v_2(t) = 10\ \sin\left(100\,\pi\,t - \frac{\pi}{6}\right) \tag{I.5}$$

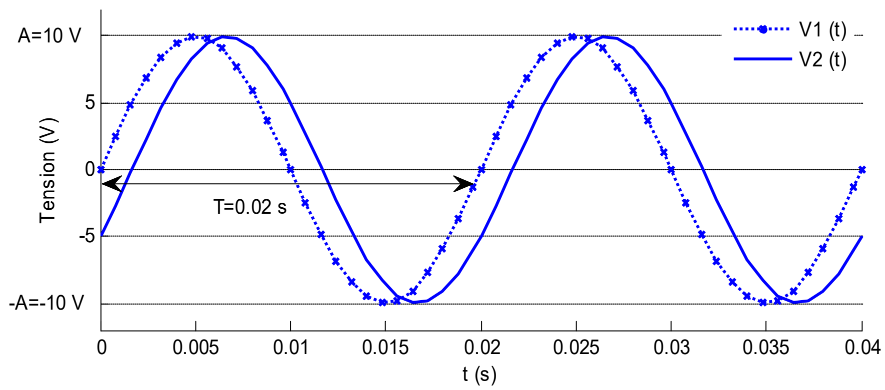


Figure I. 2. Évolution temporelle des tensions sinusoïdales

On peut tracer l'évolution angulaire de la tension, en changeant la base du temps par celle des angles, figure I. 3.

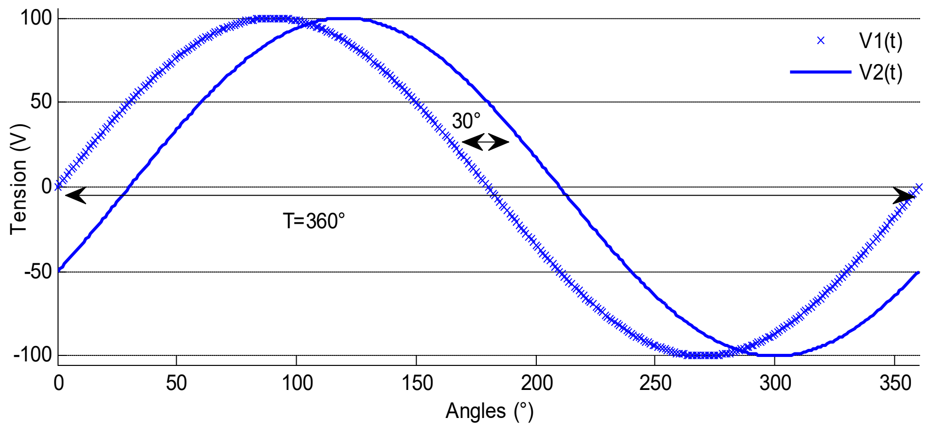


Figure I. 3. Évolution angulaire des tensions sinusoïdales

I. 1. 3. Valeur moyenne et valeur efficace

La valeur moyenne d'une grandeur périodique g est l'inverse de la période multiplié par l'intégrale sur une période de la grandeur g, telle que

$$G_{moy} = \frac{1}{T}\int_{(T)} g(t)\, dt \qquad (I.6)$$

— *Seconde définition d'une grandeur alternative, on dit qu'une grandeur est alternative si seulement si sa valeur moyenne est nulle.*

La valeur efficace d'une grandeur périodique g est la racine carrée de la valeur moyenne du carré de la grandeur g, telle que

$$G = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} g(t)^2\, dt} \qquad (I.7)$$

— *En sinusoïdale la valeur efficace est égale la valeur de l'amplitude divisée par* $\sqrt{2}$.

$$G = \frac{G_m}{\sqrt{2}} \qquad (I.8)$$

I. 1. 4. Quelques formes usuelles des grandeurs électriques

En génie électrique, existe d'autres formes des grandeurs électriques alternatives, outre que les grandeurs sinusoïdales, telles que les grandeurs alternatives rectangulaires (dite aussi carrées) ou triangulaires ou sous d'autres formes. Ces dernières formes de grandeurs ont un domaine d'application bien spécifique. Le tableau I.1 regroupe quelque forme et montre les caractéristiques de chacune.

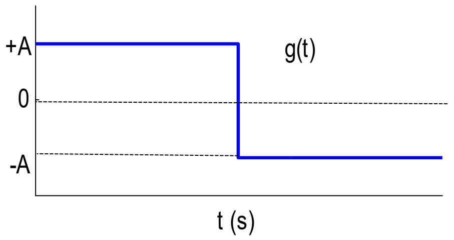
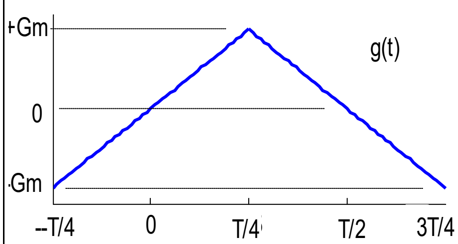
Nature de la grandeur et son expression	*Evolution temporelle*	*Grandeur efficace*
— Rectangulaire $g(t) = \begin{cases} \forall\, t\epsilon \left[0, \frac{T}{2}\right[& + G_m \\ \forall\, t\epsilon \left[\frac{T}{2}, T\right[& - G_m \end{cases}$		$G = G_m$
— Triangulaire $g(t) = \begin{cases} \forall\, t\epsilon \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right[& \frac{4G_m}{T}\ t \\ \forall\, t\epsilon \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right[& - 4G_m\, T\ t + 2\, G_m \end{cases}$		$G = \frac{G_m}{\sqrt{3}}$

Tableau I. 1. Présentation de quelques formes usuelles

I. 1. 5. Représentation vectorielle d'une grandeur électrique sinusoïdale

— Considérons le cercle trigonométrique, figure I. 4. a; la valeur instantanée d'une grandeur sinusoïdale g(t) peut être représentée par le mouvement de la projection du point M sur l'axe des ordonnées situé sur le cercle et décrivant un mouvement de rotation uniforme (à la vitesse angulaire ω).

— Sachant que toutes grandeurs électriques appartiennent au même réseau électriques (installation électriques) doivent avoir la même fréquence et par conséquence la même pulsation. Autrement toutes les grandeurs représentables dans le même diagramme vectorielle ayant même pulsation, leurs vecteurs représentatifs tournent à la même vitesse angulaire ω. On peut faire abstraction de la rotation. Figure I. 4. b.

— En génie électrique on caractérise les grandeurs par leurs valeurs efficaces, on donne au module du vecteur $\overrightarrow{OM}$ la valeur efficace G, on peut prendre l'instant initiale t=0 comme instant de référence pour représenter la grandeur g(t) comme montre la figure I. 4. c.

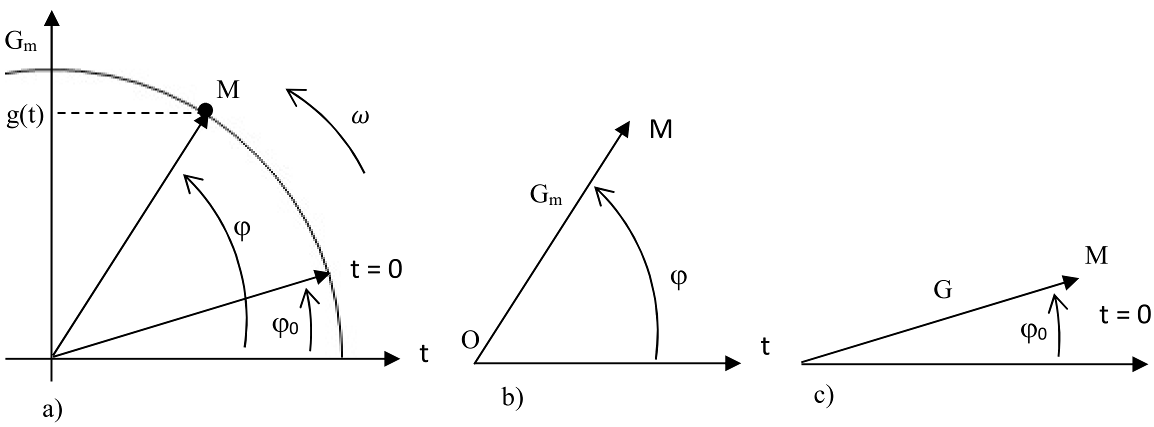


Figure I. 4. Différentes représentations vectorielles d'une grandeur sinusoïdale

I. 1. 6. Notation complexe d'une grandeur électrique sinusoïdale

On démontre mathématiquement que l'on peut associer un nombre complexe à une grandeur alternative. L'intérêt est de faciliter les calculs chaque fois que nous aurons à calculer le produit, le quotient, la racine, la dérivée, l'intégrale, … de fonctions sinusoïdales.

$$g(t) = G\sqrt{2}\sin(wt + \varphi) = Im(G\sqrt{2}e^{(j\,\omega t+\varphi)}) \qquad \text{(I. 9)}$$

Par convention, pour le reste de tout le document on peut éviter de mettre chaque fois imaginaire (ou réelle) de nombre complexe.

