Chapitre 1 :
Introduction à la recherche Opérationnelle

1.1 Introduction

La **R**echerche **O**pérationnelle (**R O**) est une technique d'optimisation; datant tout au plus de la second guerre mondiale (en 1940). Et en effet ; c'est bien son application aux opérations militaires quelle doit son nom.

En 1940, un physicien Patrick BLAKETT eut l'immense mérite de trouver l'implémentation idéale des radars de surveillance britanniques. Après cette guerre et avec le développement du calcule numérique (les ordinateurs) cette tendance a été accélérée et devienne un outil très important dans la réalisation des problèmes d'optimisation complexes.

1.2 Définition de l'optimisation

L'optimisation est l'ensemble des techniques permettant de chercher les minimums ou les maximums de fonction ou fonctionnelle.

1.3 Définition d'un problème d'optimisation

Dans un problème d'optimisation, une variable physique ou bien de commande doit être choisie de façon optimale, autrement dit, de façon à optimiser selon le cas :

- Un critère physique (énergie, puissance, etc.).
- Un critère technique (erreur de modélisation, erreur statique, etc.).
- Un critère économique (coût, profit, etc.).

1.3.1. Exemples et domaines d'applications de la RO :

- ***Problème d'identification (critère technique)***

L'évolution de la concentration C d'une espèce dans un mélange est donnée par une loi linéaire en fonction du temps : $C(t)=at+b$

Un expérimentateur fait sur une série de mesure pour déterminer les paramètres inconnus résumés dans le tableau suivant :

t_i	0	1	2	4	5	6	7	8	9	10	11
$C_r(t_i)$	1.45	3.06	4.97	10.65	14.92	20.6	28.2	38.42	52.15	20.65	96.6

Tableau 1.1 : Résultats de mesures

- *Le problème est de déterminer les paramètres a et b telle que la valeur de* $\sum_{i=0}^{11}\left(C\left(t_i\right)-C_r\left(t_i\right)\right)^2$ *soit la plus petite possible ?*

- ***problème d'épaisseur optimale de l'isolation (critère physique)***

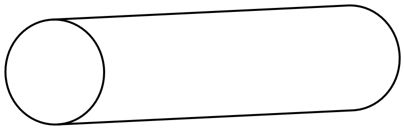

Figure1.1 Pipeline

Soit un pipeline (figure 1.1) dans le quel circule un liquide qu'on souhaite maintenir à une certaine température. Pour limiter de chaleur par convection, on dispose des couches d'une matière isolant sur les parois externes du pipeline Isolation d'épaisseur *x*.

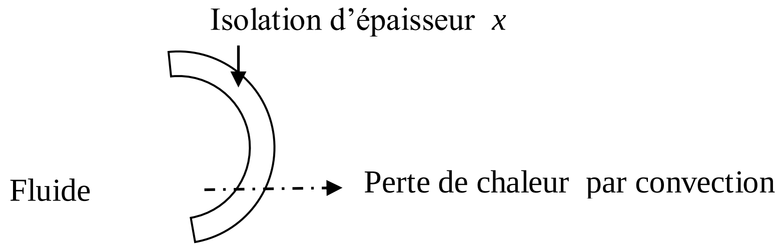

Figure 1.2 : Couches d'une matière isolant

La perte d'énergie est approximée par l'expression suivante : $Q=\dfrac{A*DT}{x/k+1/h_c}$

DT : La différence de température entre l'intérieure du pipeline et l'aire ambiant. x L'épaisseur du pipeline. *hc* : coefficient de transfert de chaleur par convention.

K : La conductivité thermique. Q : la quantité d'énergie perdue par heure. A : aire du pipeline.

Le coût d'installation par unité de surface peut être représenté par : f_0+f_1x .

f_0: coût fixe ; f_1 le coût incrémental par unité d'épaisseur.

L'argent dépensé pour couvrir le pipeline d'une couche isolante doit être remboursé en cinq années (en cinq parts égales).

- *Le problème posé est de déterminer l'épaisseur optimale de la couche isolante.*

- ***Problème d'entreprise (critère économique).***

Une entreprise fabrique sur une machine travaillant 45 heures par semaine trois produits P_1, P_2 et P_3. L'article P1 laisse un profit net de 4 unités monétaires, l'article P2 laisse un profit net de 12 unités monétaires et l'article P3 laisse un profit net de 3 unités monétaires. Les rendements de la machine sont respectivement pour les trois produits et dans le même ordre sont : 50, 25 et75 articles par heure. On sait d'autre part grâce a une étude du marché, que les possibilités de vente ne dépassent pas 1000 articles de P1, 500 articles de P2 et 150 articles de P3 par semaine.

