Université de Jijel, Faculté des Sciences exactes et Informatique, Département de Physique
Travaux dirigés en théories de jauge *Td3. chromodynamique quantique*
Master 2 physique théorique *Année universitaire 2020-2021*

1 Rappel de cours

1.1 Groupe $SU(3)$ et couleur

$SU(3)$ est le groupe des matrices unitaires 3×3 de déterminant égal à 1. On peut montrer que les éléments de ce groupe s'écrivent sous la forme suivante:

$$U(\alpha_1, \alpha_2, ...) = e^{i\alpha_a T_a}. \tag{1}$$

Les générateurs (T^a) de ce groupe sont les matrices de Gell-Mann (divisées par 2!), elles sont données par:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Traditionnellement, on définit les générateurs de $SU(3)$ comme suit

$$T_a = \frac{1}{2}\lambda_a, \qquad a = 1, ..., 8. \tag{3}$$

avec

$$\mathrm{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}/2. \tag{4}$$

L'algèbre de Lie de $SU(3)$ est définie par le commutateur:

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c. \tag{5}$$

(1) Montrer que l'ensemble des éléments $U(\alpha_1, \alpha_2, ...)$, défini dans l'éq. (1), forme le groupe $SU(3)$.
(2) On considère la densité lagrangienne suivante:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i \not{D} - m)\psi, \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix} \tag{6}$$

Montrer que $\mathcal{L}$ est invariant sous les transformations de jauge globale et locale du groupe $SU(3)$.

1.2 Propriétés des matrices de Gell-Mann

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \tag{7}$$
$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{N} I_{(N)} + d^{abc} T^c, \tag{8}$$
$$\tag{9}$$

f^{abc} est une constante antisymétrique ($f^{abc} = -fbac$), d^{abc} est une constante symétrique ($d^{abc} = d^{bac}$).

$$T^a T^b = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{N}\delta_{ab} I_{(N)} + (d^{abc} + i f^{abc}) T^c\right] \tag{10}$$

$$Tr[T^a] = 0 \tag{11}$$
$$Tr[T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{12}$$
$$Tr[T^a T^b T^c] = \frac{1}{4}(d^{abc} + if^{abc}) \tag{13}$$
$$Tr[T^a T^b T^c T^d] = \frac{1}{4N}\delta_{ab}\delta_{cd} + \frac{1}{8}(d^{abe} + if^{abe})(d^{cde} + if^{cde}) \tag{14}$$
$$Tr[T^a T^b T^a T^d] = -\frac{1}{4N}\delta_{bd} \tag{15}$$
$$\tag{16}$$

Identités de Jacobi:

$$f^{abe}f^{ecd} + f^{cbe}f^{aed} + f^{dbe}f^{ace} = 0 \tag{17}$$
$$f^{abe}d^{ecd} + f^{cbe}d^{aed} + f^{dbe}d^{ace} = 0 \tag{18}$$

On peut montrer que

$$f^{abb} = 0, \qquad d^{abb} = 0, \qquad f^{acd}d^{bcd} = 0$$
$$f^{acd}f^{bcd} = N\delta_{ab}, \qquad d^{acd}d^{bcd} = \frac{N^2-4}{N}\delta_{ab}$$

Relation de Fierz:

$$T^a_{ij}T^a_{kl} \quad = \quad \frac{1}{2}\left[\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}\right] \tag{19}$$

2 Questions de cours

(1) Quels sont les termes invariants sous la transformation de jauge non-abélienne locale:

$$\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu. \tag{20}$$
$$\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu. \tag{21}$$
$$(\partial^\mu A^a_\mu)^2. \tag{22}$$

(2) Montrer la relation suivante:

$$[D_\mu, D_\nu] = -igT^a F^a_{\mu\nu}, \qquad \text{avec} \qquad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu. \tag{23}$$

(3) Comparer la QED et la QCD.

(4) **Algèbre de Grassman:**

$$\frac{\partial^2 F}{\partial_i \partial_j} = -\frac{\partial^2 F}{\partial_j \partial_i}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial_j^2} = 0. \tag{24}$$
$$\int d\psi_i = 0, \qquad \int d\psi_i \psi_j = \delta_{ij}. \tag{25}$$
$$\{d\psi_i, \psi_j\} = 0, \qquad \{d\psi_i, d\psi_j\} = 0. \tag{26}$$

(5) **Intégrale fonctionnelle de Feynman:**

(a) Montrer que

$$G_n(x_1, \cdots x_n) =< 0|T[\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)]|0 >= \frac{\int [d\phi]\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\exp[i\int d^4x\mathcal{L}]}{\int [d\phi]\exp[i\int d^4x\mathcal{L}]}. \tag{27}$$

où ϕ est un champ scalaire neutre et la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ est donnée par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m^2\phi^2) - V(\phi). \tag{28}$$