En tenant compte des considérations de la section précédente, on peut écrire

$$g(t) \equiv \bar{G} = Ge^{j\,\varphi} \qquad \text{(I. 10)}$$

Ou simplement, sous la forme polaire

$$\overline{G} = G^{\llcorner\varphi} \qquad \text{(I.11)}$$

Soient deux grandeurs sinusoïdales g_1 et g_1 telles que

$$g_1(t) = G_1\sqrt{2}\sin(wt + \varphi_1) \xrightarrow{complexe} \overline{G_1} = G_1{}^{\llcorner \varphi 1} \tag{I. 12}$$

$$g_2(t) = G_2\sqrt{2}\sin(wt + \varphi_2) \xrightarrow{complexe} \overline{G_2} = G_2{}^{\llcorner \varphi 2} \tag{I. 13}$$

— *Addition ou soustraction* de deux grandeurs sinusoïdales de même fréquence résulte une grandeur sinusoïdale de même fréquence aussi, telle que

$$g_1(t) \pm g_2(t) = G\sqrt{2}\sin(wt + \varphi) \xrightarrow{complexe} \overline{G} = G^{\llcorner \varphi} \tag{I. 14}$$

On trouve

$$G\cos\varphi = G_1\cos\varphi_1 \pm G_2\cos\varphi_2 \tag{I. 15}$$

$$G\sin\varphi = G_1\sin\varphi_1 \pm G_2\sin\varphi_2 \tag{I. 16}$$

On déduit

$$G = \sqrt{G^2cos^2\varphi + G^2sin^2\varphi} \tag{I. 17}$$

$$\varphi = arc\ tg\left(\frac{G\ sin\varphi}{G\ cos\varphi}\right) \tag{I. 18}$$

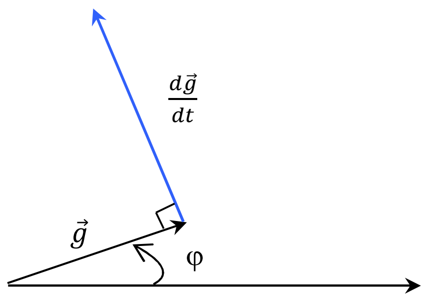
— *Dériver* une grandeur sinusoïdale revient à multiplier la valeur par w et déphasé en avant de $\frac{\pi}{2}$.

Mathématiquement

$$g(t) = G\sqrt{2}\sin(wt + \varphi)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = wG\sqrt{2}\sin\left(wt + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Calcul Vectoriel



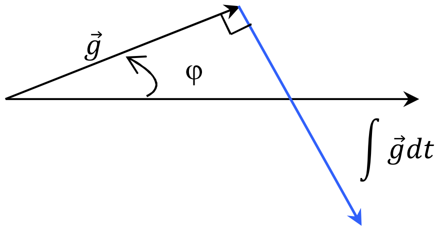
— *Intégrer* une grandeur sinusoïdale revient à diviser la valeur par w et déphasé en arrière de $\frac{\pi}{2}$.

Mathématiquement

$$g(t) = G\sqrt{2}\sin(wt + \varphi)$$

$$\int g(t)\ dt = \frac{1}{w}G\sqrt{2}\sin\left(wt + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Calcul Vectoriel



I. 2. Loi d'Ohm en courant sinusoïdale, Impédance

Un circuit électrique linéaire RLC comporte des résistances R, des bobines caractérisées par leurs inductances propres L et des condensateurs caractérisés par leurs capacités C.

En régime établit, l'alimentation de ce circuit par une tension sinusoïdale $u(t)$ débutant un courant électrique sinusoïdale $i(t)$.

On définit l'impédance comme étant quotient de la tension $u(t)$ par le courant $i(t)$ dont son unité est Ohm, Ω.

En utilisant la notion complexe

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} \quad \text{(I. 19)}$$

En forme algébrique (ou cartésienne)

$$\overline{Z} = R + j\,X \quad \text{(I. 20)}$$

R : Résistance du circuit, (Unité Ω).

X : Réactance du circuit, (Unité Ω).

En forme polaire

$$\overline{Z} = Z^{\llcorner\varphi} \quad \text{(I.21)}$$

z : Module de l'impédance, (Unité Ω). $z = \sqrt{R^2 + X^2}$

φ : Argument de l'impédance, (Unité rad ou °). $\varphi = arc\ tg\left(\frac{X}{R}\right)\left(ou\ \ \varphi = arc\ sin\left(\frac{X}{Z}\right)\ ou\ \varphi = arc\ cos\left(\frac{R}{Z}\right)\right)$

Afin d'examiner tous les cas possibles des circuits électriques linéaires composés d'une résistance, d'une inductance et d'une capacité (RLC) en série, on vous propose le tableau I. 2

Selon la valeur et le signe de l'argument φ de l'impédance, il est possible de déterminer le comportement dominant ou la tendance du circuit électrique. Le courant électrique est pris comme grandeur de référence, également appelée grandeur choisie à l'origine des phases.

— Si $\varphi = 0$, la tension est le courant sont en phase. Le circuit se comporte alors soit comme une résistance pure, soit comme un cas particulier de la résonance électrique, caractérisé par $Lw - \frac{1}{Cw} = 0$. Dans cette situation, l'intensité du courant atteint sa valeur maximale.
— Si $\varphi > 0$, la tension est en avance par rapport au courant. La tendance dominante est alors inductive, le circuit est dit inductif et est caractérisé par $Lw - \frac{1}{Cw} > 0$.
— Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la tension est en avance de quadrature sur le courant, ce qui correspond au cas d'un circuit constitué d'une bobine pure.
— Si $\varphi < 0$, la tension est en retard par rapport au courant. La tendance dominante est alors capacitive, le circuit est dit capacitif et est caractérisé par $Lw - \frac{1}{Cw} < 0$.
— Si $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, la tension est en avance de quadrature sur le courant, ce qui correspond au cas d'un circuit constitué d'un condensateur pur.

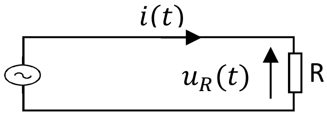
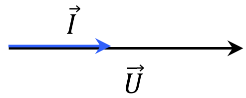
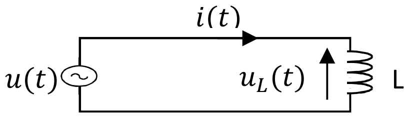
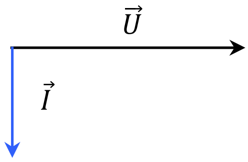
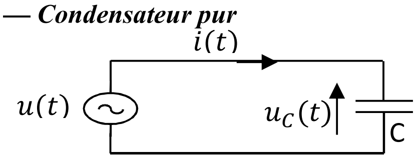
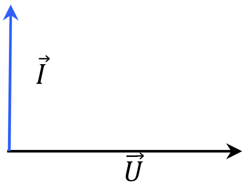
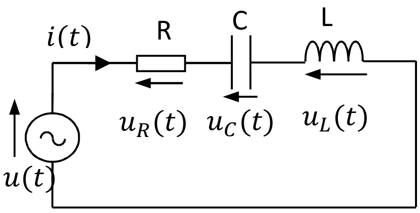
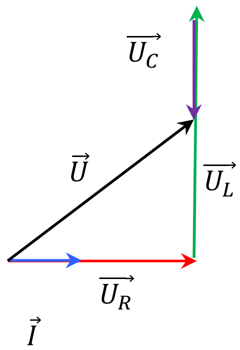
Nature du circuit	Expression de l'impédance	Etude vectorielle
— ***Résistance pure***  $u(t) = U\sqrt{2}\sin(wt)$ ou $\overline{U} = U^{\llcorner 0}$ $\overline{U} = \overline{Z}\ \ \overline{I}$	$\overline{U} = \overline{U_R}$ $\overline{U_R} = R\ \ \overline{I}$ $\overline{Z} = R$ La tension est en phase avec le courant	
— ***Bobine pure***  $u(t) = U\sqrt{2}\sin(wt)$ ou $\overline{U} = U^{\llcorner 0}$ $\overline{U} = \overline{Z}\ \ \overline{I}$	$\overline{U} = \overline{U_L}$ $\overline{U_L} = jLw\,\overline{I}$ ou $u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ $\overline{Z} = j\ Lw$ Le courant est en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension d'alimentation	
— ***Condensateur pur***  $u(t) = U\sqrt{2}\sin(wt)$ ou $\overline{U} = U^{\llcorner 0}$ $\overline{U} = \overline{Z}\ \ \overline{I}$	$\overline{U} = \overline{U_C}$ $\overline{U_C} = j\frac{1}{Cw}\overline{I}$ ou $u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$ $\overline{Z} = -j\ \frac{1}{Cw}$ Le courant est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension d'alimentation	
— ***Circuit RLC série***  $u(t) = U\sqrt{2}\sin(wt + \varphi)$ ou $\overline{U} = U^{\llcorner \varphi}$ $\overline{U} = \overline{Z}\ \ \overline{I}$ $i(t) = I\sqrt{2}\sin(wt)$ ou $\overline{I} = I^{\llcorner 0}$	$\overline{U} = \overline{U_R} + \overline{U_L} + \overline{U_C}$ $\overline{U_R} = R\ \ \overline{I}$ $\overline{U_L} = jLw\,\overline{I}$ ou $u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ $\overline{U_C} = j\frac{1}{Cw}\overline{I}$ ou $u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$ $\overline{Z} = R + j\left(Lw - \frac{1}{Cw}\right)$ $\varphi = arc\ tg\left(\frac{Lw - \frac{1}{Cw}}{R}\right)$ Le courant est déphasé de φ par rapport à la tension d'alimentation	

Tableau I. 2. Présentation des différents cas de circuit linéaire RLC en série

L'association des impédances se fait de la même manière que celle des résistances, en remplaçant la résistance R par l'impédance complexe $\overline{Z}$, en fonction de leurs dispositions :

En série $\overline{Z} = \sum_i \overline{Z_i}$ (I.22)

En parallèle $\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{\sum_i \overline{Z_i}}$ (I.23)

I. 3. Calculs des puissances

I. 3. 1. Définitions, expressions et unités

Considérons une installation électrique alimentée par une source de tension alternative $u(t)$ et parcourue par un courant électrique $i(t)$.

