Chapitre 3 :
Optimisation linéaire

3.1. Introduction

Le problème d'optimisation linéaire PL (**P**rogramme **L**inéaire) consiste à rechercher une solution x du problème d'optimisation suivant:

$$(\rho)=\begin{cases} opt\left(f\left(x\right)\right) \\ g\left(x\right)\leq 0 \\ h\left(x\right)=0 \\ x\in R^{n} \end{cases} \tag{3.1}$$

$f\left(x\right)$, $g\left(x\right)$ et $h\left(x\right)$ sont des fonctions linéaires.

Exemple 3.1: problème d'identification

Un physicien a observé qu'une certaine quantité dépend d'un paramètre *t*. Il a de bonnes raisons de penser que $Q(t)$ est décrit par la loi $Q(t)= a+ bt+ct^2$. Il souhaite déterminer les paramètres a, b et c (ces paramètres sont positifs).

Pour des valeurs t_1, t_2,..t_k, il a effectué des mesures qui lui ont donné des valeurs Q_1, $Q2, \ldots, Q_k$..

Il désir déterminer a, b et c de manière que la quantité: $\max_{1\leq i\leq k}\left(\left|a+bt_i+ct_i^2-Q_i\right|\right)$.

Soit aussi petite que possible. Ecrive ce problème sous forme d'un problème d'optimisation linéaire.

L'expression mathématique de ce problème d'optimisation est la suivante :

$$(\rho)=\begin{cases} min\, r \\ r=max_{1\leq i\leq k}\left(\left|a+bt_i+ct_i^2-Q_i\right|\right) \end{cases} \tag{3.2}$$

On remarque que le problème (ρ) n'est pas linéaire vis-à-vis des variables de décision a , b et c. La formulation linéaire équivalente de ce problème peut être énoncée comme suit:

$$(\rho)=\begin{cases} min\, r \\ a+bt_i+ct_i^2-Q_i\leq -r \\ a+bt_i+ct_i^2-Q_i\geq r \end{cases} \tag{3.3}$$

3.2. Méthodes de résolution d'un programme linéaire

3.2.1 Solution graphique

La solution optimale x se trouve sur l'un de sommet de l'ensemble □ . Donc, pour déterminer cette solution, on va suivre les étapes suivantes:

Etape 1 : Chercher touts les sommets délimitant les solutions réalisables (l'ensemble□).

Etape 2 : Evaluer la fonction objective en ces sommets.

Etape 3 : Comparer les valeurs obtenues et extraire la solution optimale.

Exemple 3.2

Soit le PL. suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} max\ f=50x_1+50x_2 \\ 3x_1+2x_2\leq 18 \\ x_1+2x_2\leq 10 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Soit □ l'ensemble des contraintes du PL défini par (3.4). Donc,□ est donné par

$$\square=\left\{ x \left| \begin{matrix} 3x_1+2x_2\leq 18 \\ x_1+2x_2\leq 10 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{matrix} \right. \right\} \tag{3.5}$$

La figure suivante représente l'ensemble□ .