(b)

$$G_n(x_1,\cdots x_n)=\frac{(-i)^n}{Z[0]}\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\Big|_{J=0}, \qquad \text{où} \qquad Z[J]=\int[d\phi]\exp[i\int d^4x(\mathcal{L}+\phi J). \tag{29}$$

(c)

$$\frac{Z[J]}{Z[0]}=\sum_n \frac{i^n}{n!}\int dx_1\cdots dx_n G_n(x_1,\cdots,x_n)J(x_1)\cdots J(x_n). \tag{30}$$

(d) Montrer que la fonctionnelle génératrice pour le champ A^a_μ n'est pas invariant sous la transformation de jauge locale:

$$Z[J]=\int[dA]\exp[i\int d^4x(\mathcal{L}+A^a_\mu J^{a\mu}], \qquad \mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}. \tag{31}$$

(e)

$$<0|\hat{\psi}_\alpha(x)\hat{\bar{\psi}}_\beta(y)|0>=\frac{(-i)^2}{Z[0,0,0]}\frac{\delta^2 Z[J,\eta,\bar{\eta}]}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)\delta(-\eta_\beta(y))}\Big|_{J=0}. \tag{32}$$

(f) La fonction de Green connexe:

$$G^c_n(x_1,\cdots,x_n)=(-1)^{n-1}\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\Big|_{J=0}, \qquad Z[J]=e^{iW[J]}. \tag{33}$$

Calculer les fonctions de Green:

$$G^c_1(x), \qquad G^c_2(x_1,x_2), \qquad G^c_3(x_1,x_2,x_3), \qquad G^c_4(x_1,x_2,x_3,x_4), \qquad G^c_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5). \tag{34}$$

3 Exercices

3.1 Exercice 1: QCD

Considérons la densité lagrangienne d'un quark

$$\mathcal{L}=\overline{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu-m)\psi, \qquad \psi=\begin{pmatrix}q_r\\ q_b\\ q_v\end{pmatrix} \tag{35}$$

(1) Montrer que $\mathcal{L}$ est invariant sous la transformation globale

$$U(\alpha_1,\alpha_2,...)=e^{ig_s\alpha_a T_a}. \tag{36}$$

(3) Calculer le courant de Noether correspondant.
(4) Montrer que pour que la densité lagrangienne suivante soit invariante sous la transformation de jauge locale ($\vec{\alpha}\equiv\vec{\alpha}(x)$)

$$\mathcal{L}=\overline{\psi}(iD_\mu\gamma^\mu-m)\psi. \tag{37}$$

il faut que

$$D_\mu=\partial_\mu+ig_s\mathbb{G}_\mu, \qquad \mathbb{G}'_\mu=U(x)\mathbb{G}_\mu U^{-1}(x)+\frac{i}{g_s}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x). \tag{38}$$

(5) Utiliser la transformation infinitésimale pour montrer que

$$G^{a\prime}_\mu=G^a_\mu+\partial_\mu\alpha^a(x)-g_s f^{abc}\alpha^b(x)G^c_\mu.$$
$$\text{où } \mathbb{G}_\mu=\frac{1}{2}\vec{T}\cdot\vec{G}_\mu=\frac{1}{2}T^aG^a_\mu \tag{39}$$

(6) Montrer que la densité lagrangienne des champs de jauge est invariante sous la transformation de jauge locale

$$\mathcal{L}_{jauge}=-\frac{1}{4}\vec{\mathbf{G}}_{\mu\nu}\vec{\mathbf{G}}^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}Tr[\mathbb{G}_{\mu\nu}\mathbb{G}^{\mu\nu}]. \tag{40}$$

où

$$\mathbb{G}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\vec{\mathbf{G}}_{\mu\nu}\cdot\vec{T}=\frac{1}{2}G^a_{\mu\nu}T^a. \tag{41}$$

$$G^a_{\mu\nu}=\partial_\mu G^a_\nu-\partial_\nu G^c_\mu+g_s f^{abc}G^b_\mu G^c_\nu. \tag{42}$$

Exercice 2: Théorie ϕ^3

La densité lagrangienne de la théorie ϕ^3 est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2\phi^2) + \frac{g}{3!}\phi^3. \tag{43}$$

Les fonctionnelles génératrices Z et Z_0 sont données par

$$Z[J] = \int [d\phi] \exp[i \int d^4x(\mathcal{L}_0 + \frac{g}{3!}\phi^3 + \phi J). \tag{44}$$

$$Z_0[J] = \int [d\phi] \exp[i \int d^4x(\mathcal{L}_0 + \phi J). \tag{45}$$

(1) Montrer que

$$Z[J] = \exp\left\{-i\int d^4x V\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right\}Z_0[J], \qquad V\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right) = -\frac{g}{3!}\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)^3. \tag{46}$$

$$Z[J] = \left\{1 - \frac{g}{3!}\int d^4x\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{g}{3!}\right)^2\left(\int d^4x\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)^3\right)^2 + \cdots\right\}Z_0[J] \tag{47}$$

