

التاريخ	المادة	الفوج
الإسم	اللقب	

الدقيقة والإعلام الآلي



1.1 Limites Supérieure et inférieure (Upper and Lower Limit)

Commençons par quelques définitions.

Def 1.1 - Pour une suite de nombre réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on définit la limite supérieure (resp. inférieure)

comme :

$$\limsup_n x_n = \lim_n [\sup \{x_k : k \geq n\}]$$

$$(\text{resp. } \liminf_n x_n = \lim_n [\inf \{x_k : k \geq n\}]).$$

Proposition 1.2 Ces limites existent toujours et appartiennent à $[-\infty, +\infty]$, puisque les suites

$$(\sup \{x_k : k \geq n\})_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (\inf \{x_k : k \geq n\})_{n \in \mathbb{N}}$$

sont décroissantes (decreasing) et croissantes respectivement. Il est clair que $\limsup_n x_n \geq \liminf_n x_n$.

التاريخ	المادة	الفوج
الاسم	اللقب	



Def 1.3 pour une fonction $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, on définit la limite supérieure à u_0 comme

$$\limsup_{n \rightarrow u_0} f(n) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\sup \{ f(n) : n \in B(u_0, \delta) \} \right].$$

La limite inférieure est définie de la même manière que

$$\liminf_{n \rightarrow u_0} f(n) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\inf \{ f(n) : n \in B(u_0, \delta) \} \right].$$

Ces limites existent toujours (prenant éventuellement les valeurs $+\infty, -\infty$) et nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow u_0} f(n) \geq \liminf_{n \rightarrow u_0} f(n)$$

Il est clair qu'on obtient et clair qu'au lieu de prendre la limite par $\delta \rightarrow 0$, nous pouvons prendre $(\delta = \frac{1}{n})$ la limite par $n \rightarrow +\infty$ à la sup ou inf sur $B(u_0, \frac{1}{n})$. Les preuves des résultats similaires sont standard et nous allons les omettre.

Proprio 1.4 La limite supérieure (resp. inférieure) de la suite $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ au point x_0, α , est caractérisée par la propriété suivante :

Il existe une suite (x_n) convergente vers x_0 telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$, et pour toute suite (x_n) convergente vers x_0 qui vérifie que $(f(x_n))_n$ converge, nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \alpha$ (resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq \alpha$). 

Parfois, nous écrivons le point x_0 en prenant $\sup$ ou $\inf$ sur $B(x_0, r)$. Nous précisons cela en écrivant $\limsup_{n \rightarrow x_0, n \neq x_0} f(x_n)$ ou $\liminf_{n \rightarrow x_0, n \neq x_0} f(x_n)$.

Ces limites nous donnent la sup. inf. suite.

Prop 1.5 Pour la suite $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ et un point $x_0 \in H$, on a alors que $\lim_{n \rightarrow x_0} f(x_n)$ existe $\Leftrightarrow$

$$\limsup_{n \rightarrow x_0} f(x_n) = \liminf_{n \rightarrow x_0} f(x_n).$$

Dans ce cas, les deux limites s'accordent. 

1.2 La Demi-continuité.

Voici quelques rappels de déf. bien connue.

Def 1.6.

On dit qu'une fonction réelle $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ est en un point a continue à droite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ chaque fois que $|x - a| < \delta$.

Si cette propriété est vérifiée pour tout a de H , on dit que f est continue sur H .

Il est facile de voir que f est continue sur un SSC par densité (en colligeant vers a , $f(a)$ collige vers $f(a)$).

Les fonctions continues ont de bonnes propriétés, elles atteignent des maxima et minima sur les compacts par exemple. Beaucoup de ces propriétés tiennent sous des conditions de continuité plus faibles. Le but de cette section est de présenter ces conditions.

La semi-continuité est une notion introduite par le mathématicien français René Baire, c'est en quelque sorte la moitié de la continuité dont on a

besoin lorsqu'il s'agit de minimiser, c'est la semi-continuité inférieure. L'autre moitié est assurée par la continuité supérieure.

Def 1.6. On dit qu'une fonction réelle $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieure (s.c.i. en abrégé) au $x_0 \in H$, lorsque (resp. strictement s.c.i.)

$$\text{lorsque } f(x_0) \leq \liminf_n f(x_n) \quad (\text{resp.}$$

$$f(x_0) > \liminf_n f(x_n)) \quad \text{pour toute suite}$$

$$(x_n)_n \subset H \text{ satisfaisant } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

Si la propriété est valable pour chaque point $x_0 \in H$, on dit que f est s.c.i. (resp. s.c.s) sur H .

• Il n'est pas difficile de voir que

$$f \text{ s.c.i. en } x_0 \Leftrightarrow f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$f \text{ s.c.s en } x_0 \Leftrightarrow f(x_0) \geq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

La propriété suivante nous donne une caractérisation de la s.c.i.

Prop 17

• f est d.c.i. en u_0 si: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $f(u) < f(u_0) + \varepsilon$ by $\|u - u_0\| < \delta$.

• f est d.c.i. si: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $f(u) < f(u_0) + \varepsilon$ by $\|u - u_0\| < \delta$.