— L'énergie électrique($exprimée\ en\ Joul, J$) reçue par l'installation pendant un intervalle de temps infiniment court dt est donnée par :

$$dW(t) = u(t)i(t)\,dt \tag{I.24}$$

— La puissance instantanée $p(t)$ ($exprimée\ en\ Watt, W$) fournie par la source de tension $u(t)$ est donnée par

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = u(t)i(t) \tag{I.25}$$

— La puissance active P ($exprimée\ en\ Watt, W$) correspond à la valeur moyenne de la puissance instantanée sur une période

$$P = \frac{1}{T}\int u(t)i(t)\,dt \tag{I.26}$$

— La puissance apparente S ($exprimée\ en\ Volt - ampère, VA$), par analogie avec le courant continu, où le produit de la tension et du courant représente la puissance apparente, est donnée par

$$S = U\,I \tag{I.27}$$

— Le facteur de puissance est défini comme le quotient de la puissance active P par la puissance S.

$$F = \frac{P}{S} \tag{I.28}$$

I. 3. 2. Puissances en sinusoïdale

Lorsque la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ sont sinusoïdaux telles que :

$$u(t) = U\sqrt{2}\sin(wt + \varphi) \tag{I.29}$$

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(wt) \tag{I.30}$$

— La puissance instantanée $p(t)$ est la somme de la puissance active P et d'un terme sinusoïdal de pulsation $2w$, appelé puissance fluctuante.

$$p(t) = U\,I\cos\varphi + U\,I\cos(2wt + \varphi) \tag{I.31}$$

— La puissance active P

$$P = U\,I\cos\varphi \tag{I.32}$$

— Le facteur de puissance F

$$F = \cos\varphi \tag{I. 33}$$

— La puissance réactive Q ($exprimée\ en\ Volt - ampère\ réactiv, VAR$)

$$Q = U\,I\sin\varphi \tag{I. 34}$$

I. 3. 3. Puissance complexe

Considérons une installation électrique caractérisée par une impédance $\overline{Z} = R + j\,X$, alimentée par une source de tension $\overline{U}$ et parcourue par un courant électrique $\overline{I}$

— La puissance apparente complexe $\overline{S}$ $(exprimée\ en\ volt - ampères, VA)$ est définie comme le produit de la tension et du courant complexes conjuguées et s'écrit :

$$\overline{S} = \overline{U}\ \overline{I^*} \tag{I. 35}$$

En développant, on obtient :

$$\overline{S} = P + j\,Q \tag{I. 36}$$

On définit les puissances précédemment introduites en fonction de la puissance complexe à l'aide des formules suivantes :

—*Puissance active:*

$$P = U\,I\,cos(\varphi) = R\,I^2 = \frac{U_R^2}{R} = Rel\left(\overline{U}\ \overline{I^*}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{S} + \overline{S^*}\right) \tag{I. 37}$$

—*Puissance réactive :*

$$Q = U\,I\,sin(\varphi) = X\,I^2 = \frac{U_X^2}{X} = Im(U\,I^*) = \frac{1}{2j}\left(\overline{S} - \overline{S^*}\right) \tag{I. 38}$$

—*Puissance apparente :*

$$S = U\,I\ = Z\,I^2 = \frac{U^2}{Z} = module\ (U\,I^*) \tag{I. 39}$$

—*Facteur de puissance :*

$$F = cos(\varphi) = \frac{R}{Z} = \frac{P}{S} \tag{I. 40}$$

I. 3. 4. Energies active, réactive, apparente

Tout dispositif électrique fonctionnant en courant alternatif (moteur, transformateur, etc.) met en jeu deux formes d'énergie : l'énergie active et l'énergie réactive.

—***L'énergie active*** (*exprimée en kWh*) est liée à la puissance active P (*en kW*) des récepteurs. Elle est intégralement convertie en travail mécanique et en chaleur (pertes).

—***L'énergie réactive*** (*exprimée en* kvarh) est associée à la puissance réactive Q (*en Kvar*) des récepteurs. Contrairement à l'énergie active, qui est convertie en travail utile et en chaleur, l'énergie réactive ne produit pas directement d'effet utile mais est indispensable au bon fonctionnement de nombreux équipements électriques.

Dans un circuit inductif (exemple : moteurs, transformateurs, bobines) l'énergie réactive est positive ($Q > 0$) , stockée temporairement dans le champ magnétique des inductances avant d'être restituée au réseau et elle est nécessaire à l'excitation des circuits magnétiques.

Dans un circuit capacitif (exemple : condensateurs, câbles longs) l'énergie réactive est négative ($Q < 0$) , stockée sous forme d'énergie électrostatique dans les condensateurs avant d'être renvoyée à la source et elle compense l'énergie réactive inductive et peut être utilisée pour améliorer le facteur de puissance.

I. 3. 5. Composantes du triangle des puissances

Dans un circuit électrique alimenté par une tension sinusoïdale, chaque type d'énergie (active ou réactive) est associé à un courant spécifique :

—***Le courant actif I_a*** *(ou composante active du courant)* il est responsable du transfert de l'énergie P , ce courant est en phase avec la tension d'alimentation et correspond à la puissance réellement consommée pour effectuer un travail utile (mécanique , thermique, etc.).

—***Le courant réactif I_r*** *(ou composante réactive du courant)* il est responsable du transfert de l'énergie réactive Q, ce courant est déphasé de 90° par rapport à la tension d'alimentation, et ne produit pas de puissance active, mais il est nécessaire pour le fonctionnement des éléments inductifs (moteurs, transformateurs) ou capacitifs soit en retard (récepteur inductif), soit en avance (récepteur capacitif).

—***Le courant apparent I*** est le courant résultant qui parcourt la ligne depuis la source jusqu'au récepteur.

Ces courants se composent alors vectoriellement comme représente la figure I. 5.

Mathématiquement

$$I_a = I \cos(\varphi)$$

$$I_r = I \sin(\varphi)$$

$$I = \sqrt{{I_a}^2 + {I_r}^2}$$

Présentation vectorielle

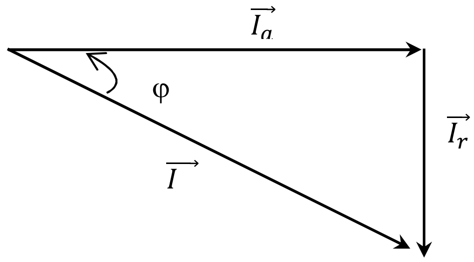


Figure 1. 5. Présentation vectorielle des deux composantes du courant

On peut déduit facilement le triangle des puissances

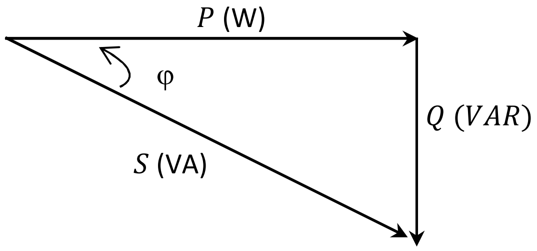
Mathématiquement

$$S = U\,I$$

$$P = s \cos \varphi$$

$$Q = s \sin \varphi$$

Présentation vectorielle



I. 3. 6. Conservation des puissances active et réactive

Les réseaux électriques sont constitués par un ensemble de dipôles; certains sont producteurs d'énergie (alternateurs, condensateurs) d'autres sont consommateurs d'énergie. Le théorème de Boucherot formulé en 1900 simplifier l'analyse du fonctionnement de ces réseaux électriques en se basant sur les puissances mises en jeu plutôt que sur les impédances.

— Théorème de Boucherot :

Dans un réseau électrique sinusoïdal constitué de n dipôles $(k = 1, 2, \dots, n)$, *la puissance active P (respectivement la puissance réactive Q) est égale à la somme algébrique des puissances actives* P_k *(respectivement des puissances réactives* Q_k*) des dipôles. Ceci s'applique que les dipôles soient producteurs ou consommateurs, en actif comme en réactif, c'est-à-dire quel que soit le signe des termes* P_k *et* Q_k.

