3.1 Introduction

La modélisation est la première étape à franchir lors de la conception d'un système automatisé. On obtient alors un modèle, une représentation mathématique reproduisant aussi convenablement que possible le comportement du système réel à commander. Une technique d'identification dite ***méthode de moindres carrées*** a été introduite par Karl Gauss en 1809. Elle a été largement utilisée dans le cadre d'identification des systèmes linéaires. Le principe de base de cette méthode est de chercher les paramètres optimaux du modèle *en* ***minimisant la somme des carrés*** de l'erreur entre les valeurs obtenues par le modèle et les valeurs mesurées.

3.2 Principe de base:

Soit un ensemble de mesures expérimentales enregistrées dans le tableau 2.1:

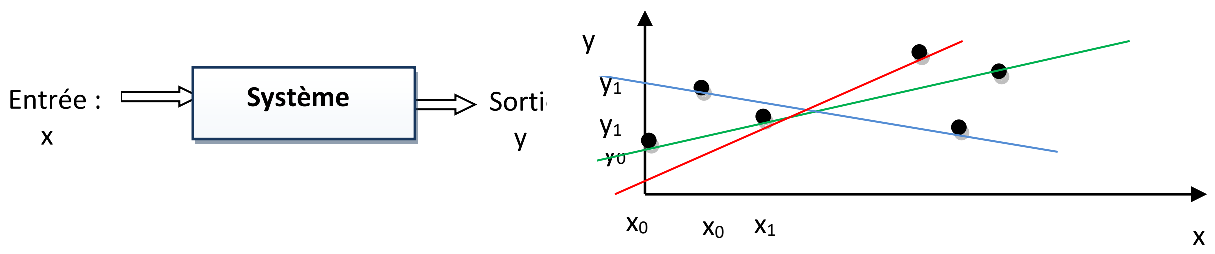

Figure 2.1 : Ajustement de mesure

x	x_0	x_1	x_2	....	x_n
Y	Y_0	y_1	Y_2	....	y_n

Tableau 1

Ces données peuvent être représentées par un nuage de points comme montre la figure ci-dessus.

On cherche une loi affine reliant les sorties et les entrées du système. Généralement, cette loi est de la forme:

$$y_m = a_1 x(t) + a_2 \tag{3.1}$$

Rechercher les paramètres de cette loi revient à chercher la droite qui ajuste ce nuage (voir figure 3.1). La question qui se pose donc, est de déterminer la droite ($\left(y = \hat{a}_1 x(t) + \hat{\alpha}_2\right)$qui ajuster au mieux le nuage de points.

Pour répondre à cette question, on peut calculer $\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \left(y(t_i) - y_m(t_i) \right)^2$ pour chaque droite. Et la la droite qui ajuste au mieux le nuage de points correspond à la valeur minimale de $\varepsilon\ (\min \varepsilon)$. ε dit le critère d'évaluation de l'erreur de la modélisation.

3.3 Paramètres optimaux et minimisation du critère d'évaluation de l'erreur de la modélisation

D'une manière générale, nous considérons N observations $y(t_1), y(t_2)...............y(t_N)$ aux instants $t_1, t_2, ...t_N$ faites sur le système.

En tenant on compte le modèle linéaire suivant:

$$y_m(t_i) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + ... + a_m f_m(t) \tag{3.2}$$

avec : $f_i(t)$ sont des fonctions connues.

α_i sont les paramètres à identifier.

Afin de déterminer les paramètres optimaux du système $\hat{\alpha}_i$, on définit l'erreur quadratique de la modélisation comme suit:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \left(e(t_i) \right)^2 \tag{3.3}$$

$e(t_i)$ est l'erreur de la modélisation. Elle est l'écart entre l'observation $y(t_i)$ et la sorties du modèle $y_m(t_i)$. Elle est définie comme suit:

$$e(t_i) = y(t_i) - y_m(t_i) \tag{3.4}$$

Optimisation de l'erreur quadratique :

La recherche des valeurs optimales α_i revient à résoudre le problème d'optimisation suivant:

$$\min_{\alpha_i}(\varepsilon) = \min_{\alpha_i}\left(\sum_{i=1}^{N} \left(y(t_i) - y_m(t_i) \right)^2 \right) \tag{3.5}$$

Ce critère est appelé le moindre carrées et la méthode d'identification basée sur ce critère dite méthode de moindre carrée.