Def On dit que f est faible et d.c.i. en u_0 si: $\forall (u_n) \xrightarrow{w} u_0$;

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \geq f(u_0).$$

ex p 18 montre que $f(u) = \|u\|$ est d.c.i.

en H. Soit $u_n \xrightarrow{w} u$ alors:

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, u \rangle$$

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, u \rangle$$

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \|u\|$$

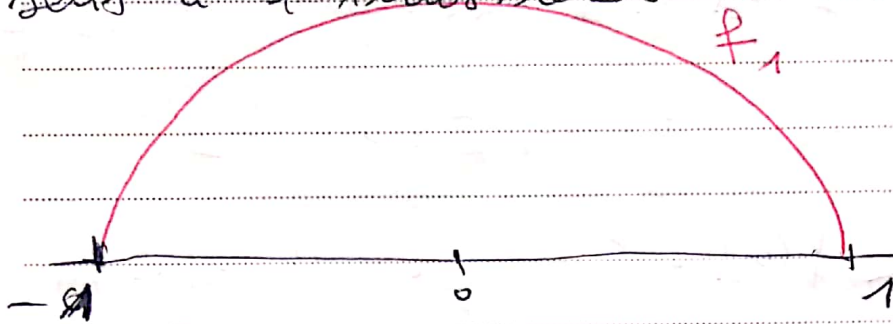
$$\text{car donc } \|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \quad (*)$$

Si $u=0$, (*) est vraie.

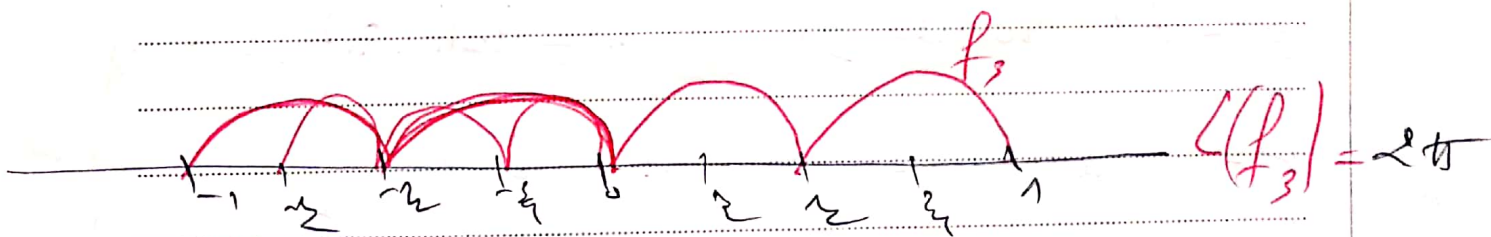
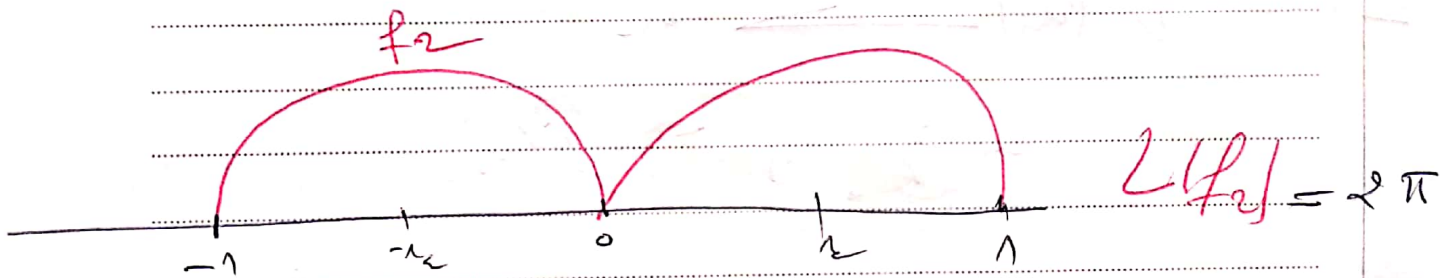
De p1.9 f est faible s.c.i. $\Rightarrow f$ est conv.
 L'Inverse est valide si f est convexe!

ex p1.10 (Exemple de la longueur d'une courbe).

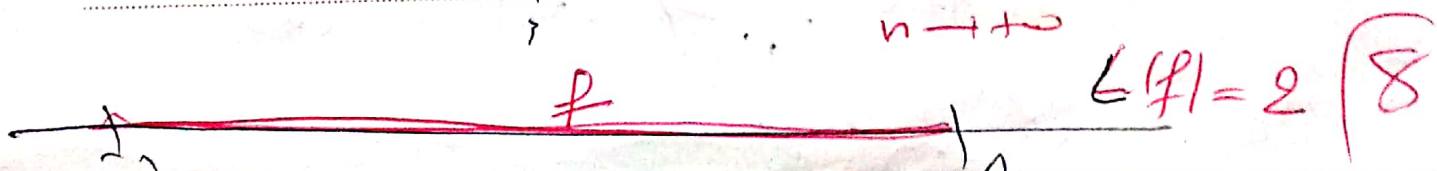
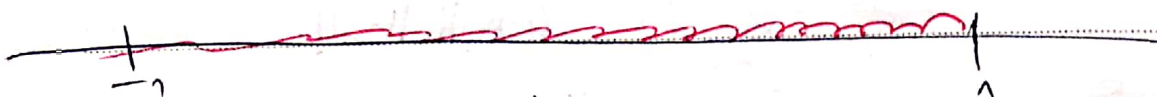
C'est un exemple assez bluffant... des figures
 suffisent à l'illustrer.



La longueur de la courbe f_1 est $L(f_1) = 2\pi$.



...



التاريخ	المادة	الفوج
الاسم	اللقب	

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي



قسم:

Prop 1.11: On résume quelques propriétés: $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda > 0$

* f est continue $\Leftrightarrow f$ est à la fois s.c.i et s.c.d;

* Si f et g sont s.c.i (resp. s.c.d), alors $f+g$ est s.c.i (resp. s.c.d)

* Si f est s.c.i (le ou) et λf est s.c.i (s.c.d)

Maintenant, nous introduisons trois ensembles associés à une fonction donnée, ce qui nous permet de présenter la propriété analytique que nous venons de définir comme propriété géométrique.

