

# Réseaux électriques

**Licence en électrotechnique**  
**Université de Jijel**

## Contenu de la matière :

<b>Chap 1.</b> Généralités sur les réseaux électriques :	(1 semaine)
<b>Chap 2.</b> Modes de transport, répartition et distribution de l'énergie électrique :	(1 semaine)
<b>Chap 3.</b> Calcul des réseaux électriques :	(2 semaines)
<b>Chap 4.</b> Modélisation de lignes électriques et transformateurs :	(2 semaines)
<b>Chap 5.</b> Le Système des grandeurs réduites (Le Per unit) :	(1 semaine)
<b>Chap 6.</b> Calcul des défauts équilibrés :	(3 semaines)
<b>Chap 7.</b> Les composantes symétriques :	(1 semaine)
<b>Chap 8.</b> Calcul des défauts déséquilibrés :	(4 semaines)

## Mode d'évaluation :

Contrôle continu : 40% ; Examen : 60%.

## Références bibliographiques :

F. Kiessling et al, **Overhead Power Lines**. Planning, design, construction, Springer 2003.  
Turan Gönen, **Electric power distribution system engineering**, McGraw-Hill 1986.  
Hadi Saadat, **Power system analysis**, McGraw-Hill 2000.

# I. Généralité sur le réseau électrique

**1. Un réseau électrique** : un ensemble d'infrastructures énergétiques permettant d'acheminer l'énergie électrique des **centres de production** vers les **consommateurs d'électricité**.

## **2. Constitution du réseau électrique**

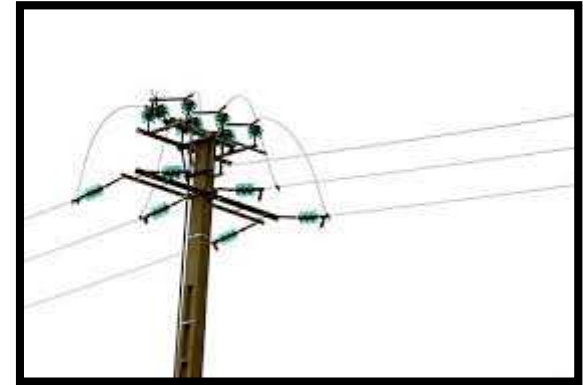
Il est constitué de :

- ❑ **lignes électriques** exploitées à différents niveaux de tension, connectées entre elles dans des postes électriques.
- ❑ **Les postes électriques** permettent de répartir l'électricité et de la faire passer d'une tension à l'autre grâce aux transformateurs.

## **3. Fonctions du réseau électrique**

Un réseau électrique doit aussi assurer :

**la gestion dynamique** de l'ensemble production-transport-consommation, mettant en œuvre des réglages ayant pour but d'assurer **la stabilité de l'ensemble**.

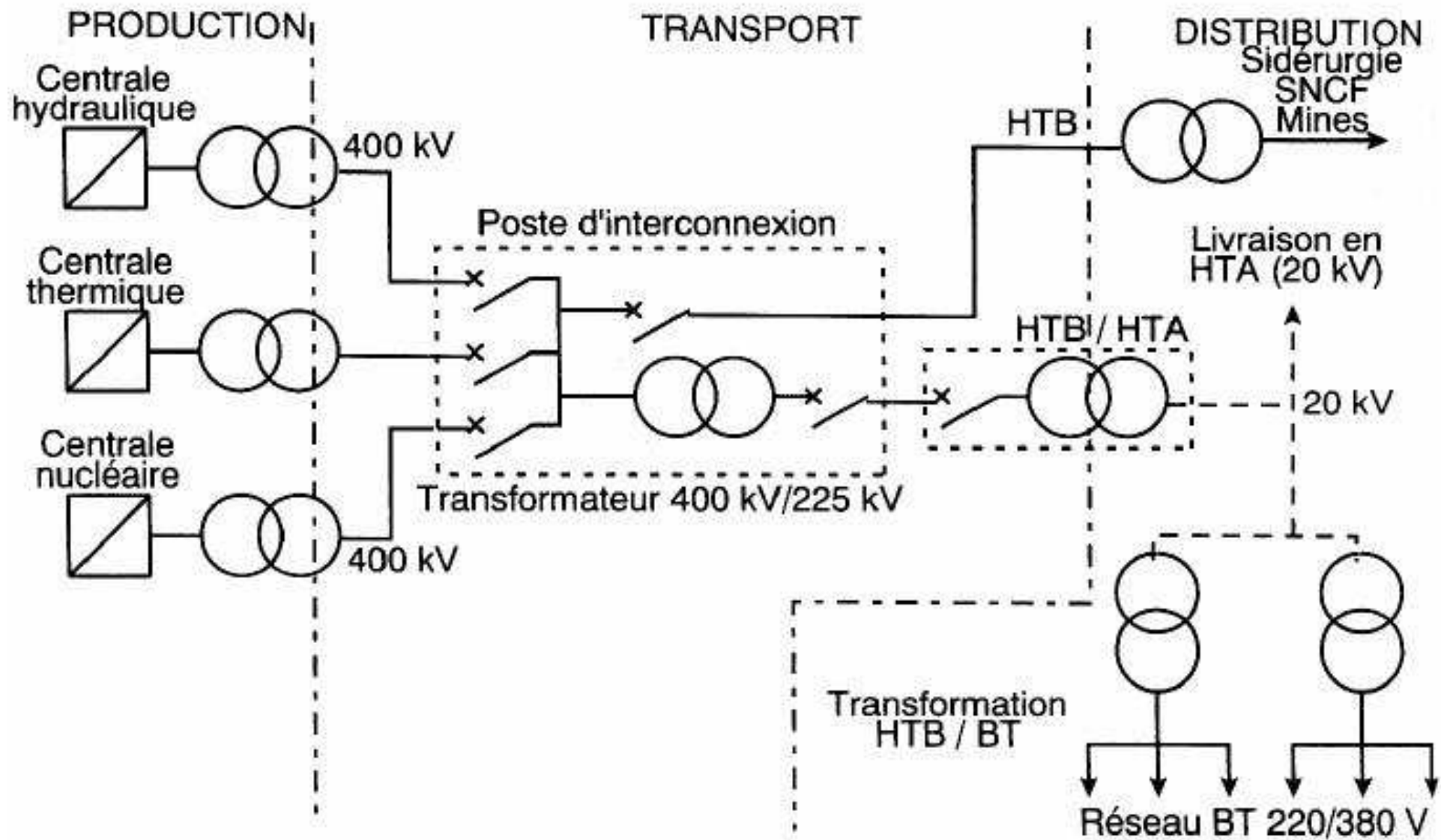


30/12/2020

Prof. M. MELH

## Schéma général du transport d'électricité

- La tension en sortie d'un alternateur de centrale est de l'ordre de 20kV (HTA).
- **Un transformateur** éleveur de tension branché directement en sortie de l'alternateur produira une tension de 400kV (THT).
- **Les lignes THT** alimentent des **postes de répartition** où la tension est abaissée à 225 kV (HTB) pour alimenter le réseau régional de distribution.
- A partir d'un **poste de distribution**, la tension HTB est ensuite abaissée en une tension de type HTA afin d'être acheminée jusqu'aux **postes de transformation** par le réseau de distribution (Quartiers, villages, entreprises...) : 20kV ou 15kV. En fin de parcours, elle est abaissée par le **poste de transformation** en une tension de type BT pour être ensuite livrée aux centres de consommation domestiques : 400V.



**Schéma général de la production, du transport et de la distribution d'énergie électrique.**

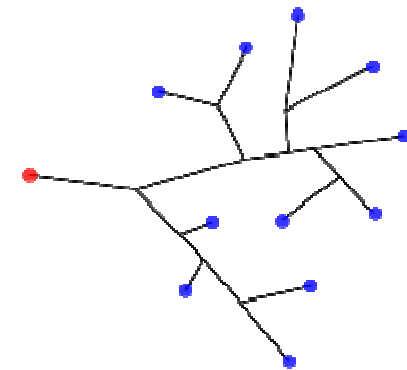
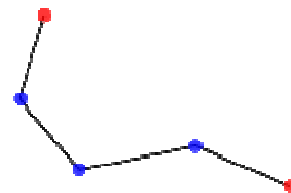
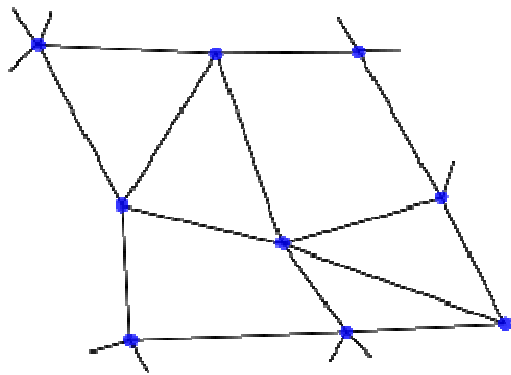
DOMAINES DE TENSION	COURANT ALTERNATIF	COURANT CONTINU
TBT	$U \leq 50 \text{ V}$	$U \leq 120 \text{ V}$
BTA	$50 < U \leq 500 \text{ V}$	$120 < U \leq 750 \text{ V}$
BTB	$500 < U \leq 1000 \text{ V}$	$750 < U \leq 1500 \text{ V}$
HTA	$1000 < U \leq 50 \text{ kV}$	$1500 < U \leq 75 \text{ kV}$
HTB	$U > 50 \text{ kV}$	$U > 75 \text{ kV}$

## 4. Structure des réseaux électriques

Les réseaux électriques peuvent être organisés selon plusieurs types de structures exposées ci-dessous :

1. **Structure maillée** : les postes électriques sont reliés entre eux par de nombreuses lignes électriques, apportant une grande sécurité d'alimentation.
2. **Structure radiale ou bouclée** (les postes rouges représentent les apports d'énergie) : la sécurité d'alimentation, bien qu'inférieure à celle de la structure maillée, reste élevée.
3. **Structure arborescente** (les postes rouges représentent les apports d'énergie) : la sécurité d'alimentation est faible puisqu'un défaut sur la ligne ou sur le poste rouge coupe l'ensemble des clients en aval.





**Les réseaux de transport** sont à haute tension (HTB) (de 50 kV à 400 kV) et ont pour but de transporter l'énergie des grands centres de production vers les régions consommatrices d'électricité. Les grandes puissances transitées imposent des lignes électriques de forte capacité de transit, ainsi qu'une structure maillée (ou interconnectée).

**Les réseaux de répartition** sont à haute tension (de l'ordre de 30 à 150 kV) et ont pour but d'assurer à l'échelle régionale la fourniture d'électricité. Les réseaux de répartition sont distribués de manière assez homogène sur le territoire d'une région.

Ils ont une structure à la fois maillée et bouclée suivant les régions considérées.

**Les réseaux de distribution** ont pour but d'alimenter l'ensemble des consommateurs. Il existe deux sous niveaux de tension :

- les réseaux moyenne tension (MT devenu HTA de 3 à 50 kV)
- les réseaux basse tension (BT devenu BTB de 110 à 600 V), sur lesquels sont raccordés les utilisateurs domestiques.

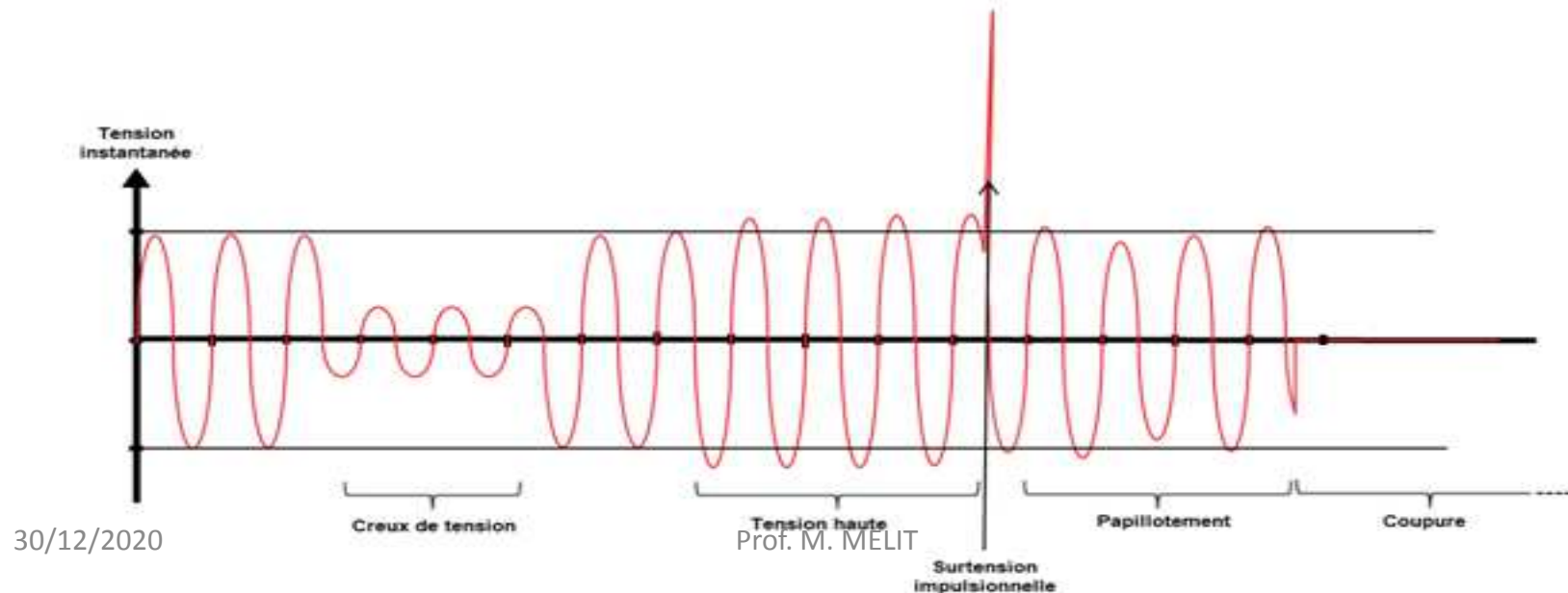
Les réseaux à moyenne tension (HTA) ont de façon très majoritaire une structure arborescente, qui autorise des protections simples et peu coûteuses

# Qualité d'électricité

La qualité de l'électricité recouvre trois notions différentes :

1. la continuité d'alimentation (coupures d'électricité),
2. la qualité de l'onde de tension (phénomènes qui perturbent le fonctionnement des appareils électriques),
3. la qualité de service (relations avec les gestionnaires de réseaux notamment).

