

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Université de Jijel, Département d'Architecture
3^{ème} Année Architecture LMD

Module : structure. 1

CH 4. Calcul du béton armé aux états limites

I. Sécurité Réglementation

La sécurité est définie comme l'absence de risque dans le domaine de construction ; cela implique la stabilité et la durabilité et l'aptitude à l'emploi. La sécurité absolue n'existe pas; il faut accepter une probabilité non négligeable d'accident.

Le dimensionnement des ouvrages et la vérification de la sécurité ne peuvent pas se faire de manière empirique. Ils sont basés sur des règles de calculs bien précises.

II. Théorie semi -probabiliste - Etats limites : (B.A.E.L)

Cette nouvelle théorie consiste à :

1-Définir les phénomènes que l'on veut éviter (l'état limite), ces phénomènes sont :

- Ouverture des fissures soit par :

 - a- Compression successive dans le béton.

 - b- Traction successive dans l'acier.

- Déformation importante dans l'ensemble.

2-Estimer la gravité des risques liés à ces phénomènes (on distingue les états limites ultimes et les états limites de services).

3-Dimensionner les éléments de la construction de telle manière que la probabilité d'atteindre l'un de ces phénomènes reste faible.

II.1. Etats Limites Ultime: (E.L.U)

Il correspond à la valeur maximale de la capacité portante de la construction et dont le déplacement entraîne la ruine de la construction.

Exemple :

- a- Etat limite ultime d'équilibre statique de l'ouvrage : c'est la perte de la stabilité d'une partie ou de l'ensemble de la construction (le renversement).
- b- Etat limite ultime de résistance de l'un des matériaux de construction : c'est la perte de résistance soit du béton soit de l'acier.
- c- Etat limite ultime de stabilité de forme (flambement) : les pièces élancées soumises à des efforts de compression subissent des déformations importantes et deviennent instable.

II.2. Etats Limites Service: (E.L.S)

Il constitue des limites au-delà des quelles les conditions normales d'exploitation ne sont plus satisfaites sans qu'il y'est ruine.

Exemple :

- a- Etat limite de service de compression de béton : cette limitation à pour but d'empêcher la formation des fissures.
- b- Etat limite de service d'ouverture des fissures : il consiste à assurer que les armatures sont convenablement disposées don la section et les contraintes ne dépassent pas la valeur limite.
- c- Etat limite de service de déformation : il consiste à vérifier que les déformations sont inférieures à des déformations limites.

II.3. Règlements Algériens (C.B.A) et (R.P.A)

C'est les règlements techniques algérien qui viennent se substituer à la pratique admise du B.A.E.L (Béton Armé aux Etats Limites) ; en donnant des recommandations spéciales pour le pays Algérien dans le domaine parasismique R.P.A (Règlement Parasismique Algérien).

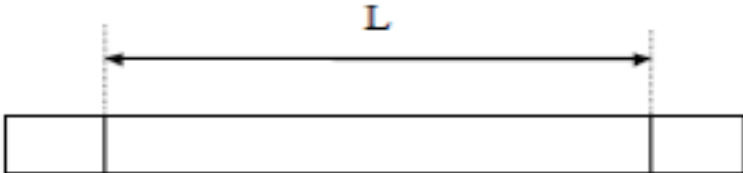
III. Caractéristiques physiques et mécaniques du béton

A- Masse volumique :

- La masse volumique béton à granulats courants (normal) $\rightarrow 2200 \div 2400 \text{ kg/m}^3$
- La masse volumique béton à granulats légers $\rightarrow 700 \div 1500 \text{ kg/m}^3$
- La masse volumique béton à granulats lourds $\rightarrow 3500 \div 4000 \text{ kg/m}^3$
- La masse volumique du béton armé $\rightarrow 2500 \text{ kg/m}^3$

B- Déformations du béton indépendantes des charges appliquées :

1-Déformation thermique : le coefficient de dilatation du béton varie de 7.10^{-6} à 12.10^{-6} le coefficient de dilatation de l'acier est de 11.10^{-6} , d'où le béton armé 10.10^{-6} .


$$\Delta L = \pm \alpha \cdot L \cdot \Delta t$$