De

La s.c.i (ou s.c.d) globale sur H a le bon goût de pouvoir être caractérisée géométriquement.

Notations:

• pour $v \in \mathbb{R}$, $[f \leq v] := \{x \in H; f(x) \leq v\}$, ensemble de sous-niveau de f au niveau v = sublevel set en anglais. (resp $[f > v] := \{x \in H; f(x) > v\}$).

• l'épigraphie de f , i.e., "ce qui est au dessous du graphe de f ", comme l'indique son étymologie

$$\text{epi } f := \{(x, v) \in H \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq v\}$$

19

... l'hypographe de f , $\hat{f}$ qui est au dessus du graphe de f .

Comme $\text{Hypo } f := \{(x, r) \in H \times R; f(x) \geq r\}$.

Attention, $\text{epi } f$ est ce point de $H \times R$!

Le résultat suivant souligne la relation entre le point indistinct et géométrique.

Prop 1.12 (Caractérisation de la s.c.i. de f sur H).

Il y a équivalence des trois assertions suivantes :

- (i) f est s.c.i. sur H ;
- (ii) pour tout $r \in R$, $[f \leq r]$ est fermé (dans H);
- (iii) $\text{epi } f$ est fermé (dans $H \times R$).

preuve

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que f est s.c.i. pour tout

$r \in R$ (fixer), on note :

$$\Omega := \{n \in H; f(n) \leq r\} = [f \leq r].$$

Ω^c est ouvert !?

Si $\bar{n} \in \Omega^c \Rightarrow \bar{n} \notin \Omega$, nous avons

$$f(\bar{n}) > r, \text{ donc } f(n) > r + \varepsilon; \forall n \in B(\bar{n}, \delta) \Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ tq } f(n) < f(\bar{n}) + \varepsilon, \quad \forall n \in B(\bar{n}, \delta).$$

fin

التاريخ	المادة	الفوج
الإسم	اللقب	

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم:

pos $\Rightarrow \varepsilon = f(\bar{x}) - v > 0$; $\exists \delta > 0$ tq

$$f(\bar{x}) < f(x) + f(\bar{x}) - v ; \forall x \in B(\bar{x}, \delta).$$

or $v < f(\bar{x}) ; \forall x \in B(\bar{x}, \delta)$

ce qui montre que $B(\bar{x}, \delta) \subseteq \Omega^c$, i.e. Ω^c est ouvert. Par conséquent Ω est fermé dans H .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons que $\{f \leq v\}$ est fermé pour tout $v \in \mathbb{R}$.

Fixons $\bar{x} \in H$ et $v \in \mathbb{R}$ avec $f(\bar{x}) > v$ (*)

posons $\Theta_v = \{x \in H ; f(x) \leq v\}$.

Comme Θ_v est fermé et $\bar{x} \in \Theta_v^c$, alors, il existe $\delta > 0$ tq $B(\bar{x}, \delta) \subseteq \Theta_v^c$ i.e.

$$f(x) > v ; \forall x \in B(\bar{x}, \delta).$$

Pour ; $\forall \varepsilon > 0$; $v := f(\bar{x}) - \varepsilon < f(\bar{x})$ Voulons (*)

Alors $f(x) > v = f(\bar{x}) - \varepsilon ; \forall x \in B(\bar{x}, \delta)$

i.e. f est continue en $\bar{x}$.

11

(i) $\Rightarrow$ (ii) on montre que $\text{epif } f \xrightarrow{\text{e}} \bar{e}$? i.e.,
 $(\text{epif})^c$ est ouvert.

Soit $(\bar{x}, r) \in (\text{epif})^c$, alors $f(\bar{x}) > r$.
 pour tout $\varepsilon > 0$ avec $f(\bar{x}) > r + \varepsilon > r$ (parce que $\mathbb{R}$)

i.e., $\bar{x} \in [f \leq r + \varepsilon]^c \Rightarrow \exists \delta > 0$ tq

$f(x) > r + \varepsilon$, $\forall x \in B(\bar{x}, \delta)$. Donc

$B(\bar{x}, \delta) \times]r - \varepsilon, r + \varepsilon[\subset (\text{epif})^c \subset H \times \mathbb{R}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que $(\text{epif}) \cap f \xrightarrow{\text{e}} \bar{e}$.

Soit $r \in \mathbb{R}$; $[f \leq r] := \{u \in H; f(u) \leq r\}$ est-il $\xrightarrow{\text{e}}$?

Soit $(u_n) \subset [f \leq r]$ tq $u_n \rightarrow u$.

Comme $\forall n$, $f(u_n) \leq r$, alors $(u_n, r) \in (\text{epif})$; $\forall$,

il résulte de $(u_n, r) \rightarrow (u, r)$ que $(u, r) \in \text{epif}$

et donc $f(u) \leq r$ i.e., $u \in [f \leq r]$ ce qui

montre la fermeture de $[f \leq r]$.