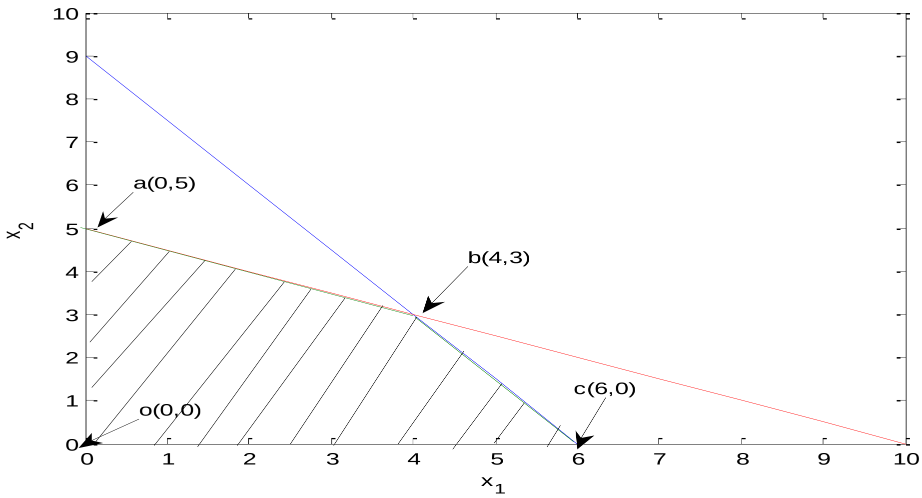

Figure 3.1: L'ensemble□ ,

La solution optimale x se trouve sur l'un des sommets de l'ensemble □ (ensemble hachuré). L'évaluation de la fonction objective f dans chaque sommet, nous donne :

$f(0)=0, f(a)=250, f(b)=350, f(c)=300$.

Donc, la solution optimale se trouve sur le sommet b et $f_{max} = f(b) = 350$.

Inconvénient :

La méthode graphique n'est pratiquement applicable qu'aux PLs de petites dimensions.

3.2.2 Solution algébrique et l'algorithme du simplexe :

La méthode du simplexe est une résolution algébrique des problèmes de PL L'algorithme du simplexe va rechercher une solution optimale en passant d'un sommet de l'ensemble à un autre qui donne à la fonction objective une valeur supérieure à celle obtenue précédemment.

Forme canonique d'un PL

Généralement, un PL. peut s'écrire sous la forme canonique suivante :

$$(\rho) = \begin{cases} max\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, \cdots x_n \geq 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Chaque programme linéaire en forme canonique (3.6) s'´ecrit en forme standard et inversement.

Forme standard d'un PL

La forme standard d'un PL. est la suivante.

$$(\rho) = \begin{cases} max\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + \varepsilon_1 = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + \varepsilon_m = b_m \\ x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

ε_i est appelé variable d'écart qui doit être positive.

Base et solution de base réalisable :

Chaque sommet de l'ensemble de la solution réalisable correspond à une base réalisable dans la forme standard.

Exemple 3.2

Soit le PL suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} max\ f=800x_1+500x_2 \\ 10x_1+5x_2\leq 50 \\ 15x_1+10x_2\leq 90 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

La forme standard du PL. (3.8) est comme suit :

$$(\rho)=\begin{cases} max\ f=800x_1+500x_2+0x_3+0x_4 \\ 10x_1+5x_2+1x_3+0x_4=50 \\ 15x_1+10x_2+0x_3+1x_4=90 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0, x_4\geq 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Généralement, les variables de base sont les variables d'´ecart et les autres sont les variables hors base. Par conséquence, dans la forme standard (3.9), (x_2, x_3) sont les variables de base et (x_1, x_2) les variables hors base. Par l'annulation des variables hors base, on a:

$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 90 \end{bmatrix}$ satisfait aux contraintes dite solution de base réalisable.

Notons que, $f(x)=0$ n'est pas optimale, il est nécessaire de faire un changement de base qui améliore la fonction objective.

Changement de base :

La méthode du simplexe consiste à transiter d'un sommet à un autre qui améliore la fonction objective. Afin d'effectuer ce changement, il faut permuter une variable de base dite sortante par une variable hors base dite entrante.

Choix de la variable entrante

$$x^{ent}\equiv max(c_i) \tag{3.10}$$

Choix de la variable sortante

En supposant que $x^{ent}=x_j$

$$x^{sort}\equiv min\left({}^{b_i}\!/\!{}_{a_{ij}} \right), i=1,\dots,m \tag{3.11}$$

Algorithme du simplexe:

On peut résumer l'algorithme comme suit.

