Chaiptre2 :
Programmation non linéaire

2.1. Introduction :

La programmation non linéaire consiste à chercher un optimum du problème d'optimisation suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} opt\left(f\left(x\right)\right) \\ g\left(x\right)\le 0 \\ h\left(x\right)=0 \\ x\in R^{n} \end{cases} \tag{2.1}$$

Dans ce problème d'optimisation, la fonction objective et/ou les contraintes sont non linéaires en fonction de variables de décision.

Exemple 2.1

Un atelier peut fabriquer des articles de deux types, A_1 et A_2 sur une machine donnée, disponible 100 heures par mois. Les articles de type A_1 sont fabriqués à la cadence de 50 articles par heure et les articles de type A_2 sont fabriqués à la cadence de 25 articles par heure. La capacité d'absorption du marché étant limitée, on ne peut pas écouler par mois plus de 3000 articles de type A_1, ni plus de 2000 articles de type A_2. En raison d'un système de prix dégressif consentis aux clients, le prix de chaque article décroit légèrement avec la quantité vendue : un article de type A_1 rapporte $30(1- x_1/6000)$ unités monétaires lorsqu'on vend x_1, et un article de type A_2 rapporte $20\ (1- x2/4000)$ unités monétaires lorsqu'on vend x_2.

- *Quels produits l'entreprise doit-elle fabriquer et en quelle quantité afin de maximiser le bénéfice total ?.*

En désignant par x_i la production mensuelle de l'article A_i, on peut formuler le programme comme suit :

$$(\rho)=\begin{cases} max\left[\ f=\left(30x_1\left(1-x_1/600\right)+20x_2\left(1-x_2/400\right)\right)\right] \\ \dfrac{x_1}{50}+\dfrac{x_2}{25}\le 100 \\ x_1\le 3000 \\ x_2\le 2000 \\ x\in R^{+n} \end{cases} \tag{2.2}$$

La fonction objective est une fonction non linéaire. Donc, ce problème est un problème d'optimisation non linéaire.
L'objet de ce chapitre est de présenter les techniques permettant de résoudre le problème (2.1). Ce chapitre se focalise sur deux types de problème d'optimisation non linéaire:

- **Problèmes d'optimisation non linéaires sans contraintes**
- **Problèmes d'optimisation non linéaires avec contraintes**

2.2. Préliminaires mathématiques

2.2.1. Définition minimum (maximum) local : Soit $\square$ un ensemble non vide et f est une fonction de $f(x): R^n \to R$:

- **On dit que** $x^* \in \square$ réalise un minimum local de f sur R, si on peut trouver une boule ouverte $B(x^*)$ centrée en x^* telle que :

$$\forall x \in B(x^*) \cap \square, \qquad f(x^*) \leq f(x) \tag{2.3}$$

- **On dit que** $x^* \in \square$ réalise un maximum local de f sur R, si on peut trouver une boule ouverte $B(x^*)$ centrée en x^* telle que :

$$\forall x \in B(x^*) \cap \square, \qquad f(x^*) \geq f(x) \tag{2.4}$$

2.2.2. Définition minimum (maximum) global

- **On dit que** $x^* \in \square$ réalise un minimum global de f sur R,

si $\forall x \in \square, \qquad f(x^*) \leq f(x)$ (2.5)

- **On dit que** $x^* \in \square$ réalise un maximum global de f sur R, si

$$\forall x \in \square, \qquad f(x^*) \geq f(x) \tag{2.6}$$

Exemple 2.2 : La figure (2.1) montre les quatre définitions précédentes.

Proposition : si x^* réalise un maximum (local ou global) de f sur $\square$, x^* réalise un minimum (local ou global) de $-f$ sur $\square$, autrement dit :

$$max(f(x)) = -min(-f(x)) \tag{2.7}$$

Preuve :

Si x^* réalise un maximum de f, alors

$\forall x \in \square : f(x) \leq f(x^*)$ et par conséquence :

$\forall x \in \square : -f(x) \geq -f(x^*)$, c.à.d. :

$-f(x^*) = \min(-f(x))$ et donc, $f(x^*) = -min(-f(x))$.