Le tableau suivant présente une classification possible des différents types de perturbations.



Perturbations	Définition	Conséquences possibles
<b>Creux de tension</b>	Effondrement bref de la valeur efficace de la tension - de quelques dizaines de millisecondes à quelques seconde(s)	Micro-coupures, altération du fonctionnement de certains appareils électriques
<b>Surtension impulsionnelle</b>	Pic bref ou très bref de la valeur efficace de la tension, ou de la valeur instantanée de la tension	Altération du fonctionnement de certains appareils électriques, dommages potentiels à long terme, dégâts matériels instantanés dans certains cas extrêmes
<b>Papillotement</b>	Fluctuations rapides et relativement faibles de la valeur efficace de la tension	Variations de l'intensité de l'éclairage, gêne visuelle, inconfort physiologique
<b>Tension basse</b>	Valeur efficace de la tension (moyennée sur plusieurs secondes à quelques minutes) durablement inférieure au(x) seuil(s)	Altération du fonctionnement de certains appareils électriques

<b>Tension haute</b>	<b>Valeur efficace de la tension durablement supérieure au(x) seuil(s) admis - typiquement 110 % de la tension nominale</b>	<b>Altération du fonctionnement de certains appareils électriques, dommages potentiels à long terme</b>
<b>Fluctuation de la fréquence</b>	Ecart de la fréquence par rapport à sa valeur de référence - 50 Hz en France	Peu d'impact sur les installations tant que les variations de la fréquence restent limitées
<b>Harmoniques et inter-harmoniques</b>	Signaux parasites de fréquence multiple de 50 Hz (harmoniques) ou de fréquence quelconque (inter-harmoniques)	Altération du fonctionnement de certains appareils électriques, perturbation de signaux, notamment tarifaires
<b>Déséquilibre</b>	Différences entre les valeurs efficaces des trois phases	Altération du fonctionnement de certains appareils électriques triphasés

# Stabilité des réseaux électriques

**La régulation des réseaux électriques** est l'ensemble des moyens mis en œuvre (processus d'asservissement agissant sur un système dynamique) afin de maintenir proches de leurs valeurs de consigne les grandeurs de **fréquence et de tension** sur l'ensemble du réseau.

- **La stabilité des réseaux électriques** est une qualité de cette régulation par laquelle les situations modérément perturbées reviennent progressivement à un état d'équilibre (stabilité au sens de stabilité asymptotique).
- **Une instabilité généralisée** du réseau peut conduire à des dégâts matériels et/ou à la mise hors tension d'une partie ou de l'ensemble du réseau (blackout).

Considérées comme des fonctions du temps :

- **la fréquence** est une grandeur scalaire et son réglage est assuré en agissant sur des puissances actives à l'échelle globale ;
- **la tension** est une grandeur vectorielle (une valeur en chaque point de connexion des lignes) et son réglage est assuré en agissant sur des puissances réactives à l'échelle locale.

# Stabilité en fréquence (puissances actives)

- 1. Le réglage primaire** permet de revenir à un équilibre production-consommation. C'est la composante du réglage dont le temps de réponse est le plus court : la moitié de la réserve primaire doit pouvoir être mobilisée en moins de 15 s et la totalité en moins de 30 s.
- 2. Le réglage secondaire :** Le but du réglage secondaire est double : résorber l'écart résiduel de fréquence induite par le réglage primaire et corriger les écarts de bilan des zones de réglage (100-200sec).
- 3. Le réglage tertiaire** intervient lorsque l'énergie réglante secondaire disponible est insuffisante. Contrairement aux réglages primaire et secondaire qui sont des automatismes. Le réglage tertiaire fait appel au mécanisme d'ajustement. Cette réserve supplémentaire d'énergie peut être mobilisée entre 15-30 minutes.

# Stabilité en tension (puissances réactives)

À puissance égale, une tension trop basse induit un courant plus élevé, donc des pertes par effet Joule plus importantes auxquelles s'ajoutent des risques de surintensité et de destruction du matériel.

- **Réglage primaire** : Le régulateur primaire de tension d'un alternateur fixe automatiquement la puissance réactive fournie en fonction de la tension. Il agit d'une régulation locale.
- **Réglage secondaire** : Le réglage secondaire de tension est un réglage national. Divers points pilotes sont retenus et chacun constitue une référence pour la tension dans une sous-région.
- **Réglage tertiaire** : Ce réglage s'effectue manuellement et les opérations sont ordonnées par le dispatching : elles permettent d'assurer le maintien et/ou le rétablissement du plan de tension.



# **Chap 3. Calcul des réseaux électriques**

## **1. Méthode Générale de calcul**

### **1.1. Résistance d'un conducteur**

Partons de la loi d'Ohm locale :

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$$

où :  $\mathbf{J}$  est la densité de courant [ $\text{A}/\text{m}^2$ ] ;

- $\sigma$  : la conductivité électrique [ $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ] ;
- $\mathbf{E}$  : le champ électrique (dans le conducteur) [ $\text{V}/\text{m}$ ].

La résistance d'un conducteur se définit de la manière suivante :

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho} \ell / \mathbf{S} \text{ } [\Omega]$$

où «  $\rho = 1/\sigma$  » est la résistivité du conducteur [ $\Omega\text{m}$ ].

- Pour **un conducteur plein**, le courant alternatif se concentre sur la surface externe (***effet pelliculaire***).
- L'utilisation d'un **faisceau de conducteurs** au lieu d'un conducteur unique améliore cette situation (meilleure exploitation du matériau conducteur).
- Lors d'un défaut à la terre, la partie des courants de retour qui circulent par la terre circulent essentiellement en surface (effet pelliculaire) et suivent le tracé de la ligne (***effet de proximité***).
- **La difficulté** d'introduire dans les calculs le conducteur terre provient du fait que les dimensions de **la couche de terre par où passe le courant sont mal définies**, que la **répartition du courant** dans cette couche **n'est pas uniforme** et que la **résistivité du sol est irrégulière dans l'espace et variable au cours du temps**.

## 1.2. Réactance longitudinale (Inductance)

- Une inductance (supposée linéaire) est toujours le quotient entre le flux embrassé par la boucle conductrice (conducteur aller et retour) et le courant qui la parcourt. Elle est déterminée par la relation :

$$L = \phi / I \quad [\text{H}]$$

- $\phi$  : le flux induit par le courant [Wb] ;
- $I$  : le courant circulant dans le conducteur [A].

## 1.3. Réactance transversale (Capacité)

- Nous pouvons assimiler les lignes aériennes à un condensateur qui est constitué de deux conducteurs (les conducteurs de phase et la terre). La relation linéaire qui lie la charge électrique ( $q^+$ ,  $q^-$ ) sur les deux conducteurs et la différence de potentiel entre ceux-ci est donnée par :

$$C = q / V \quad [\text{F}]$$

## 2. Etude des caractéristiques longitudinales

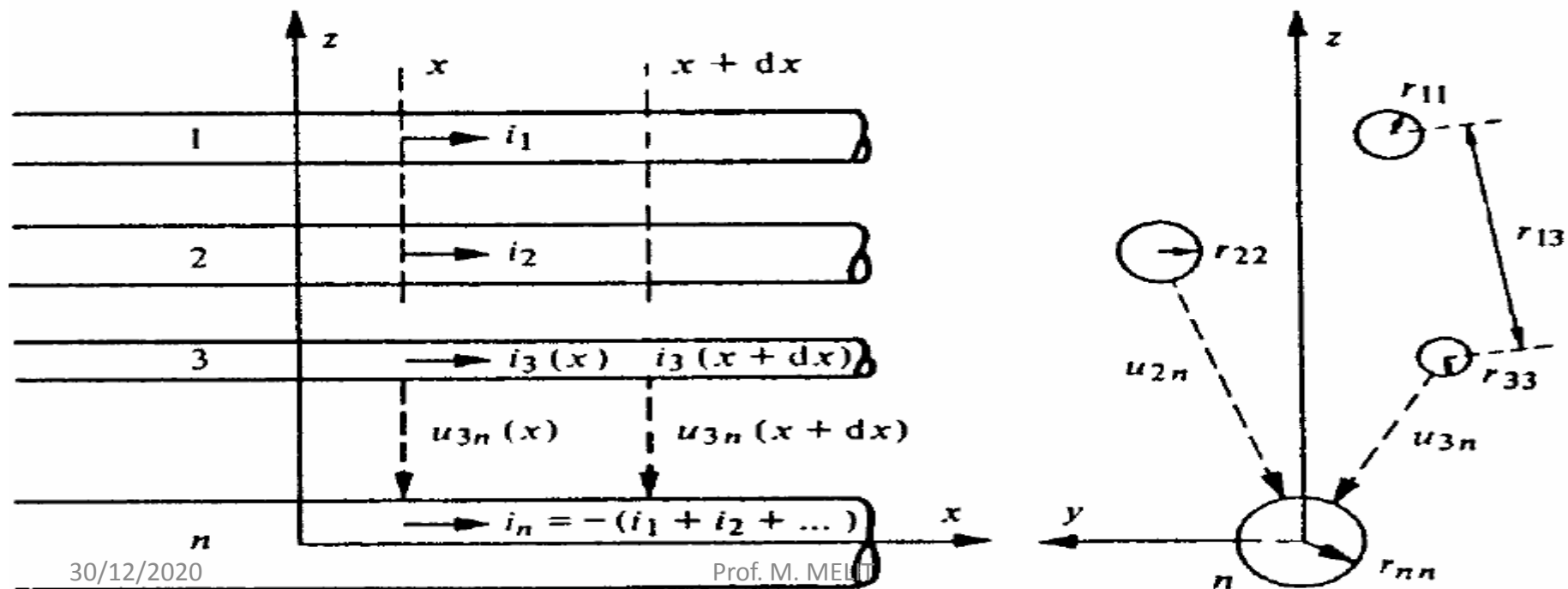
- Pour rendre compte des effets produits par la résistivité des métaux constituant les conducteurs d'une ligne électrique et par la résistivité du sol (conducteur numéroté 'n'), nous allons introduire les notions de résistances linéiques [ $\Omega/\text{m}$ ].
- Pour rendre compte des effets des flux d'induction magnétique circulant autour et entre les conducteurs, voire à l'intérieur même de ceux-ci, nous introduisons également les notions d'inductances linéiques propres et mutuelles [ $\text{H}/\text{m}$ ].

## A. Induction magnétique créée par un conducteur seul

Le passage d'un courant électrique d'intensité ' $i$ ', dans un conducteur cylindrique de longueur supposée infinie, crée un champ d'induction magnétique circulaire dont la composante tangentielle à l'extérieur du conducteur est donnée par le théorème d'Ampère :

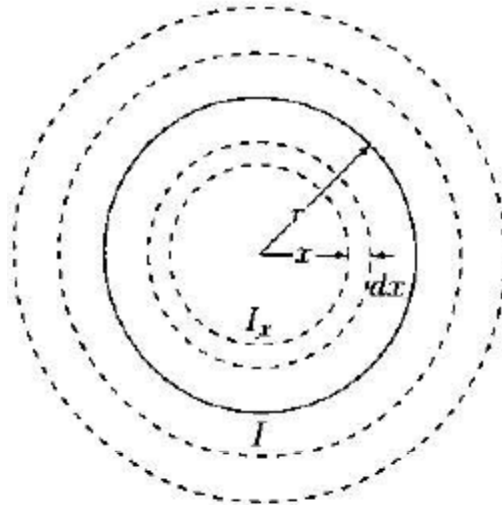
$$B = \mu_0 i / (2 \pi r) \quad [\text{T}]$$

## B. Géométrie du système à $n$ conducteurs



## C. Inductance d'un conducteur seul

Nous considérons un conducteur de section circulaire et parcouru par un courant  $I$  :



Le champ magnétique est exprimé en utilisant le théorème d'Ampère :

$$\int_0^{2\pi x} H_x \cdot dl = I_x \quad \Rightarrow \quad H_x = \frac{I_x}{2\pi x}$$

Avec :  $I_x$  est le courant embrassé pour un rayon  $x$ .