1. Exprimer le problème sous la forme standard
2. Sélectionner une solution de base nécessairement réalisable

3. Exprimer la fonction objective en termes des variables hors base
4. tester l'optimalité de la fonction objective selon les cas suivants :

cas1 : Problème non bornée : il existe un coefficient positif dans la fonction objective et il n'y a pas des solutions de base réalisables.

cas2 : Optimalité : tous les coefficients de la fonction objective sont négatives, la solution est optimale.

Cas3 : Pas de maximale : il existe au moins un coefficient positif et une solution de base réalisable. Dans ce cas il faut faire un changement de base

5. Reprendre l'algorithme à partir de l'étape 2.

Convergence de l'algorithme du simplexe

Si le problème PL écrit sous la forme standard possède une solution de base initialement réalisable, l'algorithme du simplexe décrit ci-dessus termine après un nombre fini d'étapes, soit en déterminant que le problème PL est non borné, soit en en trouvant une solution optimale.

Exemple 2.1

1. Forme standard :

Retournons à la forme standard : (3.9)

2. Solution de base initiale nécessairement réalisable (voir l'exemple 3.2) :

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\50\\90\end{bmatrix}.$$

3. Fonction objective en termes de variables hors base :

$$f=800x_1+500x_2+0x_3+0x_4$$

4. Test d'optimalité :

$c_1=800\geq 0, c_2=500\geq 0$, la solution n'est pas optimale.

Changement de base

$x^{ent}\equiv max(800,500)=x_1$ et $x^{sort}\equiv min\left({}^{b_i}\!/\!{}_{a_{i1}}\right)_{i=1,\ldots,m}=\left(\frac{50}{10},\frac{90}{15}\right)=5$. La première équation est l'équation de pivotage dans laquelle, il y'a la variable entrante et la variable sortante.

On a alors :

$x^{sort} \equiv x_3$ et la nouvelle base devient (x_1, x_4).

Pour faire le changement, il faut transformer les équations (3.9) de telle façon que les coefficients associés à x_1 soient $(1,0)$, tout en gardant les coefficients de x_4 et on obtient :

$$\begin{cases} 1x_1 + \frac{5}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_3 + 0x_4 = 5 \\ 0x_1 + \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + 1x_4 = 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

- *Fonction objective en termes de variables hors base :*

$f = 4000 - 80x_3 + 100x_2 + 0x_1 + 0x_4$

- *Test d'optimalité :*

La solution de base est:

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Elle est réalisable et $\exists c_2 = 100 \geq 0$, alors :

La solution n'est pas optimale.

- *Changement de base*

$x^{ent} \equiv max(100) = x_2$ et , $x^{sort} \equiv min\left(b_i / a_{i2}\right)_{i=1,\dots,m} = (10,6) = 6$, Donc , l'équation 2 est l'équation de pivotage et $x^{sort} \equiv x_4$. Alors, la nouvelle base devient (x_1, x_2).

La nouvelle forme standard :

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0.4x_3 - 0.3x_4 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 - 0.6x_3 + 0.4x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Fonction objective en termes de variables hors base :

$f = 4600 - 20x_3 - 40x_4 + 0x_1 + 0x_2$

- *Test d'optimalité :*

La solution de base réalisable associée à cette base est:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } f_{max} = 4600$$

Cette solution est optimale, car tous les coefficients de la fonction objective sont négatifs.

Initialisation de la méthode du simplexe.

L'algorithme du simplexe s'applique directement, si on peut trouver une solution de base initiale réalisable. Parfois, une solution initiale n'est pas obtenue et il faut faire appel à d'autre techniques comme **la méthode de deux phases** ou bien transformer le problème posé en autre PL équivalent dit **dual.**

Méthode de deux phases :

Cette méthode est composée par deux phases.