Mathématiquement

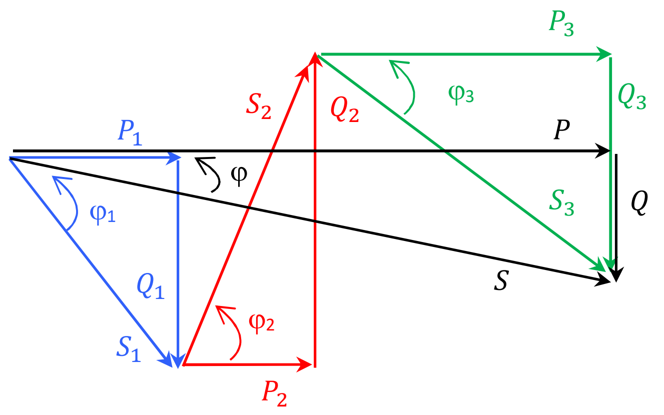
$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k$$

$$Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k$$

$$S \neq \sum_{k=1}^{n} S_k$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Présentation vectorielle



En appliquant ce théorème, les ingénieurs en électricité peuvent concevoir et gérer efficacement les réseaux électriques en minimisant les effets négatifs de l'énergie réactive et en optimisant la transmission de l'énergie active

I . 4. Exercices

Exercice N° 01

La tension $u(t)$ représentée par la figure I. 6.

1. Calculer la valeur crête à crête, la fréquence et l'amplitude de $u(t)$
2. Déterminer la nature de $u(t)$.
3. Etablir l'expression de $u(t)$.
4. Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace de $u(t)$.

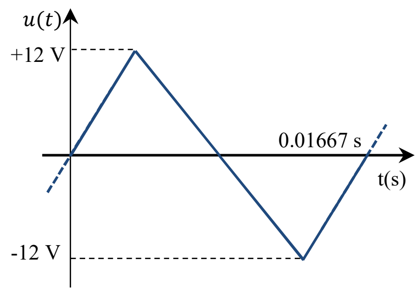


Figure I. 6. Evolution temporelle de la tension $u(t)$

Exercice N° 02

Les deux courants électriques, notés $i_1(t)$ et $i_2(t)$, sont représentés par la figure I. 7.

1. Etablir l'expression de chaque courant.
2. Calculer la valeur moyenne de chaque courant.
3. Calculer la valeur efficace de chaque courant.

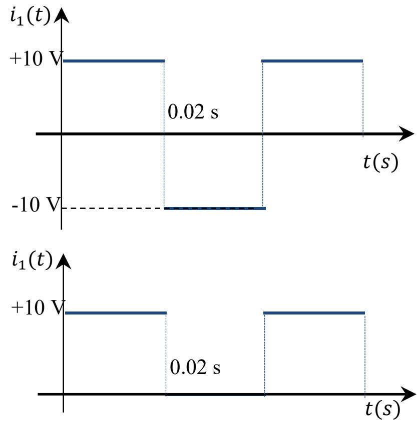


Figure I. 7. Evolution temporelle des courants $I_1(\mathrm{t}) et I_2(\mathrm{t})$

Exercice N° 03

Considérons une grandeur électrique sinusoïdale $g(t)$ donnée par l'expression suivante:

$$g(t) = 220\sqrt{2}\, cos\left(100\,\pi t - \frac{\pi}{6}\right) (Volt)$$

1. Déterminer l'amplitude, la pulsation, la fréquence et la phase initiale de $g(t)$.
2. Tracer l'évolution de $g(t)$en fonction du temps sur un intervalle représentatif.
3. Calculer la valeur moyenne de $g(t)$.
4. Calculer la valeur efficace de $g(t)$.

Exercice N° 04

On applique entre les bornes A et B d'un circuit électrique une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace 220 V et de fréquence 50 Hz.

I. On dispose en série entre les bornes A et B une résistance R = 100 Ω et une bobine de résistance négligeable et d'inductance $L = 0.5\ H$. Déterminer :

I.1. La valeur efficace de l'intensité du courant dans le circuit.

I.2. La valeur efficace des tensions aux bornes de la résistance et aux bornes de la bobine.

II. Dans le but de rendre le courant en phase avec la tension aux bornes du circuit A et B, on ajoute un condensateur en série avec la résistance et la bobine.

II.1. Calculer la valeur de la capacité C du condensateur permettant la correction du facteur de puissance.

II.2. Après correction du facteur de puissance, déterminer:

II.2.1. L'intensité efficace du courant.

II.2.2. La tension efficace aux bornes du condensateur.

Exercice N° 05

On considère un circuit RLC en série parcouru par un courant sinusoïdal monophasé de valeur efficace 100 mA et de pulsation $100\pi\ rd/s$. ($R = 1K\Omega\ L = 1.1\ H$ et $C = 20\ \mu F$)

1. Calculer l'impédance complexe du circuit.
2. Calculer la valeur efficace des tensions aux bornes de chaque élément et de l'ensemble.
3. Calculer le déphasage φ entre la tension et le courant.
4. Le montage est-il inductif ou capacitif? Justifier votre réponse.
5. Calculer la puissance active consommée par le circuit.

Exercice N° 06

Pour les trois circuits suivants, représentés par la figure I.8.

Calculer pour chaque circuit:

1. L'impédance complexe totale.
2. Les intensités i, i1 et i2.
3. La tension aux bornes des résistances.

A.N. $R = 2\Omega,\ C = 10\mu F,\ L = 5\ \mu H,\ e(t) = 10\sqrt{2}\,sin(10^5 t)\ V$

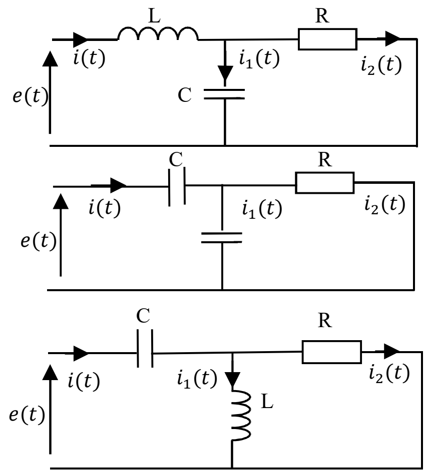


Figure I.8. Trois circuits électriques

Exercice N° 07

Le circuit représenté sur la figure 1.9 est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace V=100 V et de fréquence 50 Hz. Les composants de ce circuit sont caractérisés directement par leur impédance complexe.

1. Calculer la valeur efficace du courant.
2. Calculer la phase du courant (On considère la tension $\overline{V}$ à l'origine des phases).
3. Ecrire la loi de maille (deuxième loi de Kirchhoff) qui régit ce circuit.
4. Représenter le diagramme de Fresnel des grandeurs de la loi des mailles.

Exercice N° 08

Tracer le triangle des puissances pour le circuit série de la figure.1. 9.

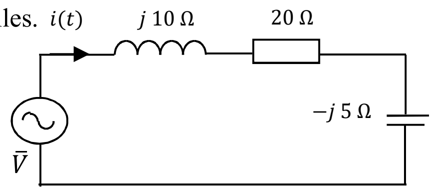


Figure I.9. Circuit électrique RLC série

Exercice N° 09

Un moteur à induction présente les caractéristiques suivantes :

— Rendement de 85%.

—Puissance mécanique fournie de 1492 W.

—Facteur de puissance est de 0,8 inductif.

Déterminer tous les paramètres définissant la puissance électrique fournie au moteur.

Exercice N° 10

Déterminer le triangle des puissances associé à la combinaison des trois charges suivantes :

—Charge n°1 : 250 VA, FP = 0,5 inductif ;

—Charge n°2 :180 W, FP = 0,8 capacitif ;

—Charge n°3 : 300 VA, 100 vars inductifs.

Exercice N° 11

Un transformateur de puissance nominale 25 kVA alimente une charge de 12 kW ayant un facteur de puissance de 0,6 inductif.

1. Déterminer le taux de charge du transformateur en %.
2. Si ce transformateur doit alimenter d'autres charges ayant un facteur de puissance égal à l'unité, combien de kW sont encore disponibles avant d'atteindre la charge nominale du transformateur ?
3. Déterminer la puissance supplémentaire en kVA que le transformateur peut alimenter pour atteindre sa charge nominale, en supposant que ces charges ont un facteur de puissance de 0,866 capacitif ?

Exercice N° 12

Une machine industrielle monophasée est alimentée sous une tension efficace de 400 V, 50 Hz avec un facteur de puissance inductif de 0,75. Elle absorbe une puissance active de 12 kW.

Déterminer la puissance apparente absorbée par la machine.

Calculer la puissance réactive consommée.

Déterminer le courant efficace absorbé par la machine.

1. Pour améliorer le facteur de puissance à 0,9, calculer la puissance réactive compensatrice à fournir.
2. Déterminer la capacité du condensateur à installer pour réaliser cette correction.

I . 5. Solution des exercices

Solution exercice N° 01

1. Calculer :

La valeur crête à crête: Elle est donnée par la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale de la tension .

$U_{crête-crête} = U_{max} - U_{min} = 2\,A$

A. N. $U_{crête-crête} = 12 - (-12) = 24\,V$

La fréquence: De la figure I. 6 on peut déduire la période $T = 0.01667\,s$

On sait que : $f = \frac{1}{T}$

A. N. $f = 60\,Hz$

L'amplitude: $A = \frac{U_{crête-crête}}{2}$

A. N. $A = 12\,V$

2. La nature de la tension $u(t)$: la tension $u(t)$est une grandeur périodique, alternative et triangulaire.

3. L'expression de u(t)

Il suffit une période pour défini une grandeur périodique, comme indique la figure I. 10.

$$u(t) = \begin{cases} \alpha t + \beta & pour\ t\epsilon \left[-\frac{T}{4} \quad \frac{T}{4}\right[\\ \gamma t + \delta & pour\ t\epsilon \left[\frac{T}{4} \quad \frac{3T}{4}\right[\end{cases}$$ Il reste seulement la définition des constantes $\alpha, \beta, \gamma\ et\ \delta$

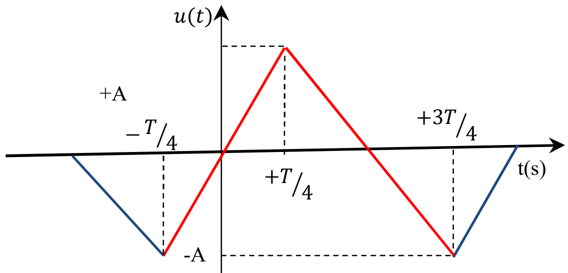


Figure I. 10. L'allure de la tension $u(t)$ sur une période T

—Le premier segment de $u(t)$ peut-être définit sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{4} \quad \frac{T}{4}\right[$ par l'équation d'une droite qui passe par l'origine $\alpha t + \beta$.

