

Performances de système asservis

les performances des systèmes asservis sont définies par :

- la sensibilité - la rapidité - la stabilité et la précision.

① la sensibilité : soit une fonction $f(x, y, z, \dots)$, la sensibilité de la fonction "f" par rapport à la variable x est définie :

$$S_x^f = \frac{(Df)}{f} = \frac{Df/f}{Dx/x}$$

② en Boucle ouverte : $E(s) \rightarrow G(s) \rightarrow S(s)$
 $S(s) = G(s) \cdot E(s) \Rightarrow \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta E}{E}$
 $\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta E}{E}$; $\Delta E = 0$ (entrée constante)
 $\Rightarrow \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta G}{G} \Rightarrow \frac{\Delta S/S}{\Delta G/G} = 1$

Donc une variation dans la chaîne d'action entraîne une variation du signal de sortie identique.

③ en Boucle fermée : $E(s) \rightarrow G(s) \rightarrow S(s)$
 $S = \frac{G}{1+G} \cdot E$

$$\frac{dS}{dG} = \frac{E}{(1+G)^2} \Rightarrow dS = \frac{E \cdot dG}{(1+G)^2}$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{E \cdot \Delta G}{(1+G)^2} \Rightarrow \frac{\Delta S}{S} = \frac{E \cdot \Delta G / (1+G)}{G \cdot E / (1+G)} = \frac{\Delta G/G}{1+G}$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta G}{G} \cdot \frac{1}{1+G} \Rightarrow \frac{\Delta S/S}{\Delta G/G} = \frac{1}{1+G}$$

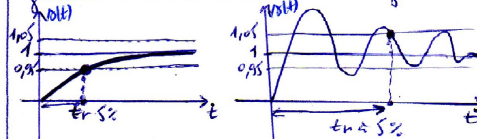
Donc l'influence de $G(s)$ est réduite par la présence de la chaîne de retour surtout dans la gamme de fréquence (ω tel que :

$$|G(j\omega)| \gg 1$$

④ la rapidité : la rapidité d'un système est évaluée à partir du régime transitoire de la réponse indicielle ou impulsionnelle par la durée de réglage ou bien le temps de réponse à 5% ; (t_r à 5%)

* le temps de réponse à 5% : (durée de réglage) c'est le temps compris entre l'instant d'application d'une variation en échelon d'un signal d'entrée et l'instant où la

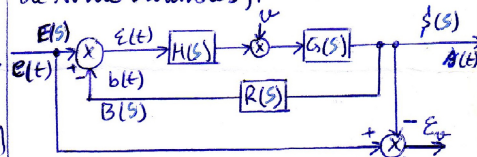
variation du signal de sortie ne s'écarte plus au delà d'une tolérance spécifiée en général $\pm 5\%$ de la valeur de régime.



⑤ la précision : la précision d'un système est définie à partir de l'erreur entre la grandeur de la consigne $e(t)$ et la grandeur de sortie $s(t)$.

a) la précision statique : elle est caractérisée par le régime permanent constant c-à-d régime statique (signaux d'entrée et de sortie constantes).

b) la précision dynamique : elle est caractérisée par le régime permanent variable c-à-d le régime dynamique (signaux d'entrée et de sortie variables).



$$\text{l'écart vrai } \varepsilon_{\text{vrai}} = e(t) - s(t)$$

mais en pratique dans la majorité des cas l'écart vrai n'est pas directement accessible, alors on s'intéresse à la différence entre $e(t)$ et $b(t)$ qui est toujours mesurable, donc $\varepsilon(t) = e(t) - b(t)$