La solution de ce problème d'optimisation peut être envisageable par la résolution du système d'équation suivant:

$$(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_1}=0\\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_2}=0\\ \quad\vdots\\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_m}=0\end{cases} \qquad (3.5)$$

3.4 Ecriture matricielle de la méthode de moindres carrés:

La recherche des paramètres par cette méthode revient à résoudre 'm' équations, ce qui rendre la tache très difficile, en particulier, pour les systèmes qui a un nombre des paramètres très important. une forme matricielle nous a permet d'utiliser les outils numériques (comme matlab par exemple) pour résoudre ce problème sera présentée dans cette section.

En tenant compte la définition de l'erreur (3.4)

$$\begin{cases}e(t_1)=y(t_1)-y_m(t_1)\\ e(t_2)=y(t_2)-y_m(t_2)\\ \vdots\\ e(t_N)=y(t_N)-y_m(t_N)\end{cases} \qquad (3.6)$$

Donc, on a :

$$\begin{cases}y_m(t_1)=y(t_1)+e_1=a_1f_1(t_1)+a_2f_2(t_1)+.............+a_mf_m(t_1)\\ y_m(t_2)=y(t_2)+e_2=a_1f_1(t_2)+a_2f_2(t_2)+.............+a_mf_m(t_2)\\ \vdots\\ y_m(t_N)=y(t_2)+e_2=a_1f_1(t_N)+a_2f_2(t_N)+.............+a_mf_m(t_N)\end{cases} \qquad (3.7)$$

Posons:

$$E_m = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}, Y_N = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \phi = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_m(t_2) \\ f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_m(t_N) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1(t_n) & f_1(t_2) & \dots & f_m(t_n) \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}, \mathrm{Y}_N = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \mathrm{Y}_N = \phi\theta + E_N \, . \tag{3.8}$$

Nous donnons le rappel mathématique suivant :

$$\begin{cases} f = AX \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = A^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = X^T AX \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2AX \end{cases} \tag{3.9}$$

L'erreur quadratique définie par (3.3) peut s'écrire comme suit:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \big(y(t_i) - y_m(t_i) \big)^2 = E_N^T E$$

Par conséquence:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \left(E_N^T E \right)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Big(\left(\mathrm{Y}_N - \phi\theta \right)^T \left(\mathrm{Y}_N - \phi\theta \right) \Big)}{\partial \alpha} = 0 \tag{3.10}$$

En utilisant le rappel (3.9), l égalité (3.10) peut s'écrire :

$$\phi^T \mathrm{Y}_N - \left(\phi^T \phi \right) \theta = 0$$

Qui nous donne :

$$\theta = \left(\phi^T \phi\right)^{-1} \phi^T Y_N \tag{3.11}$$

Exercice d'application:

Soient les données numériques suivantes:

x ={1-3-4-6-8-9-11-14}

y ={1-2-4-4-5-7-8-9}

a) Ajustez la droite y = a x à ces données, au sens des moindres carrés.

b) Ajustez la droite y = b à ces données, au sens des moindres carrés.

c) Ajustez la droite y = a x + b à ces données, au sens des moindres carrés.

Comparer les résultats obtenus. Que peut-on conclure?

Solution abrégée:

$$\theta = \left(\varphi^T \varphi\right)^{-1} \varphi^T Y$$

$$\begin{cases} b = 0.6947 \\ \varepsilon_1 = 3.1450 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 5 \\ \varepsilon_2 = 56 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[a \quad b\right] = \left[0.6364 \quad 0.5455\right]^T \\ \varepsilon_2 = 2.5455 \end{cases}$$

La meilleure droite pour ajuster les données est:

$$y = ax + b$$