- **Première phase :**

L'objectif de la première phase est de trouver une solution initiale réalisable en utilisant des variables artificielles (S_i). Pratiquement, en ajoutant une variable dans chaque équation dans la quelle il n'est pas possible de mettre en évidence une variable de base réalisable. Dans cette phase, une nouvelle fonction objective est insérée et elle définie comme la somme des variables artificielles$\left(f' = \sum S_i\right)$. Elle est à minimiser. Par la suite, en appliquant l'algorithme du simplexe à ce nouveau Pl l'algorithme du simplexe est s'arrêté si la nouvelle fonction objective atteint sa valeur finale $\left(f' = 0\right)$. A la fin de cette phase, les variables artificielles doivent être exclues. En effet, en laissant tombé les colonnes correspondant aux variables artificielles. A la fin de cette phase, une solution de base réalisable est obtenue.

- ***Deuxième phase :***

Dans cette phase, en insérant la fonction objective initiale et en exécutant l'algorithme du simplexe.

Exemple 3.3

Soit le PL. suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} max\ f=x_1-x_2 \\ 6x_1-x_2+x_4=10 \\ x_1+5x_2-x_5=4 \\ x_1+5x_2+x_3=5 \\ x_i\geq 0,\forall i \end{cases} \tag{3.13}$$

On remarque que le PL est déjà sous la forme standard

Si on va choisir (x_3,x_4,x_5) comme variables de base et (x_1,x_2) sont les variables hors base. Par l'annulation des variables hors base, on a:

$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}$ ne satisfait pas aux contraintes, donc, cette solution de base n'est pas réalisable.

En ajoutant une variable artificielle à l'équation dans la quelle se pose le problème. Dans notre cas, c'est équation 2. On obtient :

$$\begin{cases} 6x_1-x_2+x_4=10 \\ x_1+5x_2-x_5+x_6=4 \\ x_1+5x_2+x_3=5 \\ x_i\geq 0,\forall i \end{cases}$$

La nouvelle fonction objective est: $f'=x_6$ et elle à minimiser. Le nouveau problème d'optimisation devient :

$$\begin{cases} min\ f'=x_6 \\ 6x_1-x_2+x_4=10 \\ x_1+5x_2-x_5+x_6=4 \\ x_1+5x_2+x_3=5 \\ x_i\geq 0,\forall i \end{cases}$$

La forme canonique équivalente à ce PL est la suivante :

$$\begin{cases} max\quad -f'=-x_6 \\ 6x_1-x_2+x_4=10 \\ x_1+5x_2-x_5+x_6=4 \\ x_1+5x_2+x_3=5 \\ x_i\geq 0,\forall i \end{cases}$$

Nous remarquons que :

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\5\\10\\0\\4\end{bmatrix}$$ est une solution de base réalisable et nous pouvons initialiser l'algorithme du simplexe.

L'application de l'algorithme du simplexe, nous donne :

$$\begin{cases} max \quad -f' = -x_6 \\ 6{,}2x_1 - 0.2x_4 + 0.2x_6 = 10{,}8 \\ 0.2x_1 + x_2 - 0.2x_5 + 0.2x_6 = 0{,}8 \\ x_3 + 5x_5 - x_6 = 1 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases}$$

Les variables de base son :

(x_3, x_4, x_6) comme variables de base et (x_1, x_2, x_5) sont les variables hors base.

La solution réalisable associée à cette base est:

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0{,}8\\1\\10{,}8\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Dans cette étape, on voit que la variable artificielle devient une variable hors base et on peut l'exclure. En laissant tombé la colonne correspondant à cette variable et en gardant la solution de base réalisable trouvé.

Insérons la fonction objective initiale et nous résolvons par simplexe le PL suivant :

$$\begin{cases} max\ f = x_1 - x_2 \\ 6{,}2x_1 + x_4 - 0.2x_5 = 10{,}8 \\ 0.2x_1 + x_2 - 0.2x_5 = 0{,}8 \\ x_3 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases}$$

La solution optimale est :

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0,45\\1\\1,47\end{bmatrix} \text{ et } \quad max\ f=1,47\ .$$

3.3. Dualité

Chaque programme linéaire possède son équivalent appelé dual. L'analyse théorique montre des PLs. montre qu'il se peut que le PL initiale n'ait aucun solution réalisable alors son dual en possède une ou plusieurs.