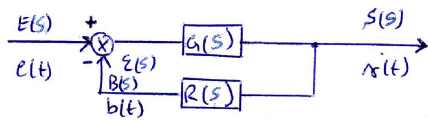
* Calcul des différentes erreurs : puisque on s'intéresse qu'au régime permanent (étalé) on peut utiliser le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon(s)$$

l'erreur idéale c'est l'erreur $\varepsilon(t) = 0$

Si on essaye de la minimiser le plus possible :

l'erreur $\varepsilon(t)$ c'est $\varepsilon(t) = e(t) - b(t)$



$$E(s) = E(s) - B(s); B(s) = S(s) \cdot R(s)$$

$$S(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot R(s)} E(s)$$

$$E(s) = E(s) - S(s) \cdot R(s) = E(s) - \frac{G(s) \cdot E(s) \cdot R(s)}{1 + G(s) \cdot R(s)}$$

$$E(s) = \frac{E(s)}{1 + G(s) \cdot R(s)} = \frac{E(s)}{1 + H_0(s)}$$

avec $H_0(s) = FTBO$

donc l'erreur en régime permanente ne dépend que de la FTBO et de l'entrée $E(s)$.

soit $H_0(s)$ la FTBO, elle peut se mettre sous la forme :

$$H_0(s) = \frac{K_0 (1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m)}{p (1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n)}$$

d = classe du système en boucle ouverte

K_0 = gain du système en boucle ouverte

* au voisinage de zéro ($s \rightarrow 0$) on a :

$$H_0(s \rightarrow 0) = \frac{K_0}{s^d} \text{ on a 3 cas habituelle:}$$

① erreur statique = erreur de position

entrée en échelon :

$$E(t) = \begin{cases} 1 & t > 0^+ \\ 0 & t < 0^- \end{cases} \text{ donc } E(s) = \frac{1}{s}$$

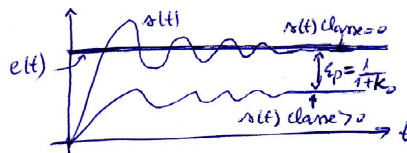
$$\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{E(s)}{1 + H_0(s)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot 1/s}{1 + H_0(s)} \text{ avec } H_0(s) = \frac{K_0}{s^d}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K_0}{s^d}} = \varepsilon_p \text{ (erreur de position)}$$

$$\begin{cases} d=0 \Rightarrow \varepsilon_p = \frac{1}{1+K_0} \\ d>0 \Rightarrow \varepsilon_p = 0 \end{cases}$$

l'erreur de position en fonction de la classe du système pour une sortie oscillatoire



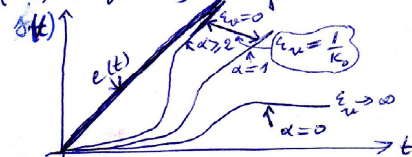
② erreur de vitesse = erreur de traînage :

elle est caractérisée par une entrée en rampe :

$$e(t) = v(t) = \begin{cases} t, & t > 0^+ \\ 0, & t < 0^- \end{cases} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s \cdot (1 + \frac{K_0}{s^d})}$$

$\begin{cases} d=0; \varepsilon_v = \infty \\ d=1; \varepsilon_v = \frac{1}{K_0} \\ d \geq 2; \varepsilon_v = 0 \end{cases}$ l'erreur de traînage en fonction de la classe du système.

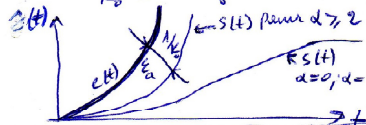


③ l'erreur en accélération : c'est d'une entrée en accélération :

$$e(t) = \frac{t^2}{2!}; t > 0 \Rightarrow E(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 (1 + \frac{K_0}{s^d})}$$

$\begin{cases} d=0; \varepsilon_a = \infty \\ d=1; \varepsilon_a = \infty \\ d=2; \varepsilon_a = \frac{1}{K_0} \end{cases}$ erreur en accélération en fonction de la classe du système.



Resumé

classe	0	1	2
ε_p	$\frac{1}{1+K_0}$	0	0
ε_v	∞	$1/K_0$	0
ε_a	∞	∞	$1/K_0$

Remarque : on voit que pour diminuer l'erreur (augmenter la précision) en régime permanent il faut augmenter la classe du système (le nombre d'intégration en BO) et augmenter le gain K_0 . Malheureusement cela peut engendrer le risque d'instabilité.