(2) Montrer que la fonctionnelle génératrice libre s'écrit

$$Z_0[J] = \int [d\phi] \exp[-\frac{i}{2}\int d^4x \int d^4y \phi(x)K(x,y)\phi(y) + i\int d^4x \phi(x)J(x)].$$

$$K(x,y) = \delta^4(x-y)\frac{\partial}{\partial y^\mu \partial y_\mu}. \tag{48}$$

(3) Montrer qu'on peut écrire la fonctionnelle génératrice (voir Muta p.73)

$$Z_0[J] = \exp\left\{\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta(x,y)J(y)\right\}, \qquad \Delta(x,y) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{49}$$

où $\Delta(x,y)$ est le propagateur de Feynman du champ.

(4) Montrer que le propagateur $\Delta(x,y)$ est lié à la fonction de Green à deux points par

$$G_2(x,y) = <0|T[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)]|0> = \frac{(-i)^2}{Z_0[0]}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\bigg|_{J=0}. \tag{50}$$

(5) Montrer qu'on peut écrire

$$Z[J] = Z_0[J]\{1 - gz_1[J] + g^2 z_2[J] + O(g^3)\}. \tag{51}$$

trouver $z_1[J]$ et $z_2[J]$. (6) On peut montrer que la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes s'écrit:

$$W[J] = -i\ln Z[0] + \frac{1}{2}\int dxdy J(x)\Delta(x,y)J(y) - i\{-gz_1[J] + g^2 z[J] + O(g^3)\}. \tag{52}$$

Calculer les fonctions de Green connexes G_1^c, G_2^c, G_3^c et G_4^c.

Écrire les transformés de Fourrier des ces fonctions.

Dériver les règles de Feynman de cette théorie dans l'espace des impulsions

Exercice 3: Processus de base en QCD

Considérons les processus de base de la chromodynamique quantique:

$$\begin{array}{ll}
(a) & q\bar{q}' \to q\bar{q}' \\
(b) & q\bar{q} \to q'\bar{q}' \\
(c) & q\bar{q} \to q\bar{q} \\
(d) & qq \to qq \\
(e) & q\bar{q} \to gg \\
(f) & gg \to q\bar{q} \\
(g) & gq \to gq
\end{array}$$

(1) Tracer les diagrammes de de Feynman de chaque réactions.
(2) Écrire l'amplitude correspondante de chaque diagramme de Feynman.
(3) Écrire le complexe conjugué de chaque amplitude.
(4) Calculer les sections efficaces différentielles

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \qquad \frac{d\sigma}{d\cos(\theta)} \qquad \frac{d\sigma}{dt} \tag{53}$$

Exercice 4: la réaction $e^- + e^+ \to q + \bar{q}$

Considérons la réaction suivante:

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \to q(p_3)\bar{q}(p_4).$$

(1) Tracer les diagrammes de Feynman correspondants.
(2) Écrire l'amplitude de chaque diagramme.
(3) Écrire le complexe conjugué de chaque amplitude.
(4) Écrire cette amplitude en terme des variables de Mandelstam.
(5) Calculer la section efficace totale et différentielles.

Exercice 5: la réaction $e^- + p \to e - +p$

Considérons la réaction suivante:

$$e^-(p) + p(k) \to e^-(p') + p(k')$$

(1) On suppose que le proton p est constitué que de quarks de valence u et d. Donner tous les sous-processus possibles (au niveau partonique).
(1) Tracer les diagrammes de Feynman correspondants.
(2) Écrire l'amplitude de chaque diagramme.
(3) Écrire le complexe conjugué de chaque amplitude.
(4) Écrire cette amplitude en terme des variables de Mandelstam.
(5) Calculer la section efficace différentielle.

Exercice 6 : Diffusion gluon-gluon

Considérons la réaction:

$$g(p_1) + g(p_2) \to q(p_3)\bar{q}(p_4).$$

(1) Tracer les diagrammes de Feynman correspondants.
(2) Écrire l'amplitude de chaque diagramme.
(3) Écrire le complexe conjugué de chaque amplitude.
(4) Choisir un seul diagramme de Feynman et calculer le carré de son amplitude.
(5) Écrire cette amplitude en terme des variables de Mandelstam.
(6) Calculer la section efficace différentielle.

Exercice 7: Réaction en QED et QCD

Calculer le carre de l'amplitude et les section efficaces différentielles des réactions suivantes:

$$q(p_1) + q'(p_2) \to q(p_3) + q'(p_4) \tag{54}$$
$$q(p_1) + q(p_2) \to q(p_3) + q(p_4) \tag{55}$$
$$q(p_1) + \bar{q}(p_2) \to q(p_3) + \bar{q}(p_4). \tag{56}$$

q et q' sont des quarks differents de masses nulles. si les médiateurs de réactions sont à la fois le photon γ et le gluon G.