~~Proposition 1.13~~ : Caractère de l'epi
 $f \text{ epi} \Leftrightarrow (f, r) \in \text{epif} \Rightarrow (h, f(x))$

12

التاريخ	المادة	الفوج
الإسم	اللقب	

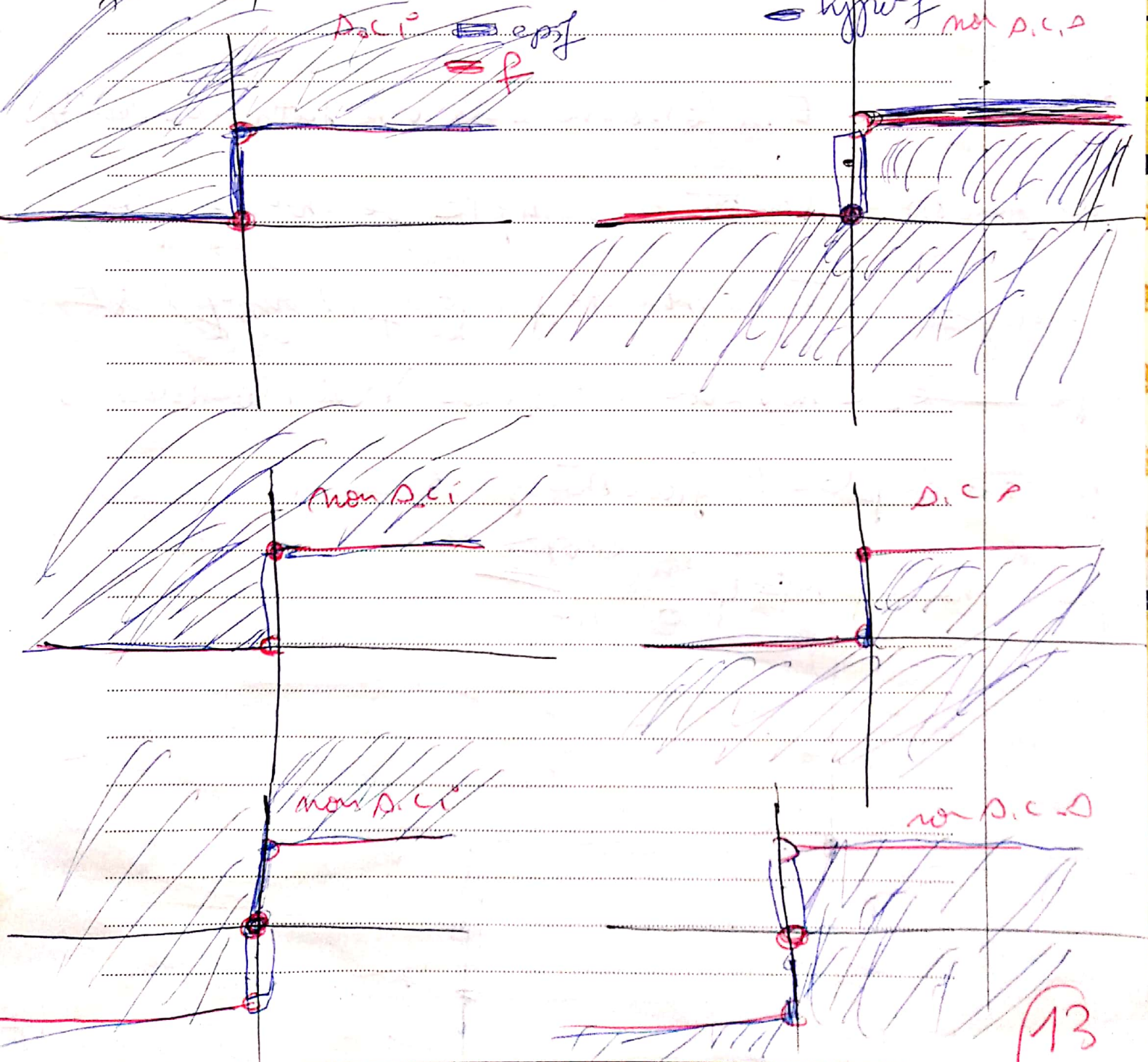
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