En négligeant l'effet de peau (courant uniforme ):

$$\frac{I}{\pi R^2} = \frac{I_x}{\pi x^2} \quad B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} x \quad d\phi_x = B_x dx \cdot 1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} x dx$$

## 1. Inductance interne

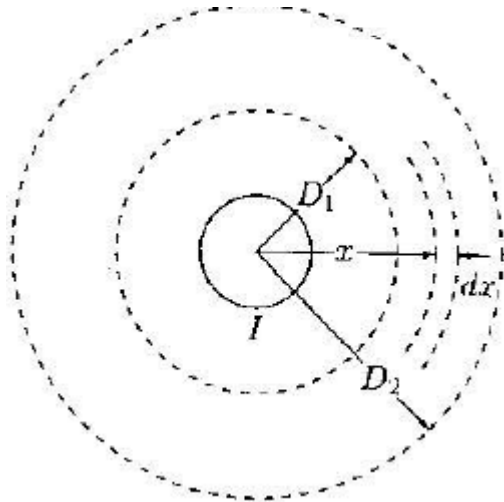
Le flux couplé à l'intérieur du conducteur est :

$$d\lambda_x = \left(\frac{x^2}{r^2}\right) d\phi_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^4} x^3 dx \quad \lambda_{int} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^4} \int_0^r x^3 dx$$
$$= \frac{\mu_0 I}{8\pi} \text{ Wb/m}$$

L'inductance peut facilement déduite :  $L_{int} = \frac{\mu_0}{8\pi} = \frac{1}{2} \times 10^{-7} \text{ H/m}$

## 2. Inductance externe

Nous considérons un contour externe pour  $H_x$  :



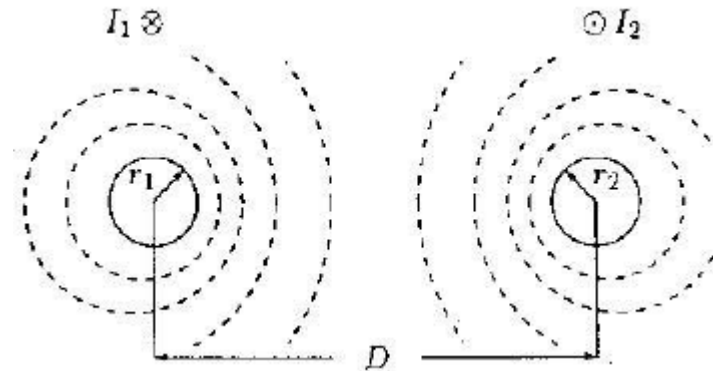
$$B_x = \mu_0 H_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad d\lambda_x = d\phi_x = B_x dx \cdot 1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx$$

$$\lambda_{ext} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{D_1}^{D_2} \frac{1}{x} dx$$
$$= 2 \times 10^{-7} I \ln \frac{D_2}{D_1} \text{ Wb/m}$$

$$L_{ext} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_2}{D_1} \text{ H/m}$$

## D. Inductance due a deux conducteurs

Nous considérons deux conducteurs de rayons  $r_1$  et  $r_2$  respectivement séparés par une distance  $D$  (figure).



$$B_x = \mu_0 H_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad d\lambda_x = d\phi_x = B_x dx \cdot 1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx \quad \lambda_{ext} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{D_1}^{D_2} \frac{1}{x} dx \quad L_{1(ext)} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r_1} \text{ H/m}$$

L'inductance total  $L$  :  $L = L_{ext} + L_{int}$  :

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2} \times 10^{-7} + 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r_1} \text{ H/m} & L_1 &= 2 \times 10^{-7} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{D}{r_1} \right) \\ & & &= 2 \times 10^{-7} \left( \ln e^{\frac{1}{4}} + \ln \frac{1}{r_1} + \ln \frac{D}{1} \right) \\ & & &= 2 \times 10^{-7} \left( \ln \frac{1}{r_1 e^{-1/4}} + \ln \frac{D}{1} \right) \end{aligned}$$

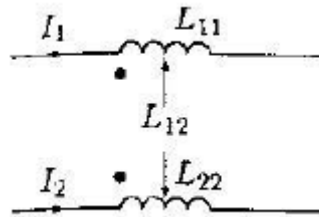
$$r' = r e^{-1/4}$$

$r'$  : est le Rayon Moyen Géométrique RMG



## E. Inductances propres et mutuelles

Le flux couplé est exprimé en fonction des inductances propres  $L_{11}$  et  $L_{22}$  et mutuelle  $L_{12}$  :



$$\lambda_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2$$

$$\lambda_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2$$

Since  $I_2 = -I_1$ , we have

$$\lambda_1 = (L_{11} - L_{12})I_1$$

$$\lambda_2 = (-L_{21} + L_{22})I_2$$

Ce concept peut être généralisé pour n conducteurs :

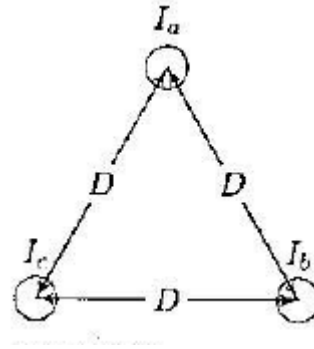
$$I_1 + I_2 + \dots + I_i + \dots + I_n = 0 \quad \lambda_i = L_{ii}I_i + \sum_{j=1}^n L_{ij}I_j \quad j \neq i$$

$$\lambda_i = 2 \times 10^{-7} \left( I_i \ln \frac{1}{r_i'} + \sum_{j=1}^n I_j \ln \frac{1}{D_{ij}} \right) \quad j \neq i$$

## E. Inductance pour un système triphasé

### 1. Ligne symétrique

Nous considérons une ligne triphasée symétrique :



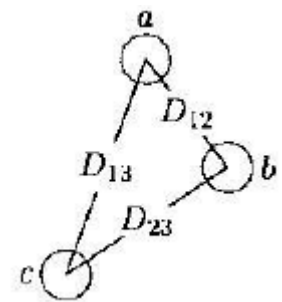
$$I_a + I_b + I_c = 0$$

Le flux couplé totale de la phase a s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \lambda_a &= 2 \times 10^{-7} \left( I_a \ln \frac{1}{r'} + I_b \ln \frac{1}{D} + I_c \ln \frac{1}{D} \right) & \lambda_a &= 2 \times 10^{-7} \left( I_a \ln \frac{1}{r'} - I_a \ln \frac{1}{D} \right) \\ & & &= 2 \times 10^{-7} I_a \ln \frac{D}{r'} \end{aligned}$$

### 2. Ligne asymétrique

$$\begin{aligned} \lambda_a &= 2 \times 10^{-7} \left( I_a \ln \frac{1}{r'} + I_b \ln \frac{1}{D_{12}} + I_c \ln \frac{1}{D_{13}} \right) \\ \lambda_b &= 2 \times 10^{-7} \left( I_a \ln \frac{1}{D_{12}} + I_b \ln \frac{1}{r'} + I_c \ln \frac{1}{D_{23}} \right) \\ \lambda_c &= 2 \times 10^{-7} \left( I_a \ln \frac{1}{D_{13}} + I_b \ln \frac{1}{D_{23}} + I_c \ln \frac{1}{r'} \right) \end{aligned}$$



$$I_b = I_a \angle 240^\circ = a^2 I_a$$

$$I_c = I_a \angle 120^\circ = a I_a$$

where the operator  $a = 1 \angle 120^\circ$  and  $a^2 = 1 \angle 240^\circ$ . Substituting in (4.34) results in

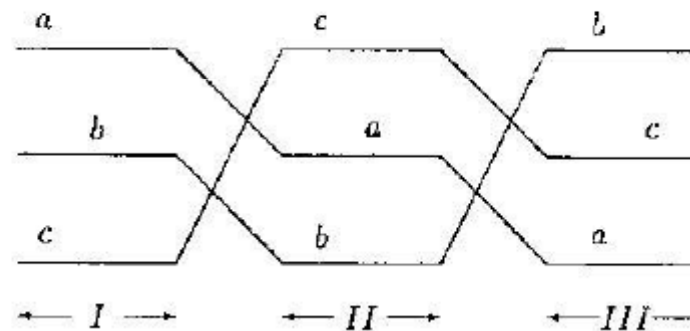
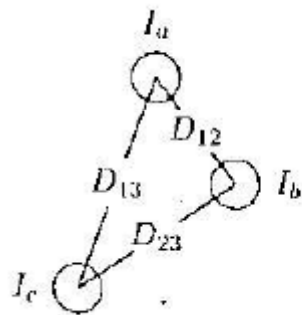
$$L_a = \frac{\lambda_a}{I_a} = 2 \times 10^{-7} \left( \ln \frac{1}{r'} + a^2 \ln \frac{1}{D_{12}} + a \ln \frac{1}{D_{13}} \right)$$

$$L_b = \frac{\lambda_b}{I_b} = 2 \times 10^{-7} \left( a \ln \frac{1}{D_{12}} + \ln \frac{1}{r'} + a^2 \ln \frac{1}{D_{23}} \right)$$

$$L_c = \frac{\lambda_c}{I_c} = 2 \times 10^{-7} \left( a^2 \ln \frac{1}{D_{13}} + a \ln \frac{1}{D_{23}} + \ln \frac{1}{r'} \right) \quad (4.38)$$

### 3. Ligne Transposée

L'une des solutions pour les lignes asymétriques est la transposition:



$$L = \frac{L_a + L_b + L_c}{3}$$

Sachant que :  $a + a^2 = 1 \angle 120^\circ + 1 \angle 240^\circ = -1$ .

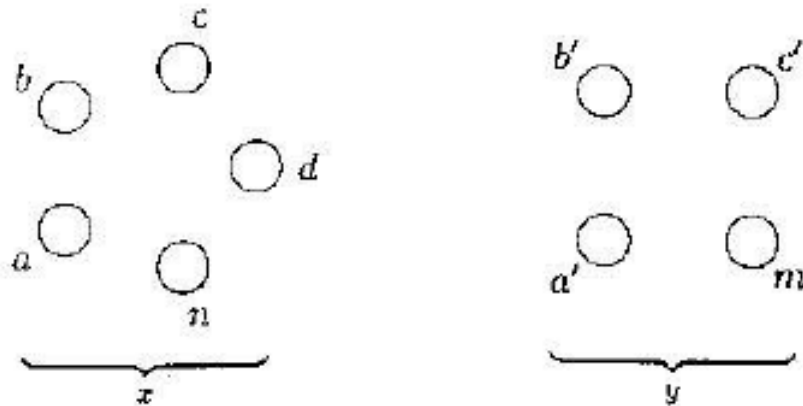
$$L = \frac{2 \times 10^{-7}}{3} \left( 3 \ln \frac{1}{r'} - \ln \frac{1}{D_{12}} - \ln \frac{1}{D_{23}} - \ln \frac{1}{D_{13}} \right)$$

$$L = 2 \times 10^{-7} \left( \ln \frac{1}{r'} - \ln \frac{1}{(D_{12} D_{23} D_{13})^{\frac{1}{3}}} \right)$$

$$GMD = \sqrt[3]{D_{12} D_{23} D_{13}}$$

#### 4. Ligne en faisceau

Nous considérons la configuration quelconque suivante :



$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} \frac{I}{n} \left( \ln \frac{1}{r'_x} + \ln \frac{1}{D_{ab}} + \ln \frac{1}{D_{ac}} + \dots + \ln \frac{1}{D_{an}} \right) \quad \lambda_a = 2 \times 10^{-7} I \ln \frac{\sqrt[n]{D_{aa'} D_{ab'} D_{ac'} \dots D_{am}}}{\sqrt[n]{r'_x D_{ab} D_{ac} \dots D_{an}}}$$

$$- 2 \times 10^{-7} \frac{I}{m} \left( \ln \frac{1}{D_{aa'}} + \ln \frac{1}{D_{ab'}} + \ln \frac{1}{D_{ac'}} + \dots + \ln \frac{1}{D_{am}} \right)$$

$$L_a = \frac{\lambda_a}{I/n} = 2n \times 10^{-7} \ln \frac{\sqrt[n]{D_{aa'} D_{ab'} D_{ac'} \dots D_{am}}}{\sqrt[n]{r'_x D_{ab} D_{ac} \dots D_{an}}} \quad L_{av} = \frac{L_a + L_b + L_c + \dots + L_n}{n}$$

$$L_x = \frac{L_{av}}{n} = \frac{L_a + L_b + L_c + \dots + L_n}{n^2} \quad L_x = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{GMD}{GMR_x} \text{ H/meter}$$

$$GMD = \sqrt[n]{(D_{aa'} D_{ab'} \dots D_{am}) \dots (D_{na'} D_{nb'} \dots D_{nm})}$$

$$GMR_x = \sqrt[n^2]{(D_{aa} D_{ab} \dots D_{an}) \dots (D_{na} D_{nb} \dots D_{nn})}$$

30/12/2020

Prof. M. MELIT

# 3. Etude des caractéristique transversales

## 3.1. Capacité d'une ligne

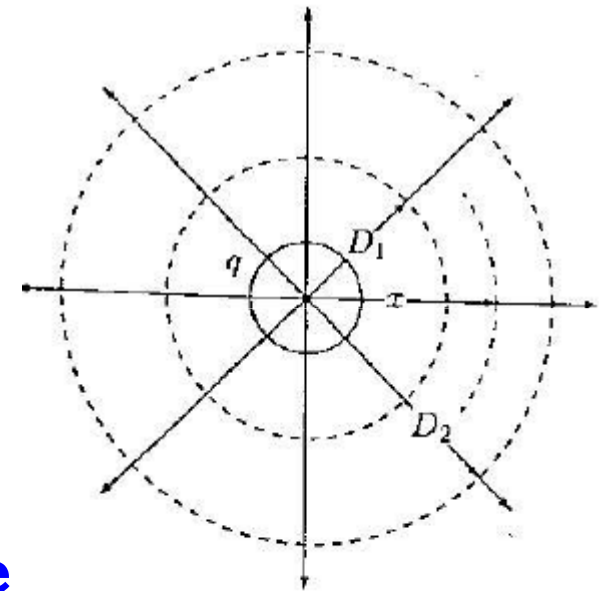
Nous considérons le cas d'un conducteur infiniment long et de rayon  $r$ .  
Le conducteur est chargé par une charge  $q$  (figure).