Fin de preuve.

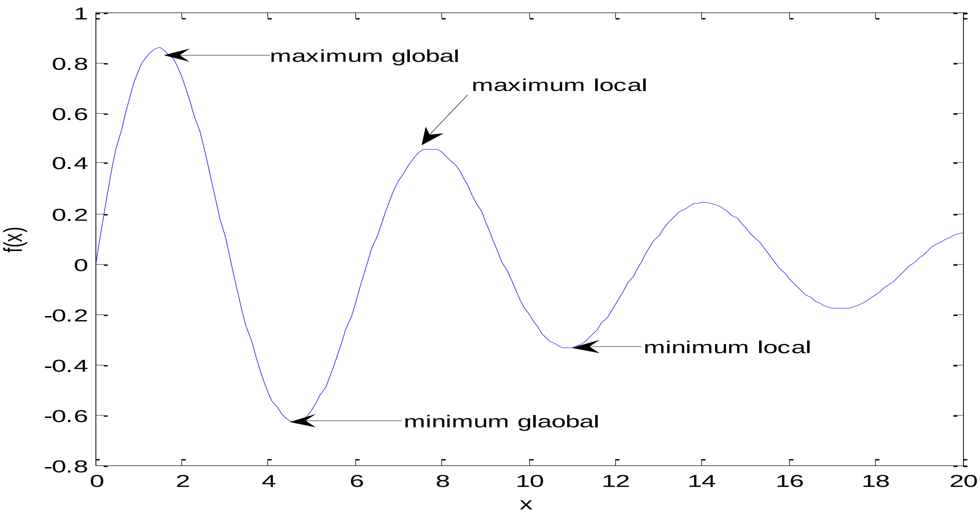


Figure 2.1 : Fonction non linéaire

2.2.3 Notion de la convexité :

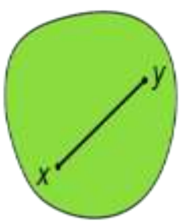
- **Définition d'un ensemble convexe :**

Soit un ensemble $\square \subset R^n, \square$ est un ensemble convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0,1] \subset R, \forall (x,y) \in \square^2, \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in \square \tag{2.8}$$

autrement dit : $\square$ est convexe, s'il contient tout « segment » reliant entre de quelconques de ses points.

Exemple 2. 3:



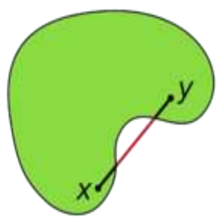


Figure 2.2 : Ensemble convexe *Figure 2.3 : Ensemble non convexe*

- **Définition d'une fonction convexe**

Une fonction est définie sur un intervalle réel □ , alors f est convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0,1] \subset R, \forall (x,y) \in □^2,\ f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad (2.9)$$