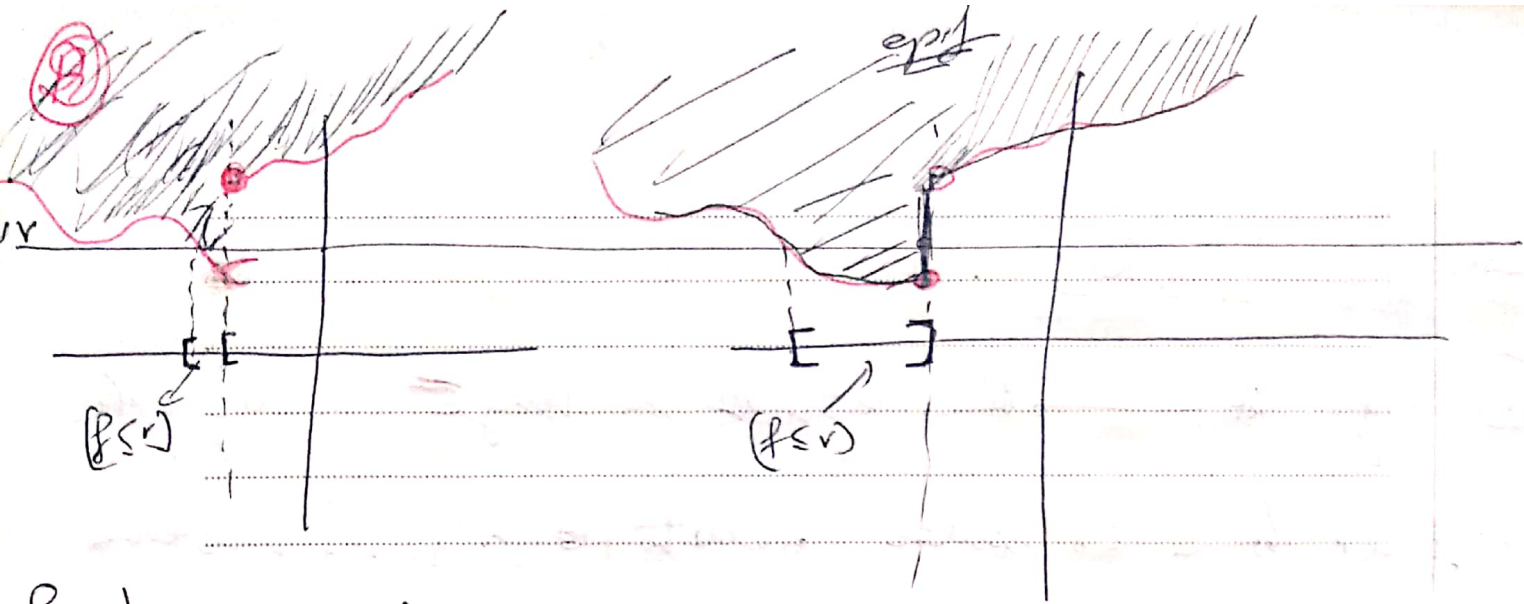


قسم:

Exo plus 1.14

① $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\bullet$ qui est le rouge "c'est le graphe de f et donc les boules (bullets) $\bullet$ c'est la valeurs de f au point de discontinuité.





f n'est pas p.c.i.

f est p.c.i.

Remarque 1.11 En conséquence des résultats précédents,

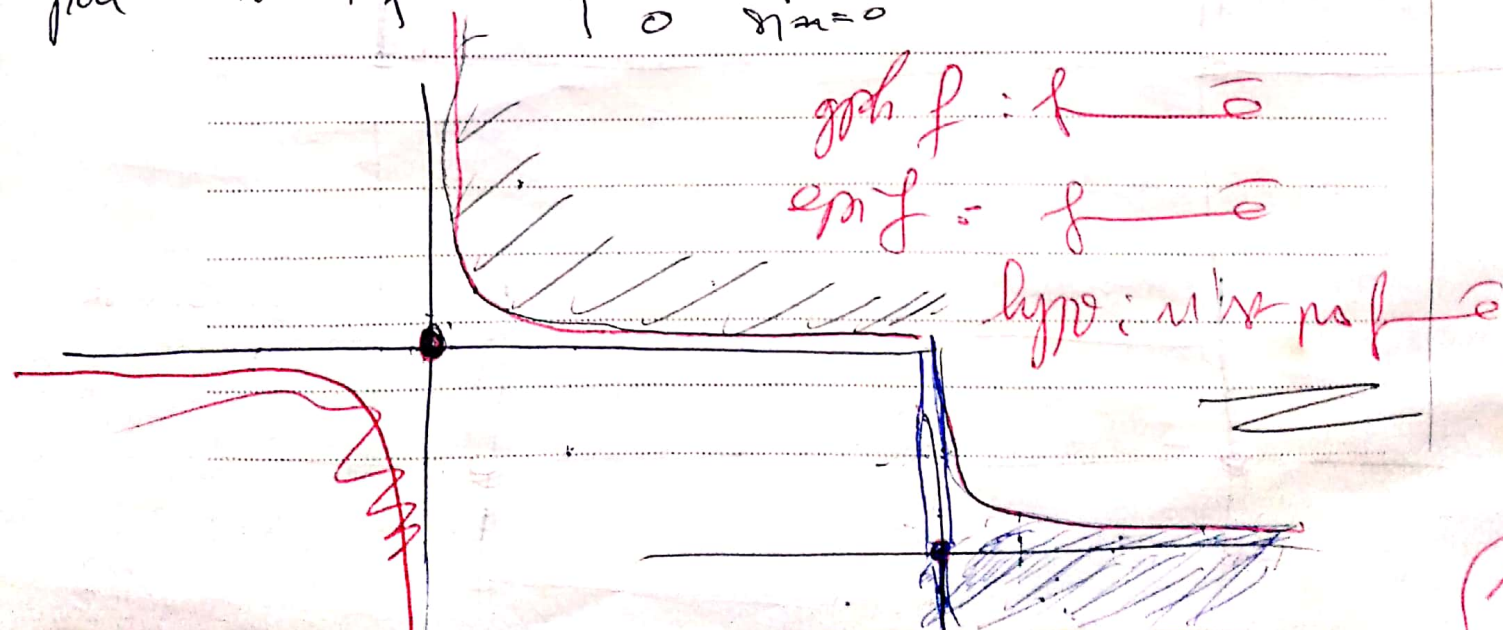
la fonction $\rightarrow$ continue vérifie ce sur graphe,

qui peut être représenté par $(\text{epi } f \cap \text{hypo } f)$, et

le $\leftarrow$. L'inverse n'est pas vrai, considérons

par exemple la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie

par
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



التاريخ	المادة	الفوج
الاسم	اللقب	



Une conséquence facile et importante de la proposition précédente est la stabilité des fonctions semi-continues sous certaines opérations.

Corollaire 16 Soit $(f_i)_{i \in I}$ une finie famille de fctns D.C.I. (Rep. S.C.I.). Alors

$\sup_{i \in I} f_i$ est D.C.I. (Rep. S.C.I. si f_i est D.C.I.).