- En appliquant la loi de Gauss:

$$D = \frac{q}{A} = \frac{q}{2\pi r(1)} \quad E = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r}$$

La différence de potentiel entre deux points  
Situés en  $D_1$  et  $D_2$  est définie comme suit:

$$V_{12} = \int_{D_1}^{D_2} E dx = \int_{D_1}^{D_2} \frac{q}{2\pi \epsilon_0 x} dx = \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{D_2}{D_1}$$



## 3.2. Capacité d'une ligne monophasée

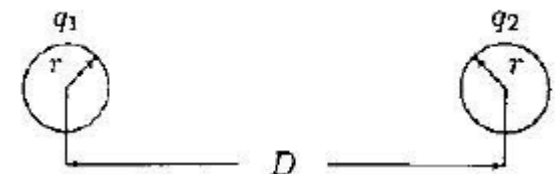
Une ligne monophasée est constituée de deux  
Conducteurs séparées par une distance  $D$  (fig.).

$$V_{12}(q_1) = \frac{q_1}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{D}{r}$$

$$V_{21}(q_2) = \frac{q_2}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{D}{r}$$

$$\text{Since } V_{12}(q_2) = -V_{21}(q_2),$$

$$\text{Prof. M. M. EL} \quad V_{12}(q_2) = \frac{q_2}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r}{D}$$



- La différence de potentiel due aux deux charges  $q_1$  et  $q_2$  :

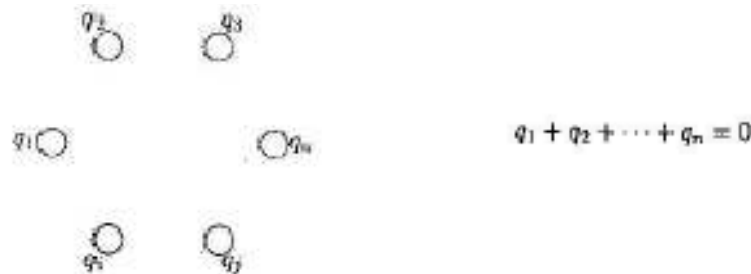
$$V_{12} = V_{12(q_1)} + V_{12(q_2)} = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{r} + \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{D}$$

- Sachant que  $q_1 = -q_2$ :

$$V_{12} = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{r} \text{ F/m} \quad C_{12} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{D}{r}} \text{ F/m}$$

### 3.3. Différence de potentiel pour une ligne multiconducteurs

Nous considérons le cas d'une ligne multiconducteurs (figure) :



En vertu du théorème de superposition et (\*), la différence de potentiel entre un conducteur « i » et « j » se calcul comme suit:

$$V_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n q_k \ln \frac{D_{kj}}{D_{ki}}$$

### 3.4. Cas d'une ligne aux voisinage du sol

Soit un système de ' $n-1$ ' conducteurs très longs soumis à des tensions électriques continues ou à basse fréquence. Nous pouvons considérer que les ' $n$ ' conducteurs sont chargés chacun par une charge linéique  $q_k$ .

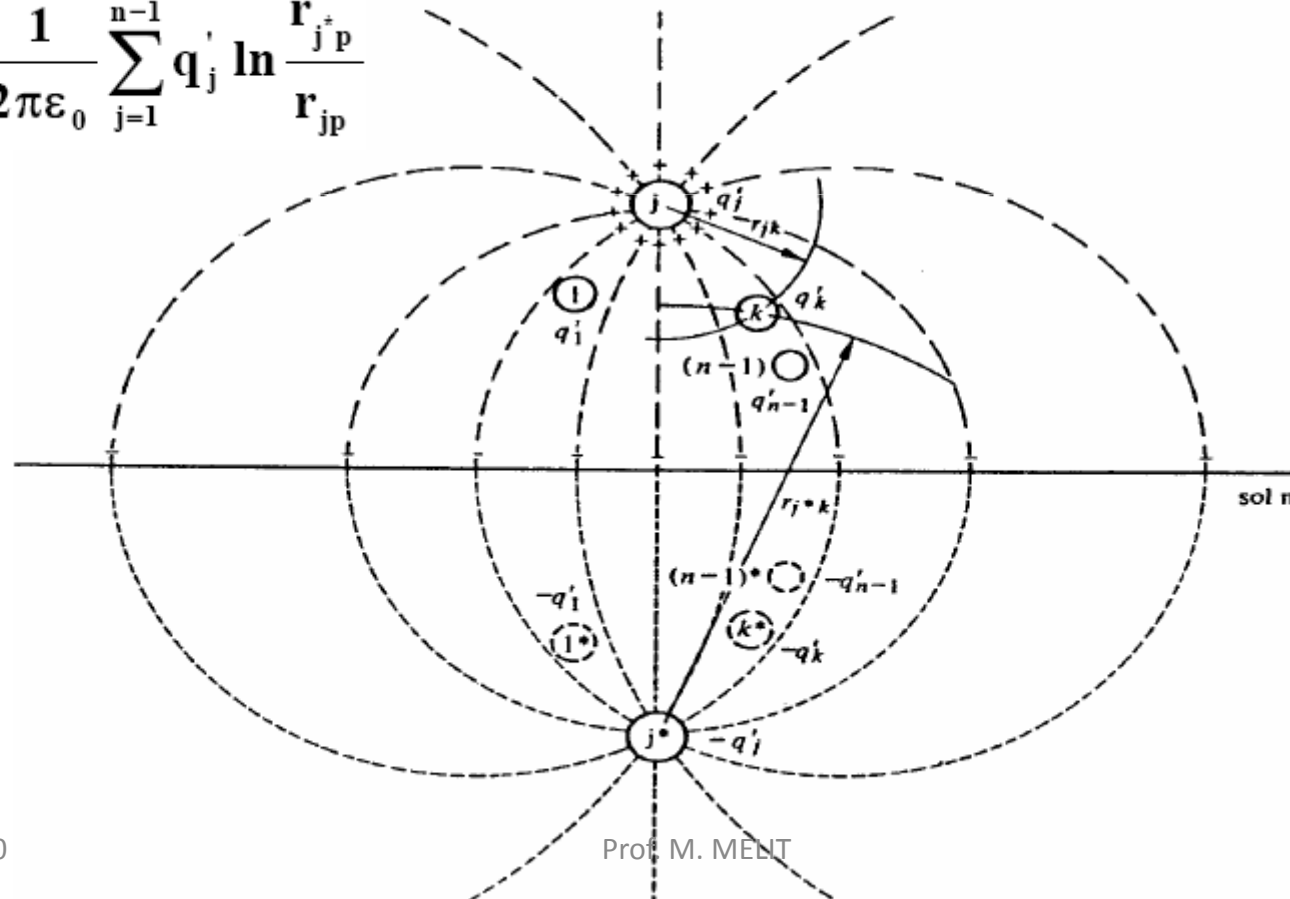
- Les ' $n-1$ ' conducteurs métalliques sont tendus parallèlement à la surface du sol. Le  $n$ -ième conducteur est le sol.
- En vertu du principe de superposition, il est équivalent de le remplacer par ' $n-1$ ' conducteurs, images des originaux, dont la charge est de signe contraire et disposés symétriquement par rapport à l'interface sol-air.

- Donc le potentiel du point 'P', dû à la paire de charges  $+q_j'$  et  $-q_j'$ , par rapport au plan médian sera:

$$v_p = \int_{r_{jp}}^{h_j} \frac{q_j'}{\epsilon_0 2\pi r} dr - \int_{h_j}^{r_{j^*p}} \frac{-q_j'}{\epsilon_0 2\pi r^*} dr^* = \frac{q_j'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h_j}{r_{jp}} + \frac{q_j'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{j^*p}}{h_j} = \frac{q_j'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{j^*p}}{r_{jp}} \quad (*)$$

Pour l'ensemble de n-1 conducteurs:

$$u_{pn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} q_j' \ln \frac{r_{j^*p}}{r_{jp}}$$





Si le point 'P' est placé sur le conducteur 'k', la formule (\*) permet de calculer la tension entre ce conducteur et la terre :

$$u_{kn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} q'_j \ln \frac{r_{j^*k}}{r_{jk}} \quad (**)$$

Si nous posons :

$$K_{kj} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{j^*k}}{r_{jk}}, \quad \Rightarrow \quad u_{kn} = \sum_{j=1}^{n-1} K_{kj} q'_j$$

puisque  $r_{j^*k} = r_{kj^*}$  et  $r_{jk} = r_{kj}$ , nous avons  $K_{jk} = K_{kj}$ .

Les coefficients «  $K_{jk}$  » sont appelés **coefficients de potentiel**.

### 3.4. Matrice des coefficients de potentiel

A partir de (\*\*), nous pouvons écrire le système d'équations qui permet de calculer les tensions ( $u_{1n} \dots u_{kn} \dots u_{(n-1)n}$ ) par rapport à la terre lorsque nous connaissons les charges linéiques ( $q_1 \ q_k \ q_{n-1}$  des « n-1 » conducteurs).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{1n} \\ \mathbf{u}_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{(n-1)n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \dots & \dots & \mathbf{K}_{1(n-1)} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \dots & \dots & \mathbf{K}_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{K}_{(n-1)1} & \mathbf{K}_{(n-1)2} & \dots & \dots & \mathbf{K}_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{q}'_1 \\ \mathbf{q}'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{q}'_{n-1} \end{pmatrix}$$

- En général nous connaissons plutôt les tensions que les charges linéiques. Il peut être utile de résoudre le système d'équations précédent par rapport aux charges :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}'_1 \\ \mathbf{q}'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{q}'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}'_{11} & \mathbf{C}'_{12} & \dots & \dots & \mathbf{C}'_{1(n-1)} \\ \mathbf{C}'_{21} & \mathbf{C}'_{22} & \dots & \dots & \mathbf{C}'_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{C}'_{(n-1)1} & \mathbf{C}'_{(n-1)2} & \dots & \dots & \mathbf{C}'_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{1n} \\ \mathbf{u}_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{(n-1)n} \end{pmatrix}$$

- La matrice 'C', appelée « matrice des capacités linéiques nodales » est une matrice symétrique. Les coefficients 'C'ij' ont la dimension d'une capacité par unité de longueur [F/m].

### 3.5. Extension aux systèmes triphasés équilibrés

Dans l'hypothèse d'un réseau **triphasé parfaitement**

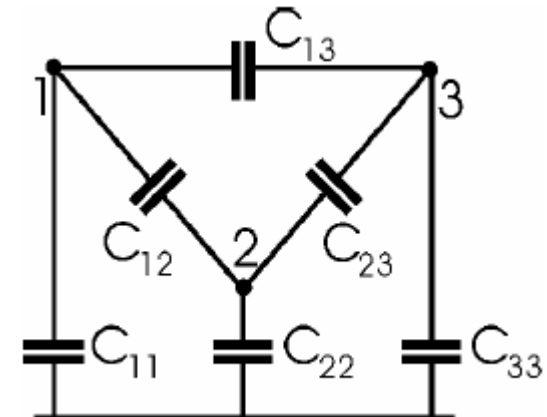
**équilibré** ( $\sum_{k=1}^3 u_{kn} = 0$ ) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{1n} \\ \mathbf{u}_{2n} \\ \mathbf{u}_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{31} \\ \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{32} \\ \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{q}'_1 \\ \mathbf{q}'_2 \\ \mathbf{q}'_3 \end{pmatrix}$$

Nous inversons cette matrice pour obtenir la matrice des capacités linéiques nodales:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}'_1 \\ \mathbf{q}'_2 \\ \mathbf{q}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}'_{11} & \mathbf{C}'_{21} & \mathbf{C}'_{31} \\ \mathbf{C}'_{12} & \mathbf{C}'_{22} & \mathbf{C}'_{32} \\ \mathbf{C}'_{13} & \mathbf{C}'_{23} & \mathbf{C}'_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{1n} \\ \mathbf{u}_{2n} \\ \mathbf{u}_{3n} \end{pmatrix} \quad (***)$$

Ce système peut se mettre sous la forme du schéma équivalent représentée par la figure.