Exemple 2.4 : La figure ci-dessous illustre une fonction convexe

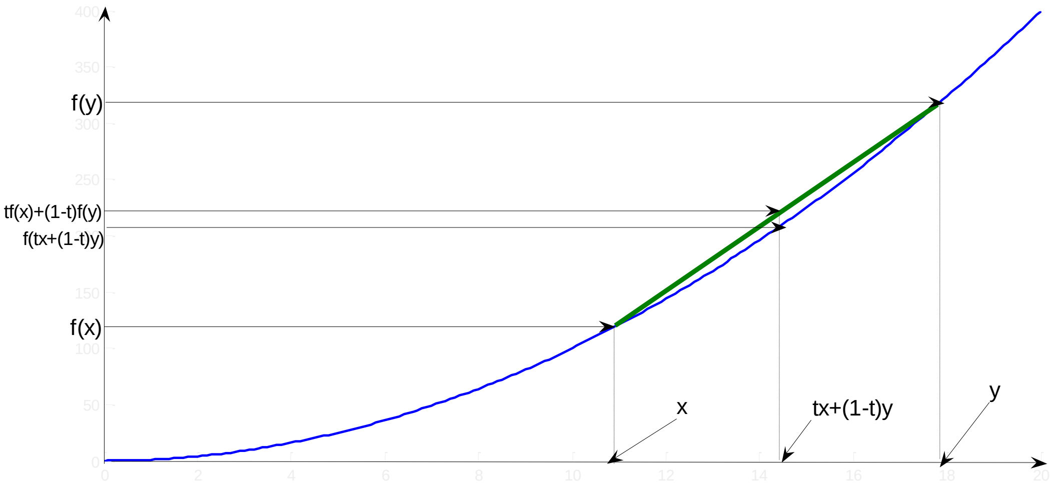


Figure 2.4 : Fonction convexe

Remarque 2.1 : l'opposé d'une fonction convexe est une fonction concave.

- **Définition d'une programmation convexe :** Un problème d'optimisation convexe s'énonce comme suit :

  $\min_{x \in □}(f(x))$ où □ est un ensemble convexe et f est une fonction convexe.

Cas particulier : soit le problème d'optimisation non linéaire (ρ) définie par (2.1), on dit que (ρ) est convexe dans les cas suivants :

- Si la fonction à optimiser f est convexe, les contraintes d'inégalité sont convexes et les contraintes d'égalité sont linéaires.
- Si la fonction à optimiser f est convexe et les contraintes d'inégalité et d'égalité sont linéaires.

Notons que la convexité est une propriété très importante pour la résolution des problèmes d'optimisation non linéaires car :

1. Il n'existe pas d'un minimum local de la fonction coût à optimiser, le résultat obtenu correspond à un minimum global unique.

2. Le temps de calcul pour trouver une solution est raisonnable.

- **La convexité et la matrice hessienne**

Une méthode simple pour tester la convexité et la concavité d'une fonction est l'utilisation de la dérivée seconde de f (x est un scalaire) ou bien la dérivée partielle $\partial^2 f$ (x est un vecteur). La dérivée partielle $\partial^2 f$ est appelée matrice hessienne et elle est notée par $H(x)$. Cette matrice est une matrice symétrique. Soit $x=\left[x_1,x_2,\ldots,x_n\right]^T$, et en supposant que toutes les dérivées partielles secondes de f existent, on a :

$$H(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Exemple 2. 5 :

Considérons $x=[x_1,x_2]^T$ et $f(x)=f_{11}x_1^2+f_{22}x_2^2+f_{12}x_1x_2$. La matrice hessienne associé à cette fonction est la suivante :

$$H(x)=\begin{bmatrix} 2f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & 2f_{22} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

L'évolution de la matrice hessienne permet de déterminer la convexité et la concavité de la fonction $f(x)$:

- La fonction $f(x)$ est convexe, si H est semi-définie positive : $\forall x\neq 0$ alors $x^T H(x)x\geq 0$.
- La fonction $f(x)$ est concave, si H est semi-définie négative : $\forall x\neq 0$ alors $x^T H(x)x\leq 0$.

Un test pratique pour déterminer si H est semi-définie positive, ou bien, elle est semi définie négative peut être énoncé comme suit :

- La fonction $f(x)$ est convexe, si toutes les valeurs de la diagonale de H sont positives et ses mineures principaux $\Delta_k \geq 0, \forall K \in \{1,...,n\}$
- La fonction $f(x)$ est concave, si toutes les valeurs de la diagonale de H sont négatives et le signe de ses mineures principaux $\Delta_k = signe(-1)^k, \forall K \in \{1,...,n\}$

Exemple 2.6 : Soit la fonction suivante :

$$f(x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 \tag{2.12}$$

La matrice hessienne associée à cette fonction est la suivante :

$H(x) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, on remarque que les valeurs de la diagonale sont positives et $\Delta_1 = 4 \succ 0, \Delta_2 = 7 \succ 0$. Donc, la fonction $f(x)$ est convexe.

Exemple 2.7 : Nous considérons la fonction suivante :

$$f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2 + 4 \tag{2.13}$$

La matrice hessienne est :

$H(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, on remarque que les valeurs de la diagonale sont positives ou nulles et $\Delta_1 = 2 \succ 0, \Delta_2 = -1 \prec 0$. Alors, la fonction $f(x)$ ni convexe ni concave.