Sachant $\beta = 0$, puisque elle passe par l'origine

α est la pente de la droite : $\alpha = tg(\theta) = \frac{4\,A}{T}$

$A.\,N.\quad \alpha = 2880$

—Le second segment de $u(t)$ peut-être définit dans l'intervalle $\left[\frac{T}{4} \quad \frac{3T}{4}\right[$ par l'équation d'une droite $\gamma t + \delta$

γ est la tangente de la droite, $\gamma = tg(\theta) = -\frac{4\,A}{T}$

$A.\,N.\quad \alpha = -2880$

A $t = \frac{T}{2}$, $u(T/2)$=0 alors $-\frac{4\,A}{T}\frac{T}{2} + \delta = 0 \Rightarrow \delta = 2A$

$A.\,N.\ \ \delta = 24$

Finalement, l'expression de $u(t)$ est :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{4\,A}{T} t & volt & pour\ t\epsilon \left[-\frac{T}{4} \quad \frac{T}{4}\right[\\ -\frac{4\,A}{T} t + 2A & volt & pour\ t\epsilon \left[\frac{T}{4} \quad \frac{3T}{4}\right[\end{cases}$$

$$A.\,N.\ \ u(t) = \begin{cases} 2880\, t & volt & pour\ t\epsilon \left[-\frac{T}{4} \quad \frac{T}{4}\right[\\ -2880t + 24 & volt & pour\ t\epsilon \left[\frac{T}{4} \quad \frac{3T}{4}\right[\end{cases}$$

4. <u>La valeur moyenne et la valeur efficace de u(t)</u>

—La valeur moyenne de $u(t)$

Par définition la valeur moyenne d'une grandeur périodique est donnée comme suit :

$$U_{moy} = \frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)\, dt$$

$$U_{moy} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} u(t)\, dt = \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \left(\frac{4\,A}{T} t\right) dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(-\frac{4\,A}{T} t + 2A\right) dt\right)$$

Après intégration on trouve

$U_{moy} = 0$

—La valeur efficace de $u(t)$

Par définition la valeur efficace d'une grandeur périodique est donnée comme suit :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)^2\, dt}$$

$$U^2 = \frac{1}{T}\int_{(T)} u(t)^2\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} u(t)^2\, dt = \frac{1}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \left(\frac{4\,A}{T}t\right)^2 dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(-\frac{4\,A}{T}t + 2A\right)^2 dt\right)$$

Après intégration on trouve

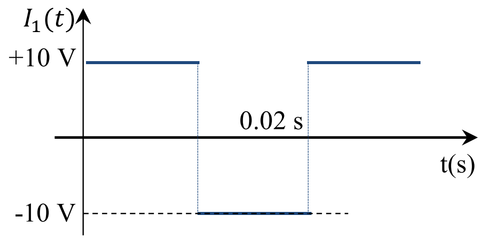
$$U = \frac{1}{\sqrt{3}}A,$$

$A.\ N.\quad U = 6.928\ V$

Solution exercice N° 02

1. L'expression de chaque courant

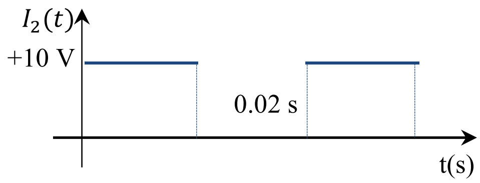
— *Courant* I_1



$$i_1(t) = \begin{cases} A & pour\ t\epsilon\left[0 \quad \frac{T}{2}\right[\\ -A & pour\ t\epsilon\left[\frac{T}{2} \quad T\right[\end{cases}$$

$$A.\ N.\ \ i_1(t) = \begin{cases} 10\ V & pour\ t\epsilon[0 \quad 0.01[\\ -10\ V & pour\ t\epsilon[0.01 \quad 0.02[\end{cases}$$

—*Courant* I_2



$$i_2(t) = \begin{cases} A & pour\ t\epsilon\left[0 \quad \frac{T}{2}\right[\\ 0 & pour\ t\epsilon\left[\frac{T}{2} \quad T\right[\end{cases}$$

$$A.\ N.\ \ i_2(t) = \begin{cases} 10\ V & pour\ t\epsilon[0 \quad 0.01[\\ 0\ V & pour\ t\epsilon[0.01 \quad 0.02[\end{cases}$$

2. La valeur moyenne de chaque courant

— *Courant* I_1

$$I_{1\ moy} = \frac{1}{T}\int_{(T)} i_1(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T i_1(t)\, dt$$

$$I_{1\ moy} = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}}(A)\, dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T}(-A)dt\right) = 0$$

— *Courant* I_2

$$I_{2\ moy} = \frac{1}{T}\int_{(T)} i_2(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T i_2(t)\, dt$$

$$I_{2\ moy} = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}}(A)\, dt\right) = \frac{A}{2}$$

$A.\ N.\ \ I_{2\ moy} = 5\ V$

3. La valeur efficace de chaque courant

— *Courant* I_1

$$I_1 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} i_1(t)^2\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i_1(t)^2\, dt}$$

$$I_1 = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}}(A)^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T}(-A)^2 dt\right) = A$$

A. N. $I_1 = 10\, V$

— *Courant* I_2

$$I_2 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} i_2(t)^2\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i_2(t)^2\, dt}$$

$$I_{2\,moy} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}}(A^2)\, dt\right)} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

A. N. $I_{2\,moy} = \frac{10}{\sqrt{2}}\, V$

Solution exercice N° 03

1. Détermination

La tension $g(t)$ est donnée comme suit :

$$g(t) = 220\sqrt{2}\, cos\left(100\,\pi t - \frac{\pi}{6}\right) (Volt)$$

Elle est de la forme

$$g(t) = G\sqrt{2}\, cos(\omega t - \varphi_0) \quad (Volt)$$

Par identification entre les deux formes précédentes on obtient :

L'amplitude: A= $220\sqrt{2}\ V$.

La pulsation: $\omega = 100\,\pi\ rd/s$.

La fréquence: $f = \frac{\omega}{2\pi}$, *A. N.* $f = 50\, Hz$.

La phase initiale: $\varphi_0 = \frac{-\pi}{6}\ rd$ ou : $\varphi_0 = -30^{\circ}$

2. L'évolution de $g(t)$en fonction du temps sur un intervalle représentatif.

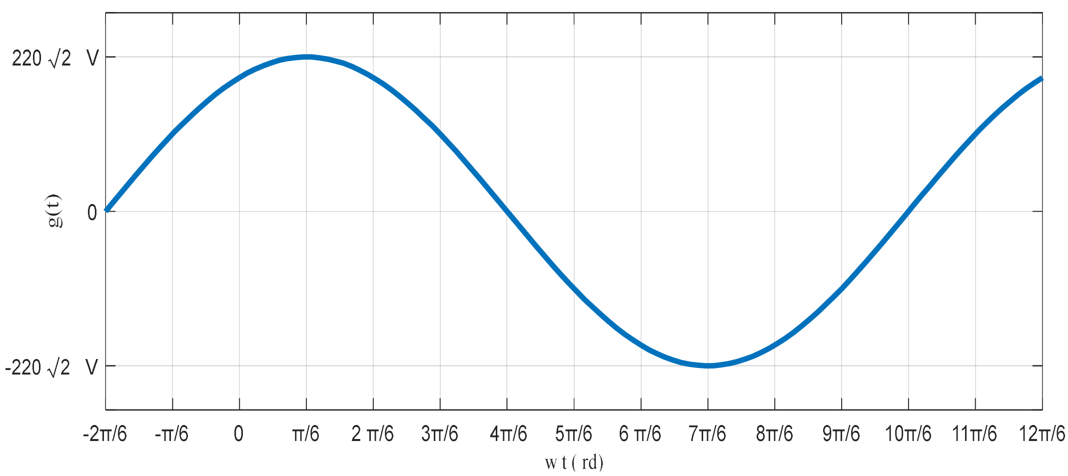


Figure I. 11. L'évolution de $g(t)$en fonction du temps

4. La valeur moyenne de $G(t)$

Valeur moyenne de $G(t)$

$$G_{moy} = \frac{1}{T}\int_{(T)} G(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T G(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^T \left(220\sqrt{2}\,cos\left(100\,\pi t - \frac{\pi}{6}\right)\right) dt\right) = 0$$