- $C'$  correspond à la matrice (linéique) d'admittance aux nœuds. Les capacités des condensateurs représentés à la figure précédente se déduisent des  $C'_{ij}$  du système (\*\*\*) à l'aide des relations suivantes :

$$C'_{11} = C_{11} + C_{12} + C_{13} ;$$

$$C'_{12} = -C_{12} ;$$

Réciproquement,

$$C_{11} = C'_{11} + C'_{12} + C'_{13} ;$$

$$C_{12} = -C'_{12} ;$$

$$C'_{22} = C_{22} + C_{21} + C_{23} ;$$

$$C'_{13} = -C_{13} ;$$

$$C_{22} = C'_{22} + C'_{21} + C'_{23} ;$$

$$C_{13} = -C'_{13} ;$$

$$C'_{33} = C_{33} + C_{31} + C_{32} ;$$

$$C'_{23} = -C_{23} ;$$

$$C_{33} = C'_{33} + C'_{31} + C'_{32}$$

$$C_{23} = -C'_{23} ;$$

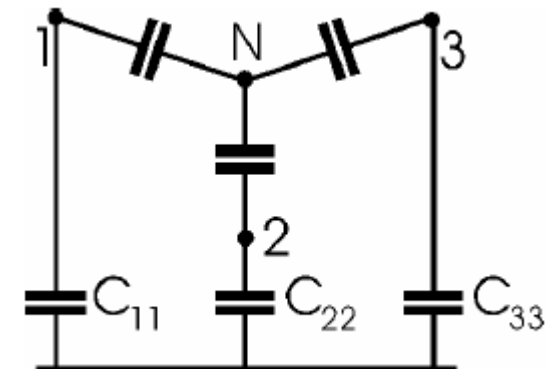
Le triangle formé par les nœuds 1, 2 et 3 peut se ramener à une forme étoilée.

Les valeurs de  $C_{N1}$ ,  $C_{N2}$  et  $C_{N3}$  se  
Déduisent Des relations suivantes  
(transformation triangle étoile) :

$$Z_{N1} = Z_{12} \cdot Z_{13} / (Z_{12} + Z_{13} + Z_{23})$$

$$Z_{N2} = Z_{23} \cdot Z_{21} / (Z_{23} + Z_{21} + Z_{31})$$

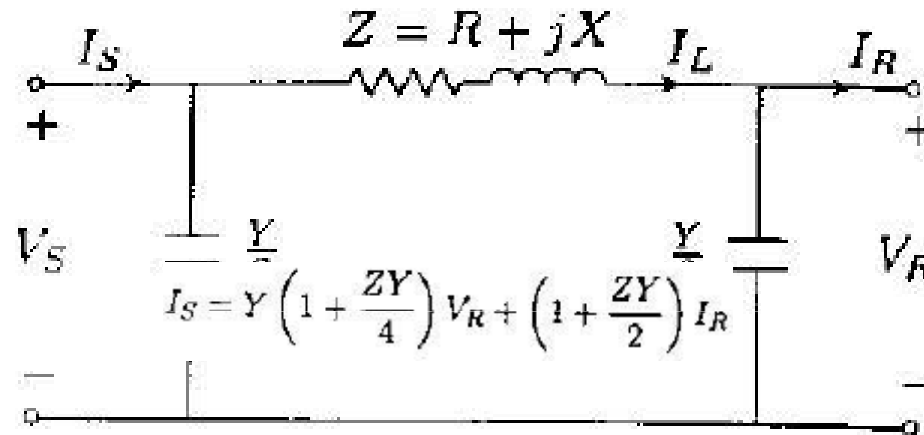
$$Z_{N3} = Z_{31} \cdot Z_{32} / (Z_{31} + Z_{32} + Z_{12})$$



## 4. Modèles des lignes électriques

### 4.1. Modèle a $\pi$ nominal (ligne courte)

- Le modèle utilisé est appelé a  $\pi$  nominal, L'impédance et la l'admittance utilisées sont calculées par les méthodes décrite précédemment.



- En appliquant la loi des nœuds, nous pouvons écrire:

$$I_L = I_R + \frac{Y}{2} V_R \quad I_S = I_L + \frac{Y}{2} V_S$$

- La loi des mailles permet d'écrire:  $V_S = V_R + Z I_L$

$$V_S = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right) V_R + Z I_R$$

$$I_S = Y \left(1 + \frac{ZY}{4}\right) V_R + \left(1 + \frac{ZY}{2}\right) I_R$$

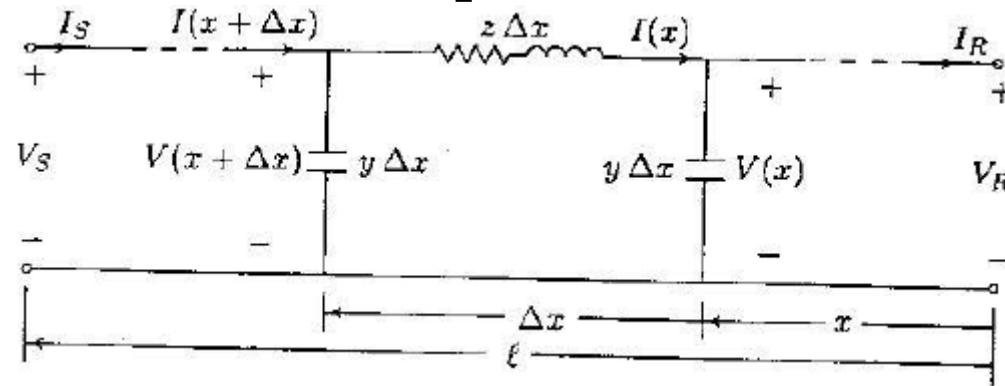
$$A = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right) \quad B = Z$$

$$C = Y \left(1 + \frac{ZY}{4}\right) \quad D = \left(1 + \frac{ZY}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix}$$

## 4.2. Modèle en $\pi$ exact (ligne longue)

- Pour une phase de longueurs  $\ell$ , les paramètres utilisés sont des paramètres linéiques:



$$V(x + \Delta x) = V(x) + z \Delta x I(x) \quad \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} = z I(x) \quad \frac{dV(x)}{dx} = z I(x)$$

$$I(x + \Delta x) = I(x) + y \Delta x V(x + \Delta x) \quad \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = y V(x + \Delta x) \quad \frac{dI(x)}{dx} = y V(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V(x)}{dx^2} &= z \frac{dI(x)}{dx} \\ &= zy V(x) \end{aligned} \quad \frac{d^2 V(x)}{dx^2} - \gamma^2 V(x) = 0 \quad V(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{1}{z} \frac{dV(x)}{dx} = \frac{\gamma}{z} (A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x})$$

$$30/12/2020 = \sqrt{\frac{y}{z}} (A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x})$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_c} (A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x})$$

Prof. M. MELIT

$$Z_c = \sqrt{\frac{z}{y}}$$

To find the constants  $A_1$  and  $A_2$  we note that when  $x = 0$ ,  $V(x) = V_R$ , and  $I(x) = I_R$ . From (5.33) and (5.36) these constants are found to be

$$A_1 = \frac{V_R + Z_c I_R}{2}$$

$$A_2 = \frac{V_R - Z_c I_R}{2}$$

$$V(x) = \frac{V_R + Z_c I_R}{2} e^{\gamma x} + \frac{V_R - Z_c I_R}{2} e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{\frac{V_R}{Z_c} + I_R}{2} e^{\gamma x} - \frac{\frac{V_R}{Z_c} - I_R}{2} e^{-\gamma x}$$

$$V(x) = \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} V_R + Z_c \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} I_R$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_c} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} V_R + \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} I_R$$

$$V(x) = \cosh \gamma x V_R + Z_c \sinh \gamma x I_R$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_c} \sinh \gamma x V_R + \cosh \gamma x I_R$$

$$V_s = \cosh \gamma \ell V_R + Z_c \sinh \gamma \ell I_R$$

$$I_s = \frac{1}{Z_c} \sinh \gamma \ell V_R + \cosh \gamma \ell I_R$$

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

$$A = \cosh \gamma \ell \quad B = Z_c \sinh \gamma \ell$$

$$C = \frac{1}{Z_c} \sinh \gamma \ell \quad D = \cosh \gamma \ell$$

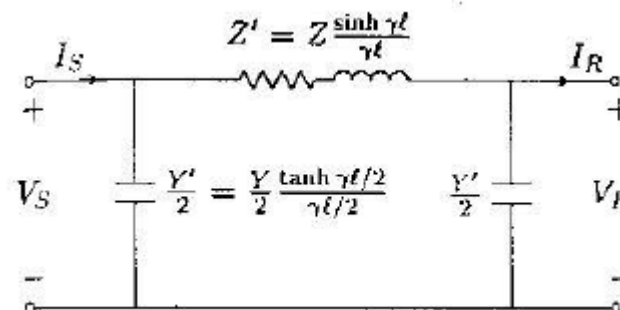
$$V_s = \left(1 + \frac{Z' Y'}{2}\right) V_R + Z' I_R$$

$$I_s = Y' \left(1 + \frac{Z' Y'}{4}\right) V_R + \left(1 + \frac{Z' Y'}{2}\right) I_R$$

$$\tanh \frac{\gamma \ell}{2} = \frac{\cosh \gamma \ell - 1}{\sinh \gamma \ell}$$

$$Z' = Z_c \sinh \gamma \ell = Z \frac{\sinh \gamma \ell}{\gamma \ell}$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{1}{Z_c} \tanh \frac{\gamma \ell}{2} = \frac{Y}{2} \frac{\tanh \gamma \ell / 2}{\gamma \ell / 2}$$



# Chap IV. LE SYSTÈME « PER UNIT »

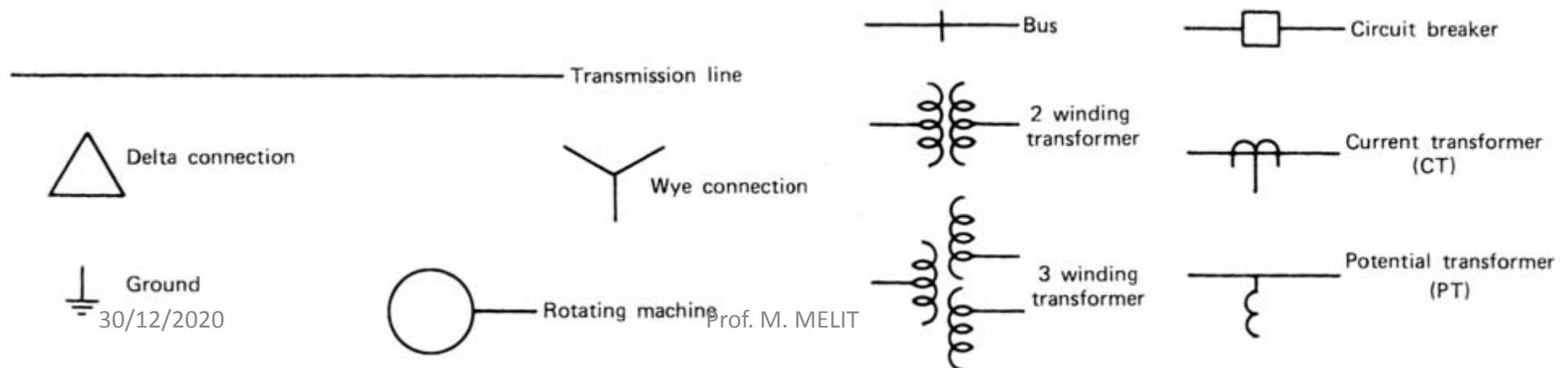
## 1. Introduction

Le système « Per Unit » est un système de grandeurs réduites qui permet à l'ingénieur électricien d'avoir constamment à l'esprit des ordres de grandeurs relatifs de certains paramètres indépendamment des niveaux de tension et de puissance.