2.3. Optimisation non linéaire sans contraintes :

Le problème d'optimisation non linéaire sans contraintes consiste à résoudre un problème de la forme suivante :

$$(\rho) \square\, opt(f(x)) \tag{2.14}$$

avec $f(x)$ est une fonction non linéaire.

2.3.1 Condition nécessaire du premier ordre :

Théorème : si la fonction $f(x)$ admet un optimum pour les valeurs x^*, alors chaque dérivée partielle du premier ordre s'annule ou n'existe pas.

Exemple 2.8 :

La figure ci-dessous illustre la fonction $f(x)=x^2$

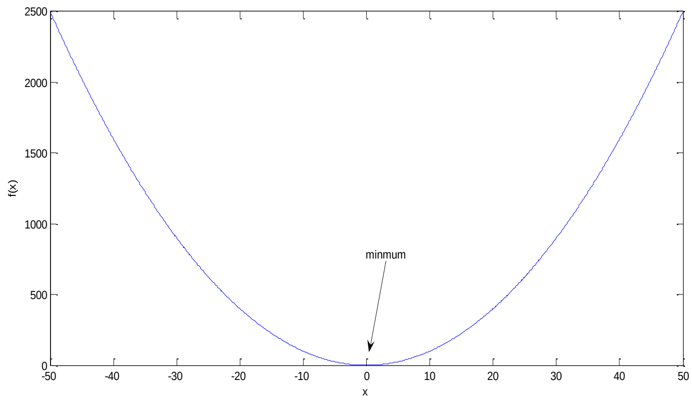


Figure 2.5 : La fonction $f(x)=x^2$

La fonction $f(x)$ admet un minimum au point $x^*=0$ ou sa dérivée s'annule $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x^*=0}=0$.

Exemple 2.9:

La fonction $f(x)=|x|$ (voir figure ci-dessous) admet un minimum au point $x^*=0$ ou sa dérivée n'existe pas en ce point.

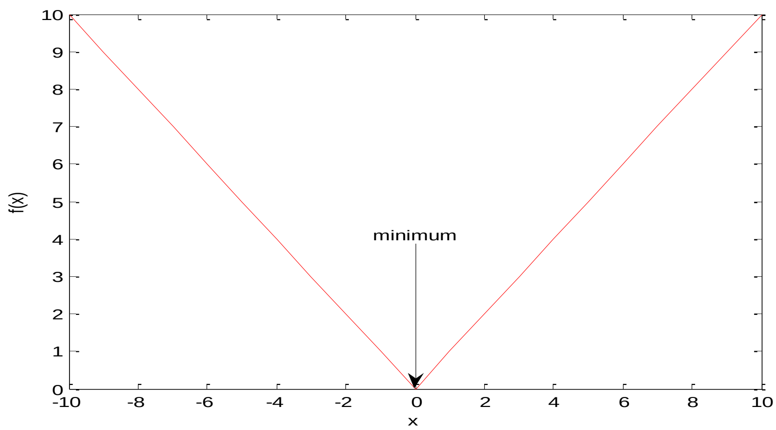


Figure 2.6 : La fonction $f(x)=|x|$

Remarque 2.1: La réciproque de ce théorème n'est pas vraie, c.à.d.: Le point où la dérivée s'annule ou n'existe pas n'est pas nécessairement un optimum. Les valeurs de la variable, pour lesquelles la dérivée s'annule ou a une discontinuité, sont appelées points critiques ou points_selles critiques. Autrement dit, tout point critique n'est pas nécessairement un extremum. Mais si la fonction admet un optimum en certain point. Ce dernier est nécessairement un point critique.