Pour un PL s'écrit dans la forme canonique suivante :

$$(\rho)_{primal}\begin{cases}max\ f=C^T X\\ AX\le B\\ X\ge 0\end{cases} \quad \text{est équivalent au Pl. suivant:}$$

$$(D)_{dual}\begin{cases}min\ j=BX\\ A^T Y\le C\\ Y\ge 0\end{cases}$$

Sachant que :

Le nombre de contraintes de (ρ) égale au nombre de variables de (D) ,

Le nombre de variables de (ρ) égale au nombre de contraintes de (D).

Les liens entre le programme primal et son dual sont résumés dans le tableau suivant :

Primal	***Dual***
maximisation	*minimisation*
Coefficient de f	*Second membre des contraintes*
Second membre des contraintes	*Coefficient de j*
Contraintes : $\begin{cases}=\\ \ge\\ \le\end{cases}$	*Variable :* $\begin{cases}\text{signe quelconque}\\ \le\\ \ge\end{cases}$
Variable : $\begin{cases}\text{signe quelconque}\\ \le\\ \ge\end{cases}$	*Contraintes :* $\begin{cases}=\\ \le\\ \ge\end{cases}$

Exemple 3.4:

Soit le PL suivant :

$$(\rho)=\begin{cases} max\ f=800x_1+500x_2 \\ 10x_1+5x_2\leq 50 \\ 15x_1+10x_2\leq 90 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases} \qquad (3.14)$$

Son dual est le suivant :

$$(D)=\begin{cases} min\ j=50y_1+90y_2 \\ 10y_1+15y_2\leq 800 \\ 5y_1+10y_2\leq 500 \\ y_1\geq 0, y_2\geq 0 \end{cases} \qquad (3.15)$$

3.4. Exercices avec solutions abrégées :

Exercice 1 :

Résoudre graphiquement le problème d'optimisation suivant :

1) Maximiser $F=200x_1+100x_2$
sous les contraintes :

$$8x_1+3x_2\leq 48$$
$$9x_1+16x_2\leq 144$$
$$10x_1+8x_2\leq 80$$

avec : $x_1\geq 0 \quad x_2\geq 0$

- **Réponse :**

Par l'application directe de la méthode graphique, nous obtenons :

$f_{max}=1310$

Exercice 2:

Résoudre graphiquement le problème d'optimisation suivant :

2) Maximiser $F=x_1+x_2$
sous les contraintes :

$$x_1-x_2\leq 2$$
$$x_1-x_2\geq -2$$

avec : $x_1\geq 0 \quad x_2\geq 0$

- **Réponse :**

L'ensemble des contraintes n'est pas fermé et par conséquence la fonction *f* n'est pas bornée.

Exercice 3:

Soit le programme linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } F=1400x_1+800x_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} 4x_1+2x_2 &\leq 16 \\ 2x_1+2x_2 &\leq 10 \\ 6x_1+4x_2 &\leq 48 \end{aligned}$$

$$\text{avec : } x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Résoudre ce problème par la méthode de simplexe

- **Réponse :**

L'application directe de la méthode de simplexe, nous donne :

$f_{max}=5800$

Exercice 4 :

Soit le programme linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } F=x_1+2x_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} -2x_1+x_2 &\leq 2 \\ -x_1+2x_2 &\leq 5 \\ x_1-4x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

$$\text{avec : } x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Résoudre ce problème par:

1- la méthode graphique.

2. la méthode de simplexe.

- **Réponse :**

1. L'ensemble des contraintes n'est pas fermé et par conséquence la fonction f n'est pas bornée.
2. En utilisant l'algorithme du simplexe, on trouve qu'il existe un coefficient positif dans la fonction objective et il n'y a pas des solutions de base réalisables. Donc, f n'est pas bornée.