➢ *Quels produits l'entreprise doit-elle fabriquer et en quelle quantité pour réaliser le bénéfice total le plus élevé?.*

- ***Un problème de transport (critère économique).***

Une entreprise stocke un produit dans deux dépôts A_1 et A_2 situés dans deux villes différentes. Les quantités stockées sont respectivement 120 et 200 unités. Ces deux dépôts alimentent trois points de vente B_1, B_2 et B_3 situés également dans deux villes différentes. Les quantités demandées par les trois points de ventes sont respectivement de 80, 90 et 150 unités. Les coûts unitaires de transport sont inscrits dans le tableau suivant :

Points de vente Les dépôts	B_1	B_2	B_3
A_1	12	15	20
A_2	18	10	16

Tableau 1.2 : Coût de transport

➢ *Le problème qui se pose à l'entreprise est celui de savoir comment repartir et distribuer les produits du magasin de stockage vers les points de vente avec un coût de transport minimum.*

- ***Problème d'une usine (critère économique)***

Une compagnie fabrique trois produits et dispose 4 postes de travail.

Le temps de production (en heures) par unité produite varie d'un poste de travail à un autre selon les données ci-dessous.

Poste de travail **Produit**	1	2	3	4
1	5	7	4	10
2	6	12	8	15
3	13	14	9	17

Tableau 1.3 : Temps de production (En heures) par unité produite

De même le bénéfice par unité produite varie d'un poste à un autre selon les données montrées dans le tableau 1.4.

Une semaine de travail effectif est de 35 heures pour chaque poste de travail.

- *Le problème à résoudre est de trouver la quantité de chaque produit qui devrait être produite sachant que la demande est d'au moins 100 unités de produit 1, 150 unités de produit 2 et 100 unités de produit 3.*

Poste de travail / **Produit**	1	2	3	4
1	10	8	6	9
2	18	20	15	17
3	15	16	13	17

Tableau 1.4 : Le bénéfice par unité produite

- ***Problème d'affectation***

La matrice ci-dessous établit les coûts de fabrication des ouvriers A, B, C, D et E sur les machines 1, 2, 3, 4 et 5 (voir tableau ci-dessous) :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
A	12	8	11	15	4
B	7	9	17	14	10
C	9	6	12	7	7
D	7	8	14	8	10
E	9	9	13	10	6

Tableau 1.5 : Coûts de fabrication des ouvriers

- *Opérer les affectations, de manière à rendre minimale le coût total.*
- *Un problème de voyageur de commerce*

Soit un voyageur de commerce décide de visiter n villes. Supposons que la distance entre chaque deux villes est donnée.

- Trouver le plus court trajet passant par les n villes

1.4 Formulation mathématique d'un problème d'optimisation :

Le problème d'optimisation consiste à chercher x solution du problème d'optimisation suivant:

$$(\rho)=\begin{cases} opt\left(f(x)\right) \\ g(x)\leq 0 \\ h(x)=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où :

$x \in R^n$ est appelée variable de décision

$f(x): R^n \to R$ est appelée indifféremment : fonction coût, fonction objective ou critère.

$g(x): R^n \to R^p$ représente les contraintes en inégalité. Elle a p composantes et on peut écrire : $g(x)\ \left(\left(g_1(x), g_2(x)\ldots g_p(x)\right)\right.$ c'-à-d :

$g(x)\leq 0$ signifie $g_i(x)\leq 0, i=1\ldots p$ et $g_i(x): R^n \to R$

$h(x): R^n \to R^q$ représente les contraintes en égalité. Elle a q composantes et on peut écrire :

$h(x)\ \left(\left(h_1(x), h_2(x)\ldots h_q(x)\right)\right.$ c'-à-d :

$h(x)=0$ signifie $h_i(x)=0, i=1\ldots q$ et $g_i(x): R^n \to R$

Les différentes contraintes vont limitées l'espace à une surface à l'intérieure de la quelle se trouvent les solutions possible.

soit□ l'ensemble des contraintes :

$$\square = \left\{x \middle| g(x)\leq 0, h(x)=0\right\} \tag{1.2}$$

Exemple 1.1 :

Retournons au problème de transport énoncé ci- dessus :

Variables de décision:

x_{ij} : La quantité à transporter du dépôt A_i au point de vente B_j

Fonction objectif :

$$min\ f = 12x_{11}+15x_{12}+20x_{13}+18x_{21}+10x_{22}+16x_{23}. \tag{1.3}$$

Contraintes :

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}\leq 120 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\leq 200 \\ x_{11}+x_{21}\geq 80 \\ x_{12}+x_{22}\geq 90 \\ x_{13}+x_{23}\geq 150 \\ x_{ij}\geq 0, \forall i\in\{1,2\}, \forall j\in\{1,...,3\} \end{cases} \tag{1.4}$$

1 .5 Résolution des problèmes d'optimisation :

Une fois que l'expression mathématique est écrite, la recherche opérationnelle propose la technique et la méthode de la résolution selon le type de problème (linéaire ou non linéaire, avec/ou sans contraintes) et la nature des variables de décision (continues ou discrètes). Pour résoudre un problème d'optimisation, on suit les étapes suivantes :

1. Fixer les objectifs, les contraintes, les variables de décision.
2. Trouver la formulation mathématique.
3. Choisir la méthode de la résolution selon le type du problème posé.
4. Validation de la solution obtenue.