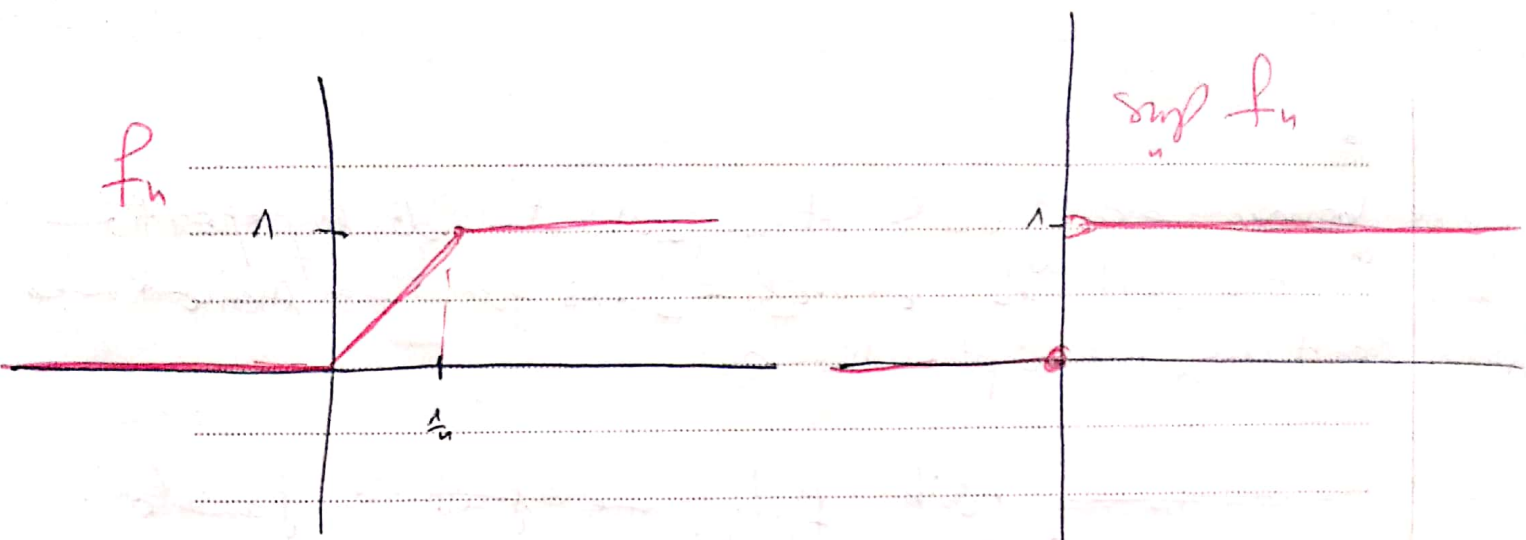
preuve: le résultat est la conséquence du fait que

$$\text{epi}(\sup_{i \in I} f_i) = \bigcap_{i \in I} \text{epi} f_i \text{ et } \text{hypo}(\inf_{i \in I} f_i) = \bigcap_{i \in I} \text{hypo} f_i$$

Ces résultats ne sont plus vrais pour les fonctions continues. ^{le sup de la} famille finie de fctns continues n'est pas continue.

$$f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$



Continuité n'est pas préservée par Sup.

Un résultat bien connu établit que chaque fonction continue atteint son minimum sur tout ensemble compact. Le résultat ci-dessous étend cette propriété.

prop. 1.17. Soit K un sous-ensemble compact de H . Toute fonction s.c.i. $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ atteint son minimum par rapport à K .

preuve

$$\exists ? x_0 \in K; f(x_0) = \inf \{ f(x); x \in K \} = v_0$$

• Si $v_0 = -\infty$

la caractéristique de la borne inf donc.

16

$$\inf \{ f(n); n \in K \} = v_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in K \text{ tq}$$

$$v_0 \leq f(n_\varepsilon) < v_0 + \varepsilon$$

$$\underline{\text{or}} \quad \exists (n_n) \subset K; \quad v_0 \leq f(n_n) < v_0 + \frac{1}{n} \quad \textcircled{*}$$

$v_0 \in K$ est le point, sans perte de généralité

(V. l. o. g), $x_n \rightarrow v_0 \in K$ et par $\textcircled{*}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = v_0$$

$v_0 \in K$ est p.c.; $f(n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(n)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = +\infty$$

Ce qui est impossible

Alors

• $v_0 \in \mathbb{R}$ Considérons à nouveau $(x_n) \subset K$ tq

$$x_n \rightarrow v_0 \in K \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = v_0$$

alors $f(n) \leq v_0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$

et par conséquent $f(n) \geq v_0$ donc $f(n) = v_0$ par conséquent v_0 est minimum. 17

1-3

Fonctions à Valeurs réelles étendues (RVL)

Parfois, nous considérons des fonctions définies sur un sous-ensemble plutôt que sur tout l'espace H .

L'ensemble où la fonction est définie est appelé domaine de f , et nous le noterons par $\text{dom } f$.

Dans ce cas, les concepts de continuité sont définis comme ci-dessus, imposant que tous les arguments soient dans $\text{dom } f$.

Nous laisserons parfois nos fonctions atteindre la valeur " $+\infty$ ", Autrement dit: $f: H \rightarrow]-\infty, +\infty]$.

Plusieurs définitions ont un sens dans ce nouveau contexte, puisque nous pouvons calculer les limites et faire des opérations algébriques (sauf $+\infty - \infty$!).

En acceptant cette nouvelle valeur, nous pouvons étendre les fonctions définies dans un sous-ensemble de H sur tout l'espace, en supposant que la valeur

18

الفوج	المادة	التاريخ
اللقب	الاسم	

de la fonction est $+\infty$ hors de son domaine.