2.3.2 *Condition nécessaire du deuxième ordre :*

Soit $f(x)$ une fonction définie dans un domaine contenant le point $\left(x^*, f\left(x^*\right)\right)$ et dont les dérivées partielles continues jusqu'à au troisième ordre. Supposons en autre que le point $\left(x^*, f\left(x^*\right)\right)$ est un point critique de la fonction $f(x)$, alors pour $x = x^*$:

$f\left(x^*\right)$ est un maximum si et seulement si $H\left(x^*\right)$ est semi définie négative.

$f\left(x^*\right)$ est un minimum si et seulement si $H\left(x^*\right)$ est semi définie positive.

Preuve : D'après le développement de Taylor :

$$f(x) = f\left(x^*\right) + \left(x - x^*\right)^T \partial f\left(x^*\right) + \left(x - x^*\right)^T H\left(x^*\right)\left(x - x^*\right) + O_3\left(x^*\right)$$

$\left(x^*, f\left(x^*\right)\right)$ est un point critique de la fonction $f(x)$, alors $\partial f\left(x^*\right) = 0$ et :

$f(x) - f\left(x^*\right) = x^T H\left(x^*\right) x$ donc :

- $f(x) - f\left(x^*\right) \leq 0,\ Si \quad H\left(x^*\right) \leq 0$ (semi- définie _ négative).
- $f(x) - f\left(x^*\right) \geq 0,\ Si \quad H\left(x^*\right) \geq 0$ (semi- définie _ positive).

Exemple 2.10

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \tag{2.15}$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{bmatrix}$$

1. Trouvons les points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$, on résulte deux points critiques : $\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 1 \\ x_2 = 0, x_2 = 0 \end{cases}$

2. *Calculons la matrice hessienne pour chacun de ces points :*

$H\left(x^{1*}\right)=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \succ 0$ donc , $f(x)$ admet un minimum au point x^{1^*}.

$H\left(x^{2*}\right)=\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ ni définie positive ni-définie négative. Donc, x^{2*} est un point critique.

2.3. Optimisation non linéaire avec contraintes :

Bien souvent le problème de la détermination des minimums et des maximums d'une fonction de plusieurs variables qui ne sont pas indépendantes, mais liées entre elles par certaines conditions supplémentaires.

Exemple 2.11 :

Nous considérons le problème d'optimisation non linéaire avec contraintes suivant :

$$(\rho) = \begin{cases} min\left(f(x)\right) = 4x_1^2 + 5x_2^2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \tag{2.16}$$

La matrice hessienne de la fonction $f(x)$ est :

$H(x)=\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$. Cette matrice est définie positive. Donc, $f(x)$ est convexe. Il y'a une seule contrainte en inégalité linéaire. Alors, le problème (ρ) est un problème convexe.

Autrement dit : s'il existe une solution, elle est globale.

On peut trouver la solution de ce problème, si l'on substitue la valeur de x_1 dans la contrainte d'égalité $\left(x_1 = \dfrac{6-3x_2}{2}\right)$ dans la fonction $f(x_1)$, on trouve :

$f(x) = 14x_2^2 - 36x_2 + 36$. Par conséquence, la fonction $f(x)$ sera une fonction d'une seule variable et le problème d'optimisation sera un problème d'optimisation non linéaire sans contrainte :

$$(\rho)=\begin{cases} min \quad f(x)=14x_2^2-36x_2+36 \\ \forall x_2 \in R \end{cases} \tag{2.17}$$

Pour résoudre le problème (2.17), on cherche $\frac{df}{dx}=0$ (voir section 2.3), le point $x^*\left(x_2^*=1{,}28, x_1^*=\frac{6-3x_2^*}{2}=1{,}071\right)$.

Comme le problème est convexe, la solution globale est $f(x*)$.

Cette méthode est appliquée aux problèmes d'optimisation simples et de petite dimension. On peut résoudre les problèmes non linéaires avec contrainte sans qu'il est nécessaire de résoudre les contraintes par l'utilisation des méthodes suivantes:

2.3.1 Méthode de Lagrange :

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} min(f(x)) \\ g_j(x)\geq 0 \quad \forall j\in\{1,..,p\} \\ h_i(x)=0 \quad \forall i\in\{1,..,q\} \end{cases} \tag{2.18}$$

Ce problème est équivalent au problème suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} min(f(x)) \\ g_j(x)-\delta_j^2=0 \\ h(x)=0 \end{cases} \tag{2.19}$$

avec :

δ_j : est une variable réelle.