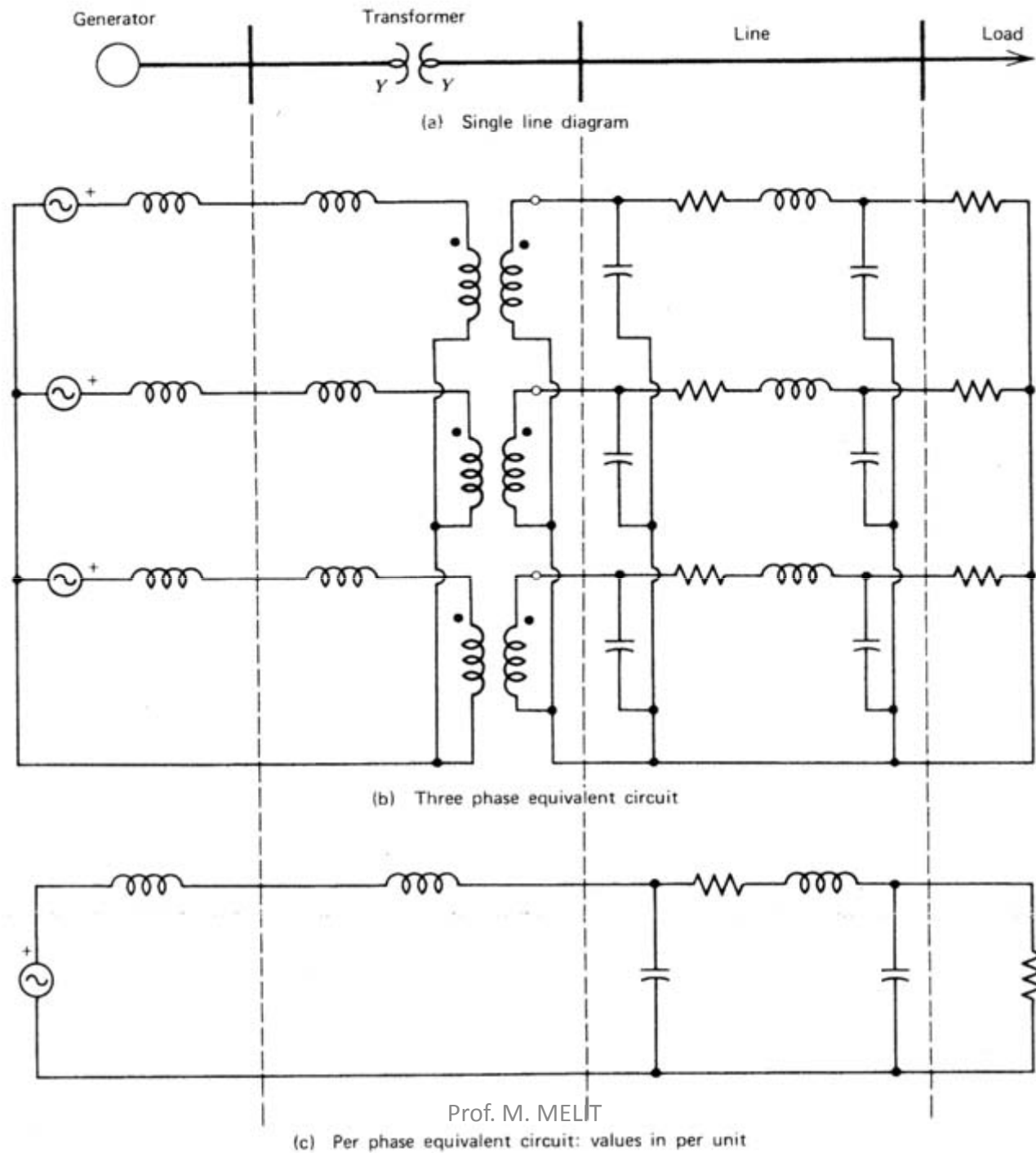
### I.1. Le schéma unifilaire

Pour représenter les circuits rapidement et simplement, nous aurons recours à un schéma unifilaire (one line diagram). La figure 1 montre les équivalences avec d'autres schématisations et prouve bien l'avantage d'une telle représentation.

La figure 2 montre les différents symboles couramment utilisés pour représenter les éléments à partir d'un schéma unifilaire.

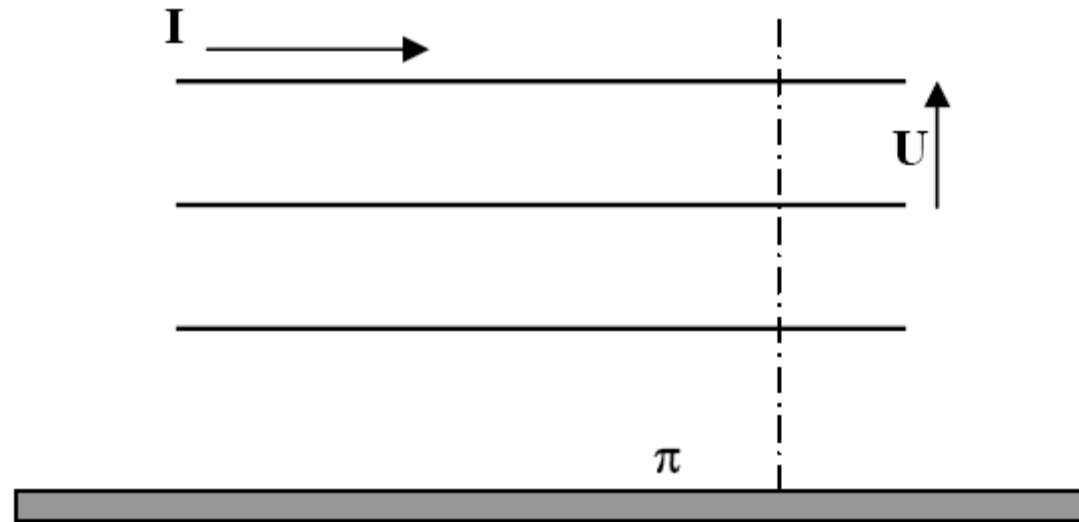






## I.2. Puissance, tension et courant de base

Considérons un système d'alimentation triphasé tel que représenté sur la Figure 3.



A ce réseau sont associées les quatre variables complexes suivantes :  $U$ , tension entre phases ;  $I$ , courant de phase ;  $S$ , puissance complexe et  $Z$  ( $=1/Y$ ), impédance du circuit.

Dans un système triphasé équilibré:

$$U = \sqrt{3} \cdot V \quad [V]$$

La puissance complexe traversant la section  $\pi$  est donnée par :

$$\bar{S} = 3 \cdot \bar{V} \cdot \bar{I}^* = \sqrt{3} \cdot \bar{U} \cdot \bar{I}^* = P + j \cdot Q \quad [VA]$$

Elle se décompose en

- puissance active =  $P$  [Watt]
- puissance réactive =  $Q$  [Var]

La tension ( $\phi$ -N) et le courant sont liés entre eux par la loi d'Ohm :

$$\bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

Nous définissons le système de grandeurs réduites « **Per Unit** » de la manière suivante :

$$\bar{S}_{pu} = \frac{\bar{S}}{S_B} ; \bar{U}_{pu} = \frac{\bar{U}}{U_B} ; \bar{I}_{pu} = \frac{\bar{I}}{I_B} \text{ et } \bar{Z}_{pu} = \frac{\bar{Z}}{Z_B}$$

$$U_B = \sqrt{3} \cdot V_B \quad [V]$$

$$S_B = \sqrt{3} \cdot U_B \cdot I_B \quad [VA]$$

$$V_B = Z_B \cdot I_B$$

**Premier avantage** : nous n'avons plus besoin de nous poser la question de savoir s'il s'agit de la tension entre phases ou entre phases et neutre car les valeurs sont identiques !

$$U_{pu} = V_{pu} \quad [pu] \quad \bar{S}_{pu} = \bar{U}_{pu} \cdot \bar{I}_{pu}^* \quad [pu]$$

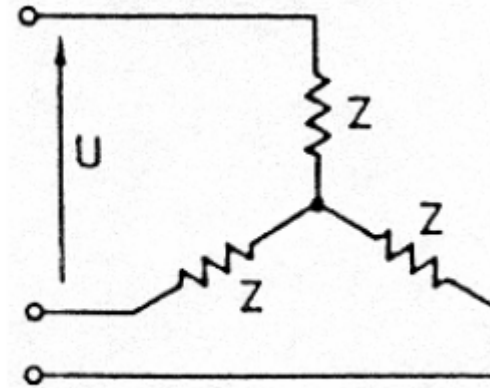
**Second avantage** : Suppression du coefficient « 3 » dans l'expression de la puissance complexe.

**Remarque** : Le système Per Unit conserve la loi d'Ohm et les lois de Kirchhoff. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ces dernières remarques.

### I.3. Impédance et admittance de base

La puissance complexe absorbée par ces charges peut s'exprimer en fonction de la tension entre phases (son module !) et l'impédance complexe (son conjugué !) :

$$\bar{S} = 3 \frac{\bar{V} \cdot \bar{V}^*}{\bar{Z}^*} = 3 \frac{(V)^2}{\bar{Z}^*} = \frac{U^2}{\bar{Z}^*} \quad [\text{VA}]$$



**Charge (équilibrée) triphasée en étoile**

Dans le système lié aux grandeurs de base (qui sont, de préférence, réelles !), nous avons :

$$S_B = \frac{U_B^2}{Z_B}$$

$$Z_B = \frac{U_B^2}{S_B} \quad [\Omega]$$

$$\bar{S}_{pu} = \frac{U_{pu}^2}{\bar{Z}_{pu}^*}$$

$$Y_B = \frac{S_B}{U_B^2} \quad [S]$$

$$\bar{Y}_{pu} = \frac{\bar{Y}}{Y_B}$$

$$\bar{S}_{pu} = \bar{Y}_{pu}^* \cdot U_{pu}^2$$

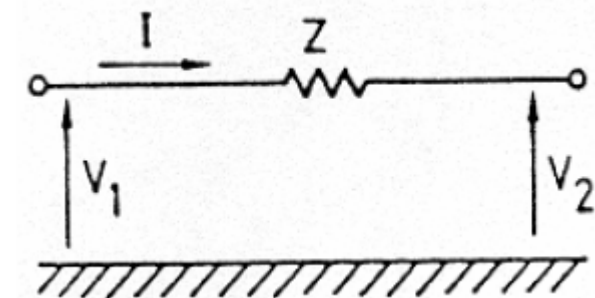
## I.4.Chute de tension

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 + \vec{Z} \cdot \vec{I} \quad [\text{V}]$$

$$\vec{Z}_B \cdot \vec{I}_B = \vec{V}_B \quad [\text{V}]$$

Nous obtenons donc :

$$\vec{V}_{1\text{pu}} = \vec{V}_{2\text{pu}} + \vec{Z}_{\text{pu}} \cdot \vec{I}_{\text{pu}}$$



## I.5.Changement de base

Généralement, les valeurs d'impédances des générateurs et transformateurs fournies par les constructeurs sont donnée dans un système per unit dont les grandeurs de base correspondent aux tension et puissance nominales (par construction) de l'appareil.

Le problème qui se pose alors est celui d'uniformiser les données, il conviendra de ne faire référence qu'à un seul système per unit.

$$\vec{Z} = \vec{Z}_{\text{pu1}} \cdot \vec{Z}_{B1} = \vec{Z}_{\text{pu2}} \cdot \vec{Z}_{B2} \quad \vec{Z}_{\text{pu2}} = \vec{Z}_{\text{pu1}} \cdot \frac{\vec{Z}_{B1}}{\vec{Z}_{B2}} = \vec{Z}_{\text{pu1}} \cdot \frac{U_{B1}^2 \cdot S_{B2}}{U_{B2}^2 \cdot S_{B1}}$$

$$\vec{Y}_{\text{pu2}} = \vec{Y}_{\text{pu1}} \cdot \frac{\vec{Y}_{B1}}{\vec{Y}_{B2}} = \vec{Y}_{\text{pu1}} \cdot \frac{U_{B2}^2 \cdot S_{B1}}{U_{B1}^2 \cdot S_{B2}}$$

## II.1. Modélisation des lignes

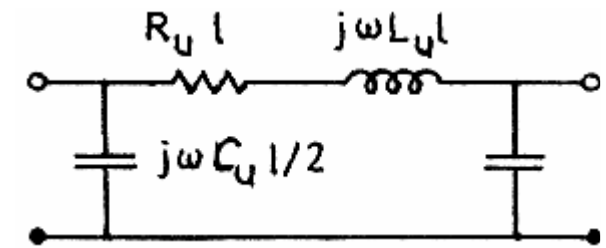
Le schéma en  $\pi$  d'une ligne se met donc sous la forme :  
où :

$R_u$  : la résistance linéique de la ligne [ $\Omega/m$ ] ;

$X = \omega \cdot L_u$  : la réactance longitudinale linéique de la ligne

$Y/2 = \omega \cdot C_u/2$  : l'admittance transversale linéique [ $\mu S/m$ ];

$L$  : la longueur de la ligne [m].



## II.2. Modélisation des transformateurs

la résistance des enroulements:

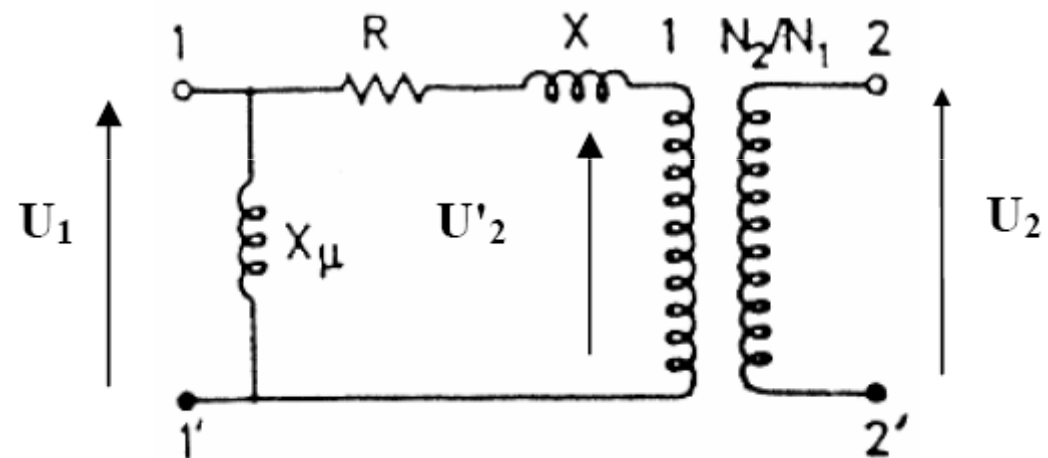
$$R = R_1 + n^2 \cdot R_2 \quad (n = N_1 / N_2)$$

la réactance de fuite:

$$X = X_{f1} + n^2 \cdot X_{f2}$$

la réactance magnétisante:

$$X_\mu = n \cdot X_M$$



Dans le système pu, à partir du modèle de la figure 2.7, la tension de court-circuit se déduit par : «  $U_{CC,pu} = Z_{CC,pu} \cdot I_{N,pu}$  », avec  $I_{N,pu} = 1$ , naturellement.  $Z_{CC,pu}$  représente l'impédance du transformateur ( $= R_{pu} + j \cdot X_{pu}$ ) au cours de cet essai.