Certaines propriétés de la fonction sont stables

sur ce type d'extension ($\inf_{x \in I} f \Leftrightarrow \inf_{x \in \tilde{I}} \tilde{f}$), la valeur

minimale par exemple. La raison de choisir la

valeur $+\infty$ au lieu de $-\infty$ est précisément

parce que nous voulons traiter des "minima" et

des fonctions D.C.I. Si, on remplace (f) par $(-f)$

le "minima" devient "maxima", la D.C.I. se

transforme en D.C.D, et nous étendons la

fonction à $-\infty$.

Def 1.18 On dit qu'une fonction $f: H \rightarrow]-\infty, +\infty]$

est D.C.I. si $u_0 \in H$ si $f(u_0) \leq \liminf_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Remarque 1.19. Observons que la limite inférieure est

définie exactement comme dans la def. ?

Si la limite de f n'est pas $]-\infty, +\infty]$. Si non, donc
 $u \rightarrow u_0$ $f(u_0) = +\infty$, alors la D.C.I. $\Rightarrow \liminf_{u \rightarrow u_0} f(u)$ et donc $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = +\infty$

Exo 1.20 Une fonction "Très" ou

extrême et utilisée en analyse variationnelle
est la fonction indicatrice d'un ensemble $S \subset H$.

Soit donc $S \subset H$; on définit

$\chi_S : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ de la manière suivante

$$u \longmapsto \chi_S(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in S, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

• χ_S est appelée la fonction indicatrice de S

au sens d'analyse variationnelle; plusieurs notations

existent dans la littérature pour χ_S : χ_S , χ_S , I_S

etc. Attention! ne pas confondre cette notion avec

celle d'indicatrice (d'ensemble) utilisée en

théorie de la mesure, intégration et probabilité;

Celle-ci, notée $\mathbb{1}_S$, est définie comme suit:

$$\mathbb{1}_S(u) = 1 \text{ si } u \in S \text{ et } \mathbb{1}_S(u) = 0 \text{ sinon.}$$

Mais il y a une relation simple entre les deux
 $\chi_S = \overline{\mathbb{1}_S}$ (expliquer le lien)
(Transformée de Fourier locale et Legendre-Fenchel $\rightarrow$ note 4. Vialle)

التاريخ	المادة	الفوج
الاسم	اللقب	

شعبة العلوم الدقيقة والإعلام الآلي
قسم:

... Maintenant, la

$$\begin{cases} \delta_s \leq v \\ \phi \leq v \end{cases} \iff \begin{cases} s' \leq v \\ \phi \leq v \end{cases}$$

ou bien $\text{epi} \delta_s$ est le cylindre $S' \times \mathbb{R}$,

il est immédiat de constater l'équivalence suivante:

$$(\delta_s \text{ est a.c.m.H}) \iff (S' \text{ est f.c.}).$$

... Un des intérêts de l'utilisation de δ_s est de pouvoir remplacer (du moins l'écrasement) un problème

Variationnel avec contraintes par un problème

Variationnel sous contraintes :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x), \\ \text{pour } x \in S \subset H \end{cases} \iff \begin{cases} \text{Minimiser } \tilde{f}(x) \\ \text{pour } x \in H \end{cases}$$

$$\tilde{f} := f + \delta_S \quad \text{i.e.,} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in S \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

1.4 Enveloppe de Moreau. Nous introduisons maintenant la propriété "Lipshitz". Dans notre cadre, cette propriété est en quelque sorte un moyen terme entre la convexité et la différentiabilité, et

les fonctions de "Lipschitz" jouent parfois le rôle de fonctions différentiables en analyse non lisse.

Def 1.21. Soit $A \subseteq H$, on dit qu'une fonction réelle $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ est Lipschitz sur A , à condition qu'il existe une constante K positive telle que $|f(x) - f(y)| \leq K \|x - y\|$ pour tous $x, y \in A$.
 f est dite localement Lipschitz, si elle est Lipschitz au voisinage de chaque point de H .

Prop 1.22 Si on veut spécifier la constante de la définition, on dit que f est K -Lipschitz, dès elle est K' -Lipschitz pour tous $K' \geq K$.

La Convolution est une méthode bien connue pour régulariser et approximer les fonctions dans le cadre différentiable. Dans notre contexte, l'inf-convolution joue ce rôle.

Def 1.23 - Pour une fonction $f: H \rightarrow]-\infty, +\infty]$
 d.c.i., bornée inférieurement (bounded below)
 et un paramètre positif λ , nous définissons
 l'enveloppe de Moreau comme :

$$f_\lambda(x) := \inf_{u \in H} \left\{ f(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - x\|^2 \right\}.$$

Propriétés de f_λ :

• La fonction f_λ est bien définie. En effet :

$$\inf (f + \| \cdot \|^2) \geq \inf f + \inf \| \cdot \|^2$$

$\exists$ constante $\geq b \geq 0$

• f_λ est finie et $b \leq f_\lambda(x) \leq f(x)$.

Si b est la borne inférieure de f :

$$* f_\lambda(u) \leq f(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - u\|^2, \forall u \in H$$

$$u_0 = u \Rightarrow \inf_{u \in H} f(u) \leq f(u), \forall u \in H.$$

$$* f_\lambda \geq \inf f + \inf \| \cdot \|^2$$

$\geq b + 0$

$$\boxed{f \geq b \Rightarrow}$$

$$\inf f \leq f(u) \leq f(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - u\|^2$$

$$\inf f \geq b - \epsilon \Rightarrow$$

23

Mais f_1 a d'autres propriétés jolies!
 but f_2 has other nice properties.