Nous définissons la fonction de Lagrange comme suit :

$$\Im(x,w,\delta)=f(x)+\sum_1^q[w_i]h_i(x)+\sum_{q+1}^{q+p}w_j\left(g_{j-q}(x)-\delta_{j-q}^2\right) \tag{2.20}$$

w_i est appelé multiplicateur de Lagrange.

- **Condition nécessaire du premier ordre :**

Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Im}{\partial x_1} = O, \ldots\ldots\ldots\ldots, \dfrac{\partial \Im}{\partial x_n} = O \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial w_1} = O, \ldots\ldots\ldots\ldots, \dfrac{\partial \Im}{\partial w_{p+q}} = O \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial \delta_1} = O, \ldots\ldots\ldots\ldots, \dfrac{\partial \Im}{\partial \delta_p} = O \end{cases} \quad (2.21)$$

La solution obtenue est un point critique. Ce n'est pas nécessairement un minimum sauf si celui-ci est convexe.

- **Condition nécessaire et suffisante :**

Dans le cas d'un programme convexe, $x*$ est une solution du problème (2.18) si et seulement si les conditions de Lagrange sont satisfaites.

Si le problème non convexe, on peut sélectionner les minima locaux parmi les points critiques calculés en utilisant les conditions du deuxième ordre.

- **Condition nécessaire du deuxième ordre :**

Supposons que $x*$ est un point de R^n vérifiant les conditions nécessaires du premier ordre avec les paramètres $(x*, w*, \delta*)$. Si la matrice hessienne de la fonction Lagrangienne au point $(x*, w*, \delta*)$ est semi-définie- positive $\left(\dfrac{\partial^2 \Im}{\partial x \partial x}\Big|_{((x*,w*,\delta*))} \geq 0 \right)$ alors $x*$ est un minimum (local).

Exemple 2.12 :

On va résoudre le problème ci-dessous par Lagrange

$$(\rho) = \begin{cases} min\left(f(x) = x_1 x_2 \right) \\ g(x) = 25 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \end{cases}$$

La fonction de Lagrange associée à ce problème est donnée comme suit :

$$\Im(x, w, \delta) = x_1 x_2 + w \left(25 - x_1^2 - x_2^2 - \delta^2 \right)$$

- Condition nécessaire du premier ordre :

Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Im}{\partial x_1} = O \Rightarrow x_2 - 2wx_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial x_2} = O \Rightarrow x_1 - 2wx_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial w} = O \Rightarrow 25 - x_1^2 - x_2^2 - \delta^2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Im}{\partial \delta} = O \Rightarrow -2w\delta = 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont résumés dans le tableau suivant :

w	x_1	x_2	δ
0	0	0	5
-0.5	$\begin{cases} 3.5 \\ -3.5 \end{cases}$	$\begin{cases} 3.5 \\ -3.5 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$
0.5	$\begin{cases} 3.5 \\ -3.5 \end{cases}$	$\begin{cases} 3.5 \\ -3.5 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$

La fonction $f(x)$ n'est pas convexe et par conséquence le problème d'optimisation imposé n'est pas convexe. C'est la raison pour laquelle, il faut passer aux conditions nécessaires du deuxième ordre pour identifier les points critiques trouvés.

- Condition nécessaire du deuxième ordre :

La matrice hessienne de la fonction lagrangienne est la suivante :

$$H(x,w,\delta) = \begin{bmatrix} -2w & 1 \\ 1 & -2w \end{bmatrix}.$$

on a :

$H(x,w,\delta)\big|_{w=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ni semi-definie-negative ni semi-definie-positive. Donc, le point x(0 ,0) est un point critique.

$H(x,w,\delta)\big|_{w=0.5} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ est semi-definie-négative. Donc, les points $x(3.5, 3.5)$ et $x(-3.5,-3.5)$ sont des points maximums.

