Master– Optimisation

TP n° 1

Exercice 1 :Opération avec les matrices

1.1 Rappel :

- ⇒ Les indices dans MATLAB commencent de 1 ;
- ⇒ Soit A une matrice : $A^{-1} = inv(A)$; $A^{T} = A'$; $A(i,:)$ ligne n° i ; $A(:,j)$ colonne n° j ;
- ⇒ Soit A et B deux matrices : exécuter A*B ; A.*B ; A^2 ; A.^2 ; A/B ;
- ⇒ Le maximum d'un vecteur X peut être trouvé par la commande max(X) ;
- ⇒ Le maximum d'une matrice (A) peut être trouvé grâce à la commande max(max(A))
- ⇒ Le minimum d'un vecteur X peut être trouvé par la commande min(X)
- ⇒ Le minimum d'une matrice (A) peut être trouvé gr grâce à la commande min(min(A))
- ⇒ Les valeurs propres d'un matrice peuvent être obtenu en utilisant la commande :eig

Exercice 2 : Minimums (maximum) local(global)

Pour x=-1000 :0.1 :1000, étudier graphiquement les maximums (minimums) des fonctions suivantes :

- $f(x)=x^2$
- f(x)=10exp(-x/10)sin(x+10)
- f(x)= cos (x)
- f(x)= sin (x)

Exercice 3: Matrices hessiennes:

Rappel :

Deux tests pratiques pour déterminer si H est semi-définie positive, ou bien, elle est semi définie négative peut être énoncé comme suit :

H est semi-définie positive :

- Si toutes les valeurs de la diagonale de H sont positives et ses mineures principaux $\Delta_k \geq 0, \forall K \in \{1,...,n\}$
- Si toutes les valeures propres de H sont positives.

H est semi-définie négative :

- Si toutes les valeurs de la diagonale de H sont négatives et le signe de ses mineures principaux $\Delta_k = signe(-1)^k, \forall K \in \{1,...,n\}$
- Si toutes les valeures propres de H sont negatves.

Travail à faire : Tester les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0.8354 & -0.3479 & -0.4735 & 0.8406 \\ -0.3479 & 1.2984 & 0.3481 & 0.3752 \\ -0.4735 & 0.3481 & 0.8363 & -0.8413 \\ 0.8406 & 0.3752 & -0.8413 & 19.7927 \end{bmatrix},$$

L'évolution de la matrice hessienne permet de déterminer la convexité et la concavité de la fonction $f(x)$

- La fonction $f(x)$ est convexe, si H est semi-définie positive : $\forall x \neq 0$ alors $x^T H(x) x \geq 0$.
- La fonction $f(x)$ est concave, si H est semi-définie négative : $\forall x \neq 0$ alors $x^T H(x) x \leq 0$.

Travail à faire : Tester la convexité et la concavité des fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2$$
$$f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2 + 4$$

.