Théorème 1.21. Soit $f: H \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est ^{ne fait} $\Delta C.1$;
 bornée inférieurement (bounded below), et

$A \subset H$ est un ensemble borné. Alors f_1 est

Lipschitz sur A .

Preuve

Soit $x_0 \in \text{dom } f$ i.e. $f(x_0) < +\infty$, nous avons

$$f_1(x) \leq f(x_0) + \frac{1}{2\lambda} \|x - x_0\|^2, \text{ et par}$$

Conséq $\rightarrow M := \sup \{ f_1(x) : x \in A \}$ est finie
 i.e. $M < +\infty$.

Maintenant, Soient $x, y \in A$ et $\varepsilon > 0$, il existe
 $z \in H$ tel que

$$(\text{def } f_1(x) = \inf_{z \in H} \{ f(z) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2 \}) \quad f_1(y) + \varepsilon \geq f(z) + \frac{1}{2\lambda} \|z - y\|^2 \quad (*)$$

Donc, nous avons de (*)

$$f_1(x) - f_1(y) \leq f_1(x) - f(z) - \frac{1}{2\lambda} \|z - y\|^2 + \varepsilon.$$

$$\stackrel{f_1(x) \text{ def}}{\leq} f(z) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2 - f(z) - \frac{1}{2\lambda} \|z - y\|^2 + \varepsilon.$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2 - \frac{1}{2\lambda} \|z - y\|^2 + \varepsilon$$

$$\stackrel{z \in H}{=} \frac{1}{2\lambda} \|x - z\|^2 - \frac{1}{2\lambda} \|z - y\|^2 + \varepsilon.$$

التاريخ	المادة	الفوج
الاسم	اللقب	

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي



قسم:

$$= \frac{1}{2\lambda} \| (u-y) + (y-z) \|^2 - \frac{1}{2\lambda} \| z-y \|^2 + \varepsilon.$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \| u-y \|^2 + \frac{1}{2\lambda} \| y-z \|^2 + \frac{1}{\lambda} \langle u-y, y-z \rangle - \frac{1}{2\lambda} \| z-y \|^2 + \varepsilon.$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \| u-y \|^2 - \frac{1}{\lambda} \langle u-y, z-y \rangle + \varepsilon.$$

$$\stackrel{C.S}{\leq} \frac{1}{2\lambda} \| u-y \|^2 + \frac{1}{\lambda} \| u-y \| \| z-y \| + \varepsilon,$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \| u-y \| \left[\| u-y \| + 2 \| z-y \| \right] + \varepsilon,$$

$$\leq K \| u-y \| + \varepsilon,$$

La dernière inégalité est vraie car ~~car~~

$u, y \in A$, qui est borné, et z appartient à un ensemble borné aussi puisque $z = d \otimes$

$$\| z-y \|^2 \leq 2\lambda \{ f_\lambda(y) + \varepsilon - f(z) \}$$

$$\leq 2\lambda \{ M + \varepsilon - \inf f \} \text{ de }$$

$$z = y + z - y \in A + \alpha B \text{ de }$$

$$\alpha z = 2\lambda [M + \varepsilon - \inf f]$$

Inversant les rôles de u et y , on obtient

$$f_\lambda(y) - f_\lambda(u) \leq K \|u - y\| + \varepsilon \text{ or}$$

$$f_\lambda(u) - f(y) \geq -(K \|u - y\| + \varepsilon) \text{ donc}$$

$$|f_\lambda(u) - f_\lambda(y)| \leq K \|u - y\| + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Preuve $\varepsilon \downarrow 0$, nous obtenons que f_λ est Lipschitz en H .

Une fois nous avons prouvé que les enveloppes de Moreau régularisent les fonctions D.C.i., nous allons montrer qu'elles approchent la fonction originale.

Theorem 1.26. Soit $f: H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction D.C.i. bornée inférieurement, Alors

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} f_\lambda(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in H.$$

preuve. Soit $b \leq f(x)$ for every $x \in H$.

Supposons premièrement que $f(x) < +\infty$, Nous allons

التاريخ	المادة	الفوج
الاسم	اللقب	



$$f(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - x\|^2 \geq b + \frac{1}{2\lambda} \|u - x\|^2 \geq f(x)$$

SI $\|u - x\|^2 \geq 2\lambda [f(x) - b] \quad \text{i.e.} \Leftrightarrow$

SI $u \notin \overline{B}(x, r_A), \quad \text{---} \quad (*)$

$V_\lambda := [2\lambda(f(x) - b)]^{1/2}$ qui tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow \infty$.

Donc $f_\lambda(x) = \inf_{u \in H} \left\{ f(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - x\|^2 \right\}$

$(*) \inf_{u \in \overline{B}(x, r_A)} \left\{ f(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - x\|^2 \right\} = 0$

Comme $f_\lambda(x) \leq f(x)$ Nos déduisons de la dernière formule que :

$$f_\lambda(x) \geq \inf_{u \in \overline{B}(x, r_A)} (f(u))$$

et par conséquent

Propriété 1

$$f(x) \leq f_\lambda(x) \Rightarrow f(x) \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(x)$$

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(x) = \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(x) = f(x)$$

$$\text{encadrement de la limite} \quad \left[\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(x) \leq f(x) \leq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(x) \right]$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \inf_{u \in \overline{B}(x, r_A)} f(u) \geq \inf_{u \in \overline{B}(x, r_A)} f(u)$$



87

Prop $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si $f(x) = +\infty$. Case

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty = f(a)$.

Prop $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (*)

$\lim_{x \rightarrow a} \sup f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \inf f(x) = +\infty = f(a)$.