5. La valeur moyenne de $G(t)$

La efficace de $G(t)$

$$G = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} G(t)^2\,dt}$$

$$G^2 = \frac{1}{T}\int_{(T)} G(t)^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T G(t)^2\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^T \left(220\sqrt{2}\,cos\left(100\,\pi t - \frac{\pi}{6}\right)\right)^2 dt\right)$$

$$G^2 = \frac{1}{T}\left(\int_0^T \left(220\sqrt{2}\left(\frac{1-sin\left(100\,\pi t \;\; \frac{\pi}{6}\right)}{2}\right)\right)^2 dt\right) = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

$A.\,N.\quad G = 220\,V$

Solution exercice N° 04

I. Pour Circuit RC en série:

I. 1. Intensité efficace du courant

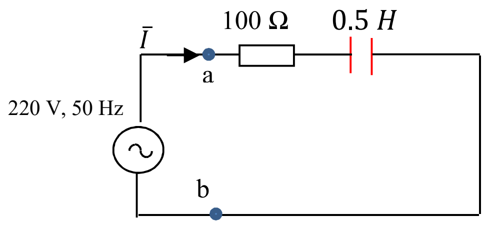


Figure I. 12. Circuit RL série

Pour un circuit RL en série, d'après la loi d'ohm en alternatif :

$\bar{V} = \bar{Z}\,\bar{I}$

Telle que : $\bar{Z} = R + jX_L$

Avec

X_L : Réactance inductive, donnée comme suit

$$X_L = \omega\,L = 2\,\pi\,f\,L \xrightarrow{A.N.} X_L = 157.08\,\Omega$$

Donc $\bar{Z} = 100 + j157.08\ \Omega \longrightarrow Z \approx 186.2\,\Omega$

Le courant efficace est donnée par :

$$I = \frac{V}{Z} \xrightarrow{A.N.} I = 1.18\,A$$

I. 2. Tension efficaces aux bornes des composantes

La valeur de la tension efficace aux bornes de la résistance:

$$V_R = R\,I \xrightarrow{A.N.} V_R = 100\ \times\ 1.18\ = 118\,V\,.$$

La valeur de la tension efficace aux bornes de la bobine:

$$V_C = X_c\,I \xrightarrow{A.N.} V_C = 157.08\ \times\ 1.18\ \approx 185.35\,V.$$

N.B. *On remarque que, $V \neq V_R + V_L$, ceci ne se contrarier pas avec la lois de Kirchhoff (Deuxième loi de Kirchhoff ou loi des mailles), c'est-à-dire* $\overline{V} = \overline{V_R} + \overline{V_L}$.

II. Correction du facteur de puissance avec un condensateur

II. 1. Valeur de la capacité C du condensateur permettant la correction du facteur de puissance

Pour rendre le courant en phase avec la tension, nous devons annuler la réactance totale en ajoutant une capacité C qui compense X_L, c'est-à-dire :

$X_L = X_C$

Où la réactance capacitive est donnée par :

$X_C = \frac{1}{C\omega}$

Ainsi

$\frac{1}{C\omega} = L\omega \longrightarrow C = \frac{1}{L\omega^2} \xrightarrow{A.N.} C \approx 20.3\mu F$

II. 2.1. Valeur efficace du courant après correction

Après correction, l'impédance totale du circuit devient purement résistive :

$\overline{Z'} = 100\ \Omega \longrightarrow Z' = 100\,\Omega$

Le courant devient :

$I' = \frac{V}{Z'} = \frac{220}{100} = 2.2\ A$

II.2.2. Tension efficace aux bornes du condensateur

$V_C = X_C\, I \xrightarrow{A.N.} V_C = 157.08\ \times 2.2 \approx 345.6V\ V$

Solution exercice N° 05

1. L'impédance complexe du circuit

Circuit RLC en série, l'impédance est :

$\overline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ ou $\overline{Z} = R + j(X_L - X_C)$ ou $\overline{Z} = R + \overline{X_L} + \overline{X_C}$

$\overline{Z} = 1000 + j\left(1.1\ \times 100\,\pi - \frac{1}{20 \times 10^{-6} \times 100\,\pi}\right)$

Donc $\overline{Z} = 1000 + j\ 186.43\,\Omega \xrightarrow{Sous\ la\ forme\ polaire} \overline{Z} \approx 1017.2^{\llcorner 10.55°}\ \Omega$

2. Calculer la valeur efficace des tensions aux bornes de chaque élément et de l'ensemble.

La valeur efficace de la tension aux bornes de la résistance: $V_R = R\, I \Rightarrow V_R = 1000 \times\ 0.1 = 100\ V$

La valeur efficace de la tension aux bornes de la bobine: $V_L = X_L\, I \Rightarrow V_L = 345.58\ \times\ 0.1 = 34.56\ V$

La valeur efficace de la tension aux bornes du condensateur : $V_C = X_C\, I \Rightarrow V_C = 159.15 \times\ 0.1 = 15.92\ V$

La valeur efficace de la tension totale dans le circuit : $V = Z\, I \Rightarrow V = 1017.2 \times\ 0.1 = 101.72\ V$

3. Calculer le déphasage φ entre la tension et le courant

Le déphasage est donné par :

$$\Delta\varphi = \varphi_V - \varphi_C = \varphi_Z \longrightarrow \Delta\varphi = arctg\left(\frac{L\omega - 1/C\omega}{R}\right) = arctg\left(\frac{345.58-159.15}{1000}\right) \approx 10.55^{\circ}$$

4. Le montage est-il inductif ou capacitif? Justifier votre réponse

Le montage est inductif parce que $\Delta\varphi > 0$ c'est-à-dire $L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0$ Ou $X_L > X_C$

On dit que l'effet inductif est plus dominant que l'effet capacitif

5. Calculer la puissance active consommée par le circuit

$P = R\, I^2 = 1000 \times 0.1^2 = 10\, Watt$

Solution exercice N° 06

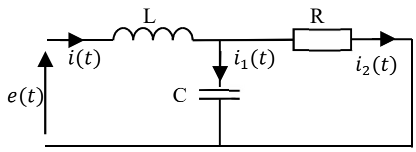


Figure I.13. Circuit L en série avec $R\ //\ C$

L'impédance des éléments du circuit est donnée par :

Impédance de la résistance : $\overline{Z_R} = \mathrm{R} = 2\Omega$

Impédance de l'inductance : $\overline{Z_L} = \mathrm{j}\ \omega\ \mathrm{L} = \mathrm{j}(10^5 \times 5 \times 10^{-6}) = \mathrm{j}\ 0.5\ \Omega$

Impédance du condensateur : $\overline{Z_C} = -\mathrm{j}\frac{1}{\mathrm{C}\ \omega} = -\mathrm{j}\ \frac{1}{(10^5 \times 10 \times 10^{-6})} = -\mathrm{j}\ \ \Omega$

La tension d'alimentation $e(t) = 10\sqrt{2}\, sin(10^5 t)\ V \xrightarrow{Sous\ la\ forme\ complexe} \overline{E} = 10^{\angle 0^{\circ}}$ V

I. Pour le circuit 1, figure I.13

I .1. L'impédance complexe totale

$$\bar{Z} = \overline{Z_L} + (\overline{Z_R}\ //\ \overline{Z_C}) = \overline{Z_L} + \left(\frac{\overline{Z_R}\ \overline{Z_C}}{\overline{Z_R} + \overline{Z_C}}\right)$$

$$\bar{Z} = j\ 0.5\ + \left(\frac{2 \times -\mathrm{j}}{2-\mathrm{j}}\right) = -0.4 - 0.3\, j \xrightarrow{Sous\ la\ forme\ polaire} \overline{Z} = 0.5^{\angle 143.13^{\circ}}\ \Omega$$

$$\xrightarrow{Ou\ en\ radian} \overline{Z} = 0.5^{\angle 2.5r}\ \ \Omega$$

I.2. Les intensités i, i1 et i2

L'intensité totale dans le circuit est donnée par la loi d'Ohm :

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{10^{\angle 0^{\circ}}}{0.5^{\angle 143.13^{\circ}}} = 0.5^{\angle -143.13^{\circ}} A$$

Selon la loi du diviseur du courant :

$$\overline{I_1} = \frac{\overline{Z_R}}{\overline{Z_R} + \overline{Z_C}}\ \bar{I} = \frac{2}{2-\mathrm{j}} \times 0.5^{\angle -143.13^{\circ}} = 0.447^{\angle -116.56^{\circ}} A$$

$$\overline{I_2} = \frac{\overline{Z_C}}{\overline{Z_R} + \overline{Z_C}}\ \bar{I} = \frac{-\mathrm{j}}{2-\mathrm{j}} \times 0.5^{\angle -143.13^{\circ}} = 0.2235^{\angle -2\ \ .56^{\circ}} A$$

I.3. La tension aux bornes de la résistance

$$\overline{V_R} = \overline{Z_R}\ \ \overline{I_2} = 2 \times 0.2235^{\angle -206.56^{\circ}} = 0.447^{\angle -206.56^{\circ}} V$$