$H(x,w,\delta)\big|_{w=-0.5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est semi-definie-positive. Donc, les points $x(3.5,-3.5)$ et $x(-3.5,3.5)$ sont des points minimums.

Remarque 2.2 : *Une version plus raffinée pour les conditions nécessaires du deuxième ordre dans le cas des contraintes d'égalité est la suivante :*

toutes les racines du polynôme :

$$p(\lambda)=\begin{bmatrix} A-\lambda I & D \\ D' & 0 \end{bmatrix}$$

*sont positives, alors x * est un minimum du problème contraint*

2.3.2 Méthode de KKT (Karush-Kuhn-Tucker) :

Soit le problème d'optimisation non linéaire suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} min(f(x)) \\ \forall x \in \square \\ \square \ \square \{x | g(x) \le 0, h(x)=0\} \end{cases} \tag{2.23}$$

Définitions:

- Contraintes actives : on dit qu'une contrainte g_j en inégalité est active (ou saturée) au point $x* \in R^n$ si $g_j(x^*)=0$.
- Une contrainte qui n'est pas active est inactive . On note $I(x^*)$, l'ensemble des indice j correspondant aux contraintes actives en x^*.
- Un point régulier : on dit qu'un élément $x* \in R^n$ est régulier pour les contraintes h et g si les conditions suivantes sont vérifiés :

1. S'il est réalisable : $h_i(x^*)=0$ et $g_j(x^*) \le 0$.
2. Si les vecteurs: $\nabla h_i(x^*), \forall i \in \{1,..,q\}$ et $\Delta g_j(x^*), \forall j \in I(x^*)$ sont indépendants.
3. Le vecteur $\nabla g_j(x^*) \ne 0, \forall j \in I(x^*)$.

Conditions de KKT :

Soit x^* un point régulier. x^* est une solution du problème d'optimisation (2.2 3), alors il existe $\lambda^* \in R^q$ et $\mu^* \in R^{+p}$ tels que les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mu_j^* \ge 0$

2 . $h_i\left(x^*\right)=0$ et $g_j\left(x^*\right)\leq 0$.

3. $\mu_j^* g_j\left(x^*\right)=0$

4. $\nabla f\left(x^*\right)+\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\nabla h_i\left(x^*\right)+\sum_{i=1}^{p}\mu_j\nabla g_j\left(x^*\right)=0$

Cas d'un problème convexe

Si le problème est convexe, les conditions de KKT ci-dessus sont suffisantes pour impliquer l'optimalité globale.

Exemple 2.13 :

Considérons le problème d'optimisation non linéaire suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} min\left(f\left(x\right)=2x_1^2+2x_1x_2-10x_1-10x_2+x_2^2\right) \\ x_1^2+x_2^2-5\leq 0 \\ 3x_1+x_2-6\leq 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Les conditions de KKT associées à ce problème sont :

1. $\mu_1\geq 0,\mu_2\geq 0$

2 . $3x_1+x_2-6\leq 0$ et $x_1^2+x_2^2-5\leq 0$.

3. $\mu_1\left(x_1^2+x_2^2-5\right)=0,\mu_2\left(3x_1+x_2-6\right)=0$

4. $\begin{cases} 4x_1+2x_2-10+2\mu_1x_1+3\mu_2=0 \\ 2x_1+2x_2-10+2\mu_1x_2+\mu_2=0 \end{cases}$

Il y'a deux contraintes d'ingalité de type $\leq$, donc, on a quatre cas :

- **Cas1 :** les deux contraintes sont inactives **:** $\mu_1=0,\mu_2=0$ ce qui donne $x_1=0,x_2=5$. Malheureusement ce point ne vérifié pas la condition 2.
- **Cas 2 :** g_1 est active et g_2 est inactive. Ce système a pour solution : $x^*\left(x_1=1,x_2=2\right)$ $\mu_1=1,\mu_2=0$. Cette solution est admissible. Il reste de vérifier que ce point est un point régulier. La seule contrainte active est la première contrainte. Alors, $I\left(x^*\right)=\{1\}.\Delta g_1\left(x^*\right)=\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}^T\neq 0$, on peut confirmer maintenant que x^* est un point régulier.