*'Ucc' représente le pourcentage de la tension nominale à appliquer à un des enroulements pour qu'il passe un courant nominal dans l'autre enroulement, lorsque celui-ci est court-circuité.*

## II.2.1. Le transfo. idéal dans les calculs de réseau

Considérons une ligne électrique dont deux tronçons, « 1-1' » et « 2-2' », sont séparés par un transformateur tels que sur la figure 2.7.

$$\begin{aligned}\bar{U}'_2 &= \frac{1}{n} \cdot \bar{U}_2 & \bar{U}_{1pu} &= \frac{1}{U_{B1}} \cdot \bar{U}_1 & \bar{U}'_{2pu} &= \frac{1}{U_{B1}} \cdot \bar{U}'_2 = \frac{1}{n \cdot U_{B1}} \cdot \bar{U}_2 \\ \bar{I}'_2 &= n \cdot \bar{I}_2 & \bar{I}_{1pu} &= \frac{1}{I_{B1}} \cdot \bar{I}_1 & \bar{I}'_{2pu} &= \frac{1}{I_{B1}} \cdot \bar{I}'_2 = \frac{n}{I_{B1}} \cdot \bar{I}_2 \\ U_{B2} &= n \cdot U_{B1} & S_{B1} &= 3 \cdot I_{B1} \cdot V_{B1} ; S_{B2} = 3 \cdot I_{B2} \cdot V_{B2}.\end{aligned}$$

En choisissant «  $S_{B1} = S_{B2} = S_B$  »  $I_{B2} = \frac{1}{n} \cdot I_{B1}$

Nous obtenons finalement les relations fondamentales suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{U}'_{2pu} &= \frac{1}{U_{B2}} \cdot \bar{U}_2 = \bar{U}_{2pu} \\ \bar{I}'_{2pu} &= \frac{1}{I_{B2}} \cdot \bar{I}_2 = \bar{I}_{2pu}\end{aligned}$$

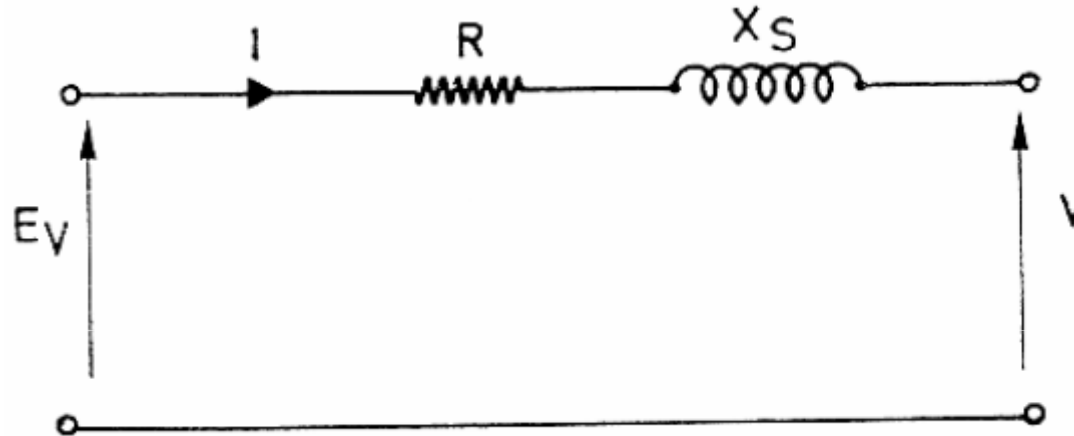
*Dans un système exprimé en per unit il apparaît donc qu'il convient de choisir les valeurs de base telles que :*

- le rapport de transformation, 'n', soit aussi le rapport des tensions de base des deux réseaux ( $U_{B2} = n \cdot U_{B1}$ ) ;
- les puissances de base soient de même valeur ( $S_{B1} = S_{B2}$ ).

### II.3. Modélisation des machines synchrones

Du point de vue des réseaux d'énergie, la machine synchrone ou 'alternateur', est un convertisseur électromécanique qui, à partir de l'énergie mécanique fournie par un moteur, renvoie dans le réseau de l'énergie électrique sous forme triphasée.

Le schéma équivalent d'une phase de la machine synchrone est :



#### **Modèle simplifié de la machine synchrone**

«  $E_V$  » est la tension induite aux bornes du rotor ;

«  $R$  » est la résistance d'un enroulement statorique ;

«  $X_S$  » est la réactance synchrone. Son ordre de grandeur est de 2 pu dans la base qui correspond aux paramètres nominaux de la machine.

L'équation permettant de modéliser le comportement de la machine synchrone est :

$$\bar{U} = \bar{E}_V - (R + jX_S) \cdot \bar{I}$$



# Chap V: Analyse des réseaux triphasés à l'aide des composantes symétriques

## I. Introduction

Le dimensionnement d'une installation et des matériels à mettre en œuvre, le réglage des protections, ainsi que l'analyse de phénomènes électriques, nécessitent souvent des calculs de courants et de tensions dans des réseaux.

la méthode des composantes symétriques simplifié le calcul de tous ces paramètres dans des réseaux triphasés en régime perturbé.

## II. Définition de base

soit un phénomène vibratoire Sinusoïdal représenté par un vecteur tournant  $V$ .

On se donne a priori dans le plan :

Un axe de référence  $Ox$  de vecteur unitaire  $\vec{x}$ .

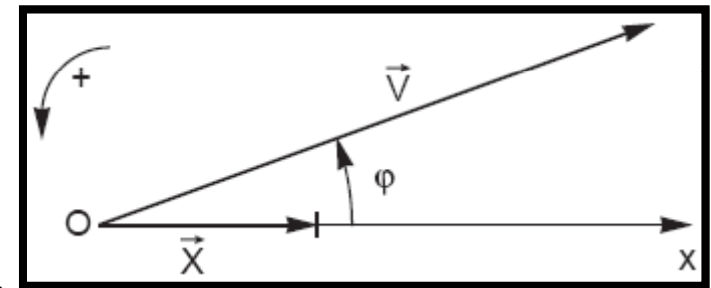
Un sens de rotation conventionnellement défini comme positif dans le sens anti-horaire  $+$ .

Le vecteur  $V$  dont on ramène l'origine en  $O$  est essentiellement caractérisé par :

**une amplitude  $V$ ,**

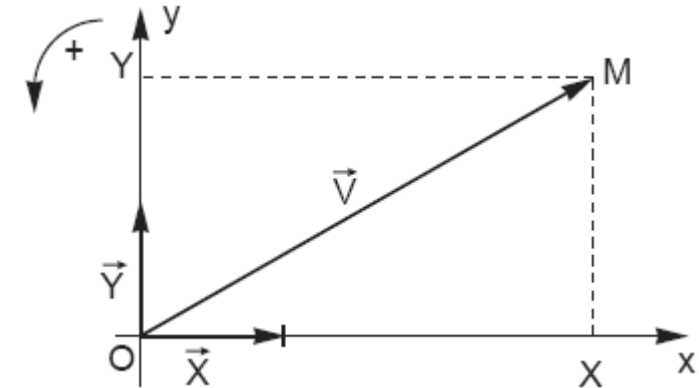
**une phase  $\phi$  :** l'angle  $(Ox, V)$ , que fait  $V$  avec l'axe de référence  $Ox$ ,

**une pulsation :** c'est la vitesse constante de rotation du vecteur.



### III. Représentation vectorielle

Le vecteur  $V$  est représenté classiquement dans un système d'axes de coordonnées rectangulaires.

$$\vec{V} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OX} \hat{x} + \overrightarrow{OY} \hat{y}$$


Pour faciliter les opérations sur les vecteurs,  $V$  peut être représenté de façon équivalente par un nombre complexe en utilisant l'opérateur «  $j$  ».

«  $j$  » est un opérateur vectoriel qui consiste à faire tourner de  $+\pi/2$  le vecteur auquel l'opération est appliquée, donc  $jx = y$ .

- Opérateur «  $a$  » : est un opérateur vectoriel qui consiste à faire tourner de  $+2\pi/3$  le vecteur auquel l'opération est appliquée

□  $a^2$  fait tourner un vecteur de :

$$2 \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ (équivalent à } -\frac{2\pi}{3})$$

□  $a^3$  fait tourner un vecteur de :

$$3 \frac{2\pi}{3} = 2\pi \text{ (équivalent à } 0)$$

$$a = -0,5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = -0,5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

d'où

$$a^0 = a^3 = a^6 \dots = 1$$

$$a = a^4 = a^7 \dots \quad a^2 = a^{-2} = a^{-5} \dots$$

$$a - a^2 = j\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 1 + a + a^2 = 0$$

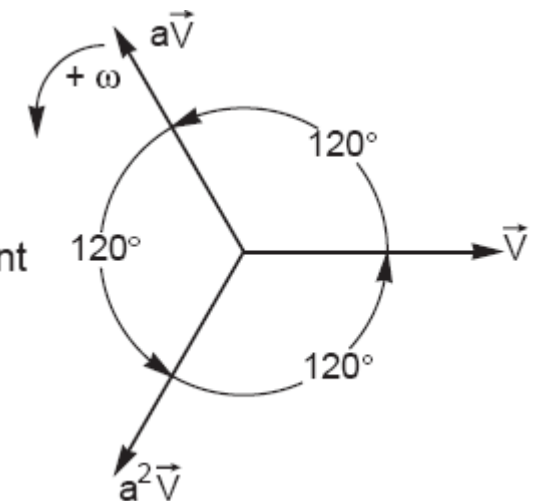
Cette dernière relation se vérifie graphiquement en constatant sur la figure que la somme des vecteurs représentés est nulle :

$$\vec{V} + a\vec{V} + a^2\vec{V} = 0$$

$$\text{d'où } \vec{V}(1 + a + a^2) = 0$$

$$\text{donc } 1 + a + a^2 = 0$$

Prof. M. MELIT



## IV. Composantes symétriques

Soit un ensemble de trois vecteurs triphasés sinusoïdaux tournant à la même vitesse. Ils sont donc fixes les uns par rapport aux autres.

Il existe trois dispositions particulières présentant une symétrie des vecteurs entre eux et pour cela qualifiées de « composantes symétriques » :

**1. le « système direct »** dans lequel  $V_1, V_2, V_3$  :

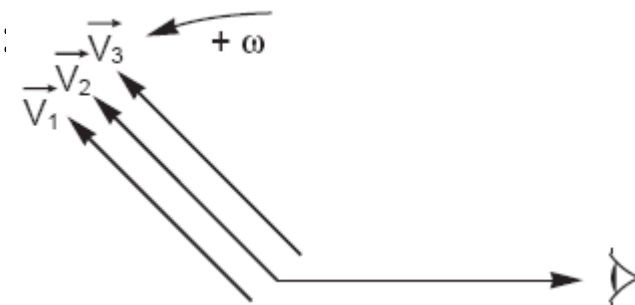
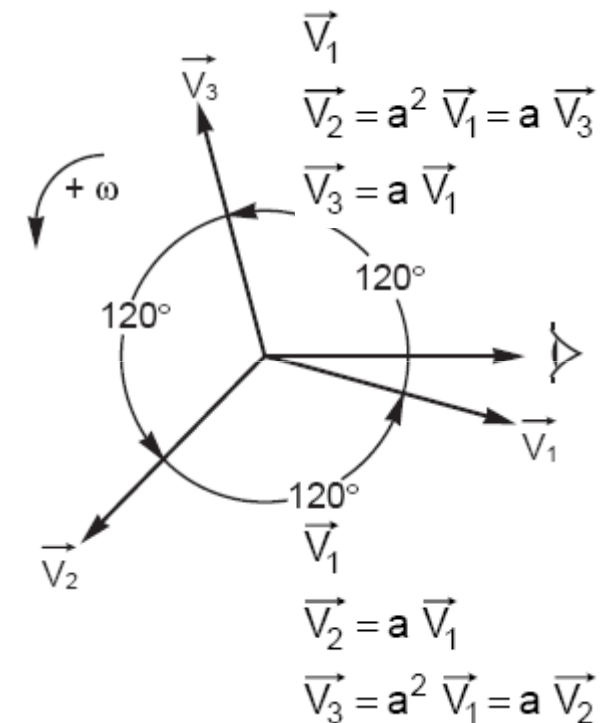
- ont même amplitude,
- sont décalés de  $120^\circ$ ,
- sont disposés de telle façon qu'un observateur
- au repos voit défiler les vecteurs dans l'ordre  $V_1, V_2, V_3$ .

**2. le « système inverse »** dans lequel  $V_1, V_2, V_3$  :

- ont même amplitude,
- sont décalés de  $120^\circ$ ,
- ont disposés de telle façon qu'un observateur
- au repos voit défiler les vecteurs dans l'ordre  $V_1, V_3, V_2$ .