II. Pour le circuit 1, figure I.14

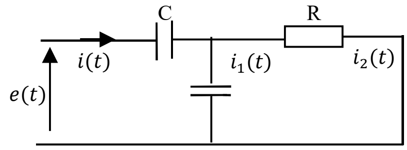


Figure I.14. Circuit C en série avec R // C

II .1. L'impédance complexe totale

$$\bar{Z} = \overline{Z_C} + (\overline{Z_R} \,//\, \overline{Z_C}) = \overline{Z_C} + \left(\frac{\overline{Z_R}\ \overline{Z_C}}{\overline{Z_R} + \overline{Z_C}} \right)$$

$$\bar{Z} = -j \ + \left(\frac{2 \times -j}{2-j}\right) = 0.4 - 1.8\, j \xrightarrow{Sous\ la\ forme\ polaire} \bar{Z} \approx 1.84^{\angle -7\ .47^\circ}\ \Omega$$

II.2. Les intensités i, i1 et i2

L'intensité totale dans le circuit est donnée par la loi d'Ohm :

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{10^{\angle 0^\circ}}{1.84^{\angle -77.47^\circ}} = 5.43^{\angle 77.47^\circ} A$$

Selon la loi du diviseur du courant :

$$\overline{I_1} = \frac{\overline{Z_R}}{\overline{Z_R}+\overline{Z_C}}\ \bar{I} = \frac{2}{2-j} \times 5.43^{\angle 77.47^\circ} = 4.86^{\angle 104.04^\circ} A$$

$$\overline{I_2} = \frac{\overline{Z_C}}{\overline{Z_R}+\overline{Z_C}}\ \bar{I} = \frac{-j}{2-j} \times 5.43^{\angle 77.47^\circ} = 2.43^{\angle 14.04^\circ} A$$

II.3. La tension aux bornes de la résistance

$$\overline{V_R} = \overline{Z_R}\ \ \overline{I_2} = 2 \times 2.43^{\angle 14.04^\circ} = 4.86^{\angle 14.04^\circ} V$$

III. Pour le circuit 1, figure I.15

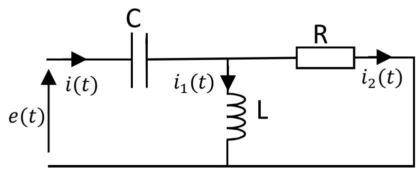


Figure I.15. Circuit C en série avec R // L

II .1. L'impédance complexe totale

$$\bar{Z} = \overline{Z_C} + (\overline{Z_R} \,//\, \overline{Z_L}) = \overline{Z_C} + \left(\frac{\overline{Z_R}\ \overline{Z_L}}{\overline{Z_R} + \overline{Z_L}} \right)$$

$$\bar{Z} = -j \ + \left(\frac{2 \times j\, 0.5}{2+j\, 0.5}\right) = 0.118 - 0.529\, j \xrightarrow{Sous\ la\ forme\ polaire} \bar{Z} \approx 0.542^{\angle -77.47^\circ}\ \Omega$$

II.2. Les intensités i, i1 et i2

L'intensité totale dans le circuit est donnée par la loi d'Ohm :

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{10^{\angle 0^\circ}}{0.542^{\angle -77.47^\circ}} = 18.45^{\angle 77.47^\circ} A$$

Selon la loi du diviseur du courant :

$$\overline{I_1} = \frac{\overline{Z_R}}{\overline{Z_R}+\overline{Z_L}}\ \bar{I} = \frac{2}{2+j0.5} \times 5.43^{\angle 77.47^\circ} = 5.27^{\angle 63.43^\circ} A$$

$$\overline{I_2} = \frac{\overline{Z_L}}{\overline{Z_R}+\overline{Z_L}}\ \bar{I} = \frac{j\, 0.5}{2+j\, 0.5} \times 5.43^{\angle 77.47^\circ} = 1.317^{\angle 153.43^\circ} A$$

II.3. La tension aux bornes de la résistance

$$\overline{V_R} = \overline{Z_R}\ \ \overline{I_2} = 2 \times 1.317^{\angle 153.43^\circ} = 2.634^{\angle 153.43^\circ} V$$

Solution exercice N° 07

1. <u>La valeur efficace du courant</u>

D'après la figure I.9, le circuit est RLC en série, l'impédance est :

$\overline{Z} = R + \overline{X_L} + \overline{X_C} \quad \overline{Z} = 20 + j(10 - 5) = 20 + j\,5\,\Omega$

$\overline{Z} = 20.61^{\angle 14.04°}\,\Omega$

$I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{20.61} = 4.85\,A$

2. <u>La phase du courant (On considère la tension $\overline{\mathrm{V}}$ à l'origine des phases).</u>

La tension $\overline{\mathrm{V}}$ à l'origine des phases $\Rightarrow \overline{V} = 100^{\angle 0}V$

$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} \Leftrightarrow \begin{cases} I = \frac{V}{Z} \\ \varphi_c = \varphi_V - \varphi_Z \end{cases}$

$\varphi_c = 0 - 14.04 = -14.04^{°}$

3. <u>Ecrire la loi de maille (deuxième loi de Kirchhoff) qui régit ce circuit</u>

La valeur de la tension aux bornes de la résistance: $\overline{V_R} = R\,\overline{I} \Rightarrow \overline{V_R} = 20\,.\,4.85^{\angle -14.04} = 97^{\angle -14.04^{°}}\,V$

La valeur de la tension aux bornes de la bobine: $\overline{V_L} = \overline{X_L}\,\overline{I} \Rightarrow \overline{V_L} = 10^{\angle 90}\,4.85^{\angle -14.04} = 48.5^{\angle 75.96^{°}}\,V$

La valeur de la tension aux bornes du condensateur : $\overline{V_C} = \overline{X_C}\,\,\overline{I} \Rightarrow \overline{V_C} = 5^{\angle -90}\,4.85^{\angle -14.04} = 24.25^{\angle -104.04^{°}}\,V$

La loi des mailles dite aussi la deuxième loi de Kirchhoff

$\overline{V} = \overline{V_R} + \overline{V_L} + \overline{V_C} \xrightarrow{Numérquement} 97^{\angle -14.04^{°}} + 48.5^{\angle 75.96^{°}} + 24.25^{\angle -104.04^{°}} = 100^{\angle 0^{°}}\,V$

4. <u>Diagramme de Fresnel des grandeurs de la loi des mailles</u>

la figure I. 16 illustre la lois de maille régissant le circuit RLC

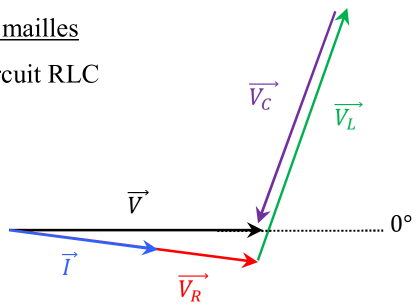


Figure I.16. Représentation vectorielle de la loi des mailles

Solution exercice N° 08

$V(t) = 150\,sin(\omega t + 10^{°}) \xrightarrow{En\ complxe} \overline{V} = \frac{150^{\angle 10^{°}}}{\sqrt{2}}\,V$

$i(t) = 5\,sin(\omega t - 50^{°}) \xrightarrow{En\ complxe} \overline{I} = \frac{5^{\angle -5^{°}}}{\sqrt{2}}\,A$

— La puissance apparente complexe $\overline{S}$ est :

$\overline{S} = \overline{V}\,.\,\overline{I^*} = 106.07^{\angle 10^{°}} \times 3.54^{\angle 50^{°}} = 375.5^{\angle 60^{°}}VA = 187.75 + j325.25\quad VA$

$S = 375.5\,VA$

On peut déduire :

— La puissance active P

$P = Reel\left(\bar{S}\right) = 187.75\ W$

— La puissance réactive Q

$Q = Im\left(\bar{S}\right) = 325\ vars\ inductifs$

— Le facteur de puissance F

$F = \cos(60^{\circ}) = 0.5\ inductif$

Le triangle de puissance est représenté par la figure I. 17.

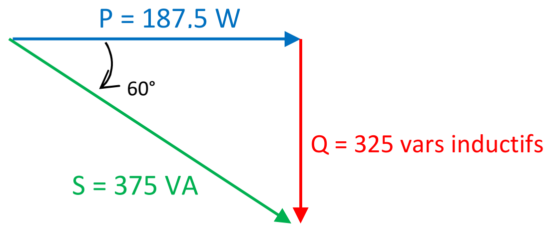


Figure I.17. Triangle de puissance

Solution exercice N° 09

Les paramètres définissant la puissance électrique fournie au moteur :

— La puissance électrique absorbée P (la puissance active)

$P = \frac{P_m}{\eta} = \frac{1492}{0.85} = 1755.29\ W$

— La puissance apparente S

$S = \frac{P}{\cos\varphi} = \frac{1755.29}{0.8} = 2194.11\ VA$

— La puissance réactive Q

$\varphi = \arccos(0.8) = 36.9°$

$Q = S\ \times \sin\ \varphi = 2194.11\ \times \sin\ 36.9 = 1316.47\ vars\ inductifs$

Solution exercice N° 10

— Charge n°1 :

$S_1 = 250$ VA , $F_1 = \cos\varphi_1 = 0.5\ inductif$

$P_1 = S_1 \cos\varphi_1 = 250\ \times 0.5 = 125\ W$

$Q_1 = S_1 \sin\arccos\varphi_1 = 250\ \times \sin\arccos 0.5 = 216.5\ vars\ inductifs$

—Charge n°2 :

$P_2 = 180\ W\ \ , F_2 = \cos\varphi_2 = 0.8\ capactif$

$S_2 = \frac{P_2}{\cos\varphi_2} = \frac{180}{0.8} = 225\ VA$

$Q_2 = S_S \sin\arccos\varphi_2 = 250\ \times \sin\arccos 0.6 = 135\ vars\ capacitifs$

—Charge n°3 :

$S_3 = 300$ VA , $Q_3 = 100$ vars inductifs

$P_3 = \sqrt{{S_3}^2 - {Q_3}^2} = \sqrt{300^2 - 100^2} = 282.84\ W$

$\cos\varphi_3 = \frac{P_3}{S_3} = \frac{282.84}{300} = 0.9428\ iductif$

—Somme des puissances (Triangle des puissances total)

Puissance active totale :

$P = P_1 + P_2 + P_3 = 125 + 180 + 282.84 = 587.84\ W$

Puissance réactive totale :

$Q = Q_1 - Q_2 + Q_3 = 216.5 - 135 + 100 = 181.5\ vars\ inductifs$

Puissance apparente totale :

$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{587.84^2 + 181.5^2} = 614.14\ VA$

Facteur de puissance total :

$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{587.84}{616} = 0.957\ inductif$

Le triangle de puissance est représenté par la figure I. 18.