Le programme est convexe, ce qui implique que le point x^* est une solution globale de notre problème sans la nécessité de passer par les autres cas.

2.4 Optimisation quadratique :

L'optimisation quadratique consiste à rechercher l'optimum d'une fonction quadratique soumise à des contraintes d'égalité et d'inégalité linéaire comme suit :

$$(\rho)=\begin{cases} min\left(f(x)=\frac{1}{2}x^T Qx + r^T x \right) \\ Ax = B \\ Cx \leq D \end{cases}$$

ou :

$x \in R^n$, $x \in R^n$, $D \in R^q$, $A \in R^{n\times p}$, $B \in R^q$, $C \in R^{n\times p}$ et $D \in R^q$.

Pour résoudre ce type de problème, on peut utiliser les méthodes dédiées à la programmation non linéaire exposée dans la section 2.3. Mais, il faut noter que l'avantage d'un problème d'optimisation quadratique réside dans le faite qu'il est un programme convexe. En effet, s'il existe une solution, elle est globale. Autrement dit, les conditions du premier ordre sont nécessaires et suffisantes pour trouver la solution.

2.5. Exercices avec solution abrégée

<u>Exercice 01:</u>

Soients les contraintes suivantes :

$$-(x_1-1)^2 + x_2 \leq 0$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Montrer que le point $x_1=1$; $x_2=0$ est point réalisable mais pas régulier ?

- **Réponse :**

1. Les trois contraintes sont satisfaites. Alors, il est réalisable.
2. Le vecteur $\nabla g_j\left(x^*\right) \neq 0, \forall j \in \{1,3\}$ sont dépendants. Donc, le point n'est pas réguler.

<u>Exercice 02 :</u>

Considérons le programme mathématique

$$Min\ f(x) = -x_1^2 + 2x_1 + x_2$$

avec les contraintes :

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 \ \ x_2 \geq 0$$

Résoudre le programme en s'aidant uniquement des conditions de KKT.

- **Réponse :**

l. Le problème n'est pas convexe.
2. Le point qui réalise les conditions de KKT est x^*= *(0.5, 0.5)* et est un pont régulier. Donc, la solution est $f(x^*)=1.25$

<u>Exercice 03 :</u>

On se place dans R^2 , et on note $x=[x_1\ x_2]^T$. On considère la fonction f de R^2 dans R définie par : $f(x)=\frac{1}{2}x^TBx+b^Tx=\frac{1}{2}\left(x_1^2+\alpha\ x_2^2\right)+x_1$
où B est une matrice symétrique 2-2, b un vecteur de R^2 et $\alpha\in R$
a)Préciser B et b, calculer $\nabla f(x)$
b) Donner une condition nécessaire pour que x soit un minimum (local) sans contraintes de f
1) si α=0; montrer que f possède un minimum et qu'il y a une infinité de x réalisant ce minimum. Si $\alpha\neq 0$, quel est l'élément x^* pouvant réaliser éventuellement le minimum ?
2) On suppose que α=2 ; On veut minimiser la fonction f avec la contrainte supplémentaire :

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2}\leq\frac{1}{2}$$

Calculer le minimum éventuel.

- **Réponse :**

a)

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix},\qquad b=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x)=\begin{cases}x_1+1\\ \alpha\end{cases}$$

b) $\nabla f(x)=0$.

1) Si $\alpha=0$, touts points de la forme $\left(x_1=-1,x_2\right),\forall x_2\in R$ minimisent la fonction *f*.

2) Si $\alpha=0$, le seul élément réalise les condition de KKT est x^*= *(-0.5, 0)*.

<u>Exercice 04:</u>

Résoudre le problème d'optimisation (2.2).

- **Réponse :**

l. Le problème est convexe.

2. Le point qui réalise les conditions de KKT est x^*= *(2600, 1200)*. Alors, x^* réalise un maximum de fonction *f*.