**3. le « système homopolaire »** dans lequel  $V_1, V_2, V_3$  :

- ont même amplitude,
- Sont en phase,



## V. Décomposition d'un système triphasé en ses composantes symétriques

Soit un système triphasé quelconque formé de trois vecteurs  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ; on montre que ce système est la somme de 3 systèmes triphasés équilibrés : **direct, inverse et homopolaire**.

■ système direct :  $\vec{V}_{d1}$ ,  $\vec{V}_{d2}$ ,  $\vec{V}_{d3}$

■ système inverse :  $\vec{V}_{i1}$ ,  $\vec{V}_{i2}$ ,  $\vec{V}_{i3}$

■ système homopolaire :  $\vec{V}_{o1}$ ,  $\vec{V}_{o2}$ ,  $\vec{V}_{o3}$

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{d1} + \vec{V}_{i1} + \vec{V}_{o1}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_{d2} + \vec{V}_{i2} + \vec{V}_{o2}$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_{d3} + \vec{V}_{i3} + \vec{V}_{o3}$$

Si on choisit les vecteurs indicés 1 comme vecteurs d'origine, et que l'on fait intervenir l'opérateur « a » on trouve les équations suivantes :

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_d + \vec{V}_i + \vec{V}_o$$

$$\vec{V}_2 = a^2 \vec{V}_d + a \vec{V}_i + \vec{V}_o$$

$$\vec{V}_3 = a \vec{V}_d + a^2 \vec{V}_i + \vec{V}_o$$

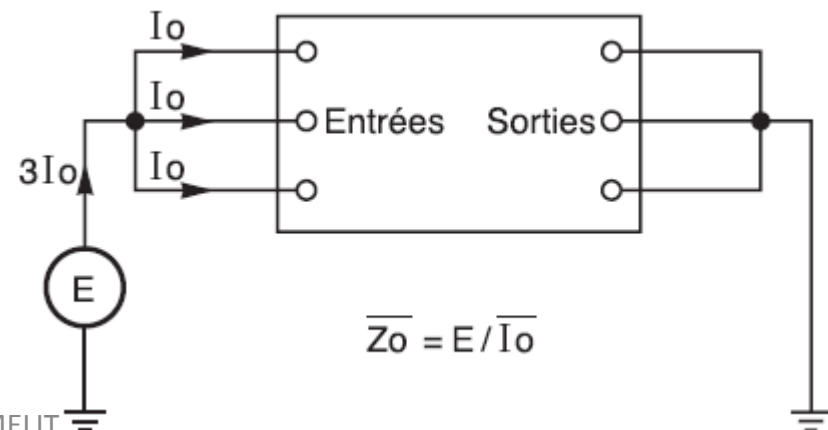
$$\vec{V}_d = \frac{1}{3} (\vec{V}_1 + a \vec{V}_2 + a^2 \vec{V}_3)$$

$$\vec{V}_i = \frac{1}{3} (\vec{V}_1 + a^2 \vec{V}_2 + a \vec{V}_3)$$

$$\vec{V}_o = \frac{1}{3} (\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3)$$

### V.1. Application à l'électrotechnique

la simplicité offerte par des calculs se ramenant à la **superposition de trois systèmes indépendants**, qui se traitent séparément en les ramenant chacun au cas simple monophasé.



## V.2. Méthode de calcul des régimes déséquilibrés

Nous allons examiner le comportement d'un réseau triphasé linéaire et symétrique, c'est-à dire composé ***d'impédances constantes et identiques pour les 3 phases*** (c'est le cas en pratique) ne comportant que des ***forces électromotrices équilibrées*** mais dont ***les courants et tensions peuvent se trouver déséquilibrés*** du fait de la connexion à une ***zone dissymétrique D***.

Le fonctionnement du réseau est interprété en considérant la **superposition de trois régimes** correspondant chacun à l'un des systèmes direct, inverse et homopolaire.

- Pour un réseau comportant une seule f.e.m., les composantes symétriques de tension et de courant étant respectivement  $V_d, V_i, V_o, I_d, I_i, I_o$ , à l'endroit D de la dissymétrie, les relations définissant les 3 régimes sont :

$$E = V_d + Z_d \times I_d$$

$$0 = V_i + Z_i \times I_i$$

$$0 = V_o + Z_o \times I_o.$$

- Pour les réseaux comportant plusieurs sources, ces équations restent valables à condition de considérer  $E$  et  $Z_d, Z_i, Z_o$ , respectivement comme la f.e.m. et comme les impédances internes du générateur équivalent de Thévenin.

### Méthode de résolution pratique

Le réseau est divisé en 2 zones et nous écrivons les équations liant courants et tensions :

- une zone dissymétrique D (réseau déséquilibré) : (composantes réelles)
- une zone symétrique S (réseau équilibré) : (composantes symétriques),.
- continuité à la frontière D-S,
- fonctionnement dans la zone S.

La résolution mathématique des équations permet de calculer les valeurs des composantes symétriques et des composantes réelles des courants et tensions des zones D et S.

## V.2.1. Défaut phase-terre (dit défaut homopolaire)

Le circuit est supposé non chargé.

### Ecriture des équations

- Isolement de la zone dissymétrique (cf. **fig. 12** )
- Equations des composantes réelles dans (D)

$$\begin{cases} I_2 = I_3 = 0 \\ V_1 = Z \times I_1 \end{cases}$$

Ces équations décrivent le cas examiné. Ce sont les seules qui soient propres à ce cas de figure.

- Equations des composantes symétriques dans (S)

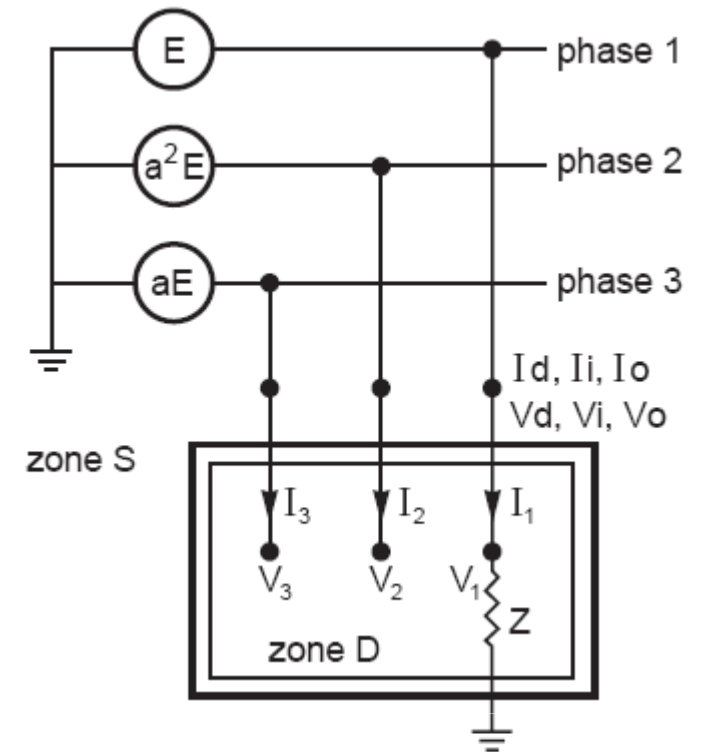
$$\begin{cases} I_1 = I_d + I_i + I_o \\ I_2 = a^2 I_d + a I_i + I_o \\ I_3 = a I_d + a^2 I_i + I_o \\ V_1 = V_d + V_i + V_o \\ V_2 = a^2 V_d + a V_i + V_o \\ V_3 = a V_d + a^2 V_i + V_o \end{cases}$$

### Continuité à la frontière D-S

En combinant entre elles les équations des composantes réelles dans (D) et les équations des composantes symétriques dans (S) on obtient :

30/12/2020

Prof. M. MELIT



$$\begin{cases} a^2 I_d + a I_i + I_o = 0 \\ a I_d + a^2 I_i + I_o = 0 \\ V_d + V_i + V_o = Z \times I_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_d = I_i = I_o = \frac{I_1}{3} \\ V_d + V_i + V_o = 3Z \times I_o \end{cases}$$

## ■ Equations de fonctionnement de S

$$\begin{cases} E = V_d + Z_d \times I_d \\ 0 = V_i + Z_i \times I_i \\ 0 = V_o + Z_o \times I_o \end{cases}$$

Ces trois équations se retrouveront systématiquement dans tous les calculs de régimes déséquilibrés ne comportant qu'une seule source de tension.

## Résolution des équations

### ■ Valeurs des composantes symétriques des courants et des tensions

$$E + 0 + 0 = V_d + V_i + V_o + Z_d \times I_d + Z_i \times I_i + Z_o \times I_o \\ = 3Z \times I_o + (Z_d + Z_i + Z_o) I_o$$

soit :

$$I_o = I_d = I_i = \frac{E}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z}$$

$$V_d = E - Z_d \times I_d = E - Z_d \frac{E}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z}$$

$$V_d = E \frac{Z_i + Z_o + 3Z}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z}$$

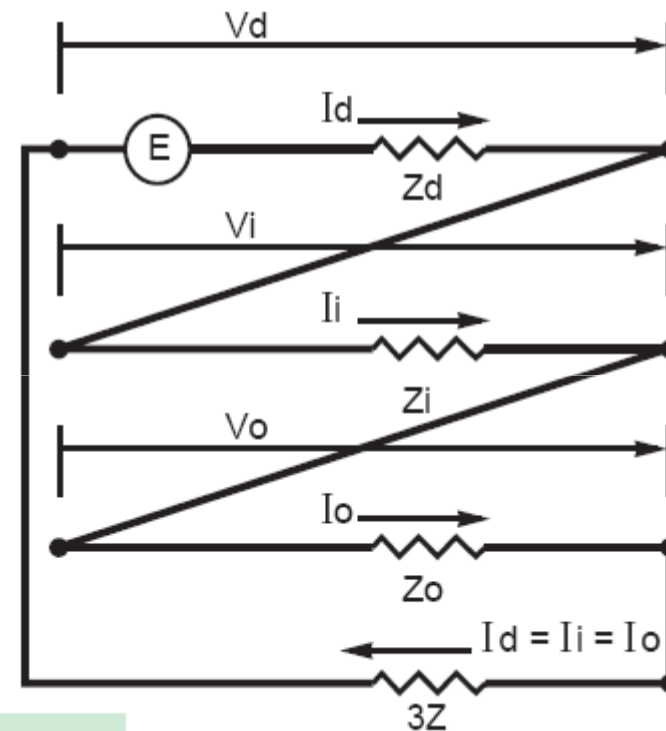
$$V_i = -Z_i \times I_i$$

$$V_i = -Z_i \frac{E}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z}$$

$$V_o = -Z_o \times I_o$$

$$V_o = -Z_o \frac{E}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z}$$

### ■ Schéma du réseau selon les composantes symétriques (cf. fig. 13 )



$$I_1 = \frac{3E}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z}$$

$$I_2 = 0$$

$$I_3 = 0$$

$$V_1 = Z \times I_1$$

$$V_1 = 3Z \frac{E}{Z_d + Z_i + Z_o + 3Z}$$

$$V_2 = a^2 V_d + a V_i + V_o$$

$$V_3 = a V_d + a^2 V_i + V_o$$



## Formulaire récapitulatif

### Notation

- tension efficace composée du réseau triphasé =  $U$
- tension efficace simple du réseau triphasé  $V = U/\sqrt{3}$
- courant de court-circuit en module =  $I_{cc}$
- courant de défaut à la terre en module =  $I_{terre}$
- impédances symétriques =  $Z_d, Z_i, Z_o$ ,
- impédance de court-circuit =  $Z_c$ ,
- impédance de terre =  $Z$ .

Le tableau ci-dessous récapitule les courants en module dans différentes dissymétries.

Type de dissymétrie	Dissymétrie impédante	Dissymétrie franche ( $Z = 0$ et/ou $Z_c = 0$ )
Court-circuit monophasé	$I_{cc} = \frac{U\sqrt{3}}{ Z_d + Z_i + Z_o + 3Z } = \frac{3V}{ Z_d + Z_i + Z_o }$	$I_{cc} = \frac{U\sqrt{3}}{ Z_d + Z_i + Z_o } = \frac{3V}{ Z_d + Z_i + Z_o }$
Court-circuit biphasé terre ( $Z_c = 0$ )	$I_{terre} = \frac{U\sqrt{3} Z_i }{ Z_d \times Z_i (Z_d + Z_i)(Z_o + 3Z) }$	$I_{terre} = \frac{U\sqrt{3} Z_i }{ Z_d \times Z_i + Z_i \times Z_o + Z_d \times Z_o }$
Court-circuit biphasé isolé ( $Z = \infty$ )	$I_{cc} = \frac{U}{ Z_d + Z_i + Z_c } = \frac{V\sqrt{3}}{ Z_d + Z_i + Z_o }$	$I_{cc} = \frac{U}{ Z_d + Z_i } = \frac{V\sqrt{3}}{ Z_d + Z_i }$
Court-circuit triphasé ( $Z$ quelconque)	$I_{cc} = \frac{U}{ Z_d + Z_c  \sqrt{3}} = \frac{V}{ Z_d + Z_c }$	$I_{cc} = \frac{U}{ Z_d  \sqrt{3}} = \frac{V}{ Z_d }$