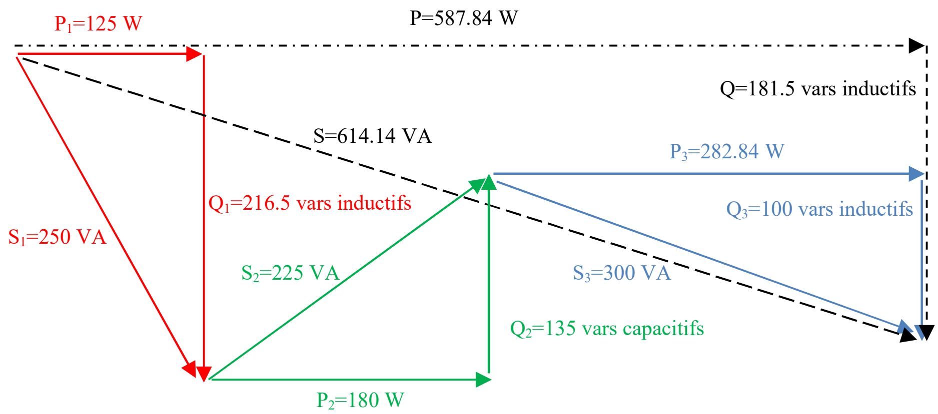


Figure I.18. Triangle de puissance de trois charges

Solution exercice N° 11

<u>1. Le taux de charge du transformateur en %</u>

Le taux de charge τdu transformateur est :

$\tau = \frac{S_1}{S_n} \times 100$

Or, la puissance apparente S_1 de la charge actuelle est :

$S_1 = \frac{P_1}{\cos\varphi_1} = \frac{12}{0.6} = 20\ KVA$

$\xrightarrow{Donc}\quad \tau = \frac{S_1}{S_n} = \frac{20}{25} \times 100 = 80\%$

<u>2. Puissance encore disponible avant d'atteindre la charge nominale</u>

On peut calculer

$Q_1 = \sqrt{{S_1}^2 - {P_1}^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16\ Kvars\ inductifs$

$\varphi_1 = \arccos 0.6 = 53.13°$

La charge additionnelle est caractérisée par P_{ad}, Q_{ad}, S_{ad} et $F_{ad} = \cos\varphi_{ad} = 1$
La charge additionnelle possède un facteur de puissance égal à 1⇒ $Q_{ad} = 0\ vars$

Par conséquent :
la puissance réactive $Q_n = Q_1 = 16\ Kvars\ inductifs$, comme illustre la figure I.19
On peut calculer

$$P_n = \sqrt{{S_n}^2 - {Q_n}^2} = \sqrt{25^2 - 16^2} = 19.2\ W$$

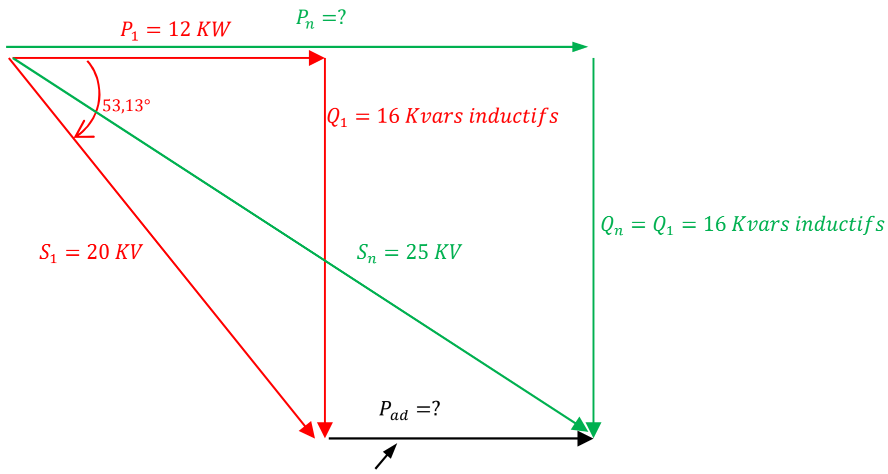


Figure I.18. Triangle de puissance avec une charge additionnelle à FP unitaire

$$P_n = P_1 + P_{ad} \Rightarrow P_1 = P_n - P_{ad} = 19.2 - 12 = 7.2\ W$$

3. Déterminer la puissance supplémentaire en kVA que le transformateur peut alimenter pour atteindre sa charge nominale, en supposant que ces charges ont un facteur de puissance de 0.866 capacitif ?

Le facteur de puissance de la charge supplémentaire est 0.866 capacitif ⇒ $\varphi_{sup} = acr\cos 0.866 = 30°$

Le triangle de puissance dans ce cas est représenté par la figure I.19.

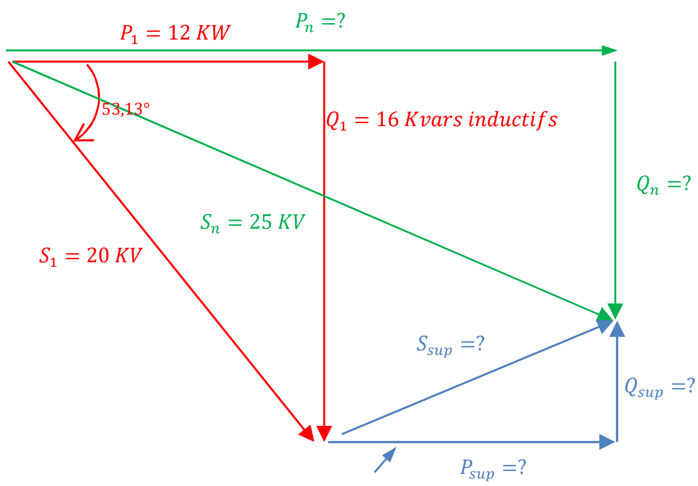


Figure I.19. Triangle de puissance avec une charge additionnelle à supplémentaire à $\cos\varphi_{sup} = 0.866\ capacitif$

La puissance active et la puissance réactive de la charge supplémentaire sont:

$P_{sup} = S_{sup} \times \cos\varphi_{sup} = \frac{\sqrt{3}}{2} S_{sup}$

$Q_{sup} = S_{sup} \times \sin\varphi_{sup} == \frac{1}{2} S_{sup}$

La charge nominale est donnée comme suit :

$S_n{}^2 = P_n{}^2 + Q_n{}^2 = (P_1 + P_{sup})^2 + (Q_1 - Q_{sup})^2$

Finalement, on obtient l'équation du second ordre suivante :

$25^2 = \left(12 + \frac{\sqrt{3}}{2} S_{sup}\right)^2 + \left(16 - \frac{1}{2} S_{sup}\right)^2$

La résolution de cette équation donne deux solutions possibles, on garde seule la valeur positive qu'a un sens physique :

$S_{sup} = 12.8\ KVA$

La puissance supplémentaire en kVA que le transformateur peut encore fournir avant d'atteindre sa charge nominale est 12.8 KVA.

Solution exercice N° 12

1. La puissance apparente absorbée par la machine

$S = \frac{P}{\cos\varphi} = \frac{12}{0.75} = 16\ KVA$

2. La puissance réactive absorbée par la machine

$S = \frac{P}{\sin \text{acos}\,\varphi} = \frac{12}{\sin arc \cos 0.75} = 10.58\ \ Kvars\ inductifs$

3. Le courant efficace absorbé par la machine

$S = U\,I \Rightarrow\ I = \frac{S}{U} = \frac{16 \times 10^3}{400} = 40\ \ A$

4. La puissance réactive compensatrice à fournir

Après correction, la nouvelle puissance réactive doit être :

$Q_2 = S\ \times \sin \text{arc} \cos\varphi_2 = 16\ \times \sin arc\ \ \cos 0.9 = 6.98\ \ Kvars\ inductifs$

La puissance réactive compensatrice est :

$Q_{comp} = Q - Q_2 = 10.58 - 6.98\ = 3.6\ Kvars\ inductifs$

5. La capacité du condensateur à installer pour réaliser cette correction

$Q_{comp} = U^2\ C\ \omega \Rightarrow C = \frac{Q_{comp}}{U^2\ 2\,\pi\, f} = \frac{3.6 \times 10^3}{400^2 \times 2 \times \pi \times 50} = 71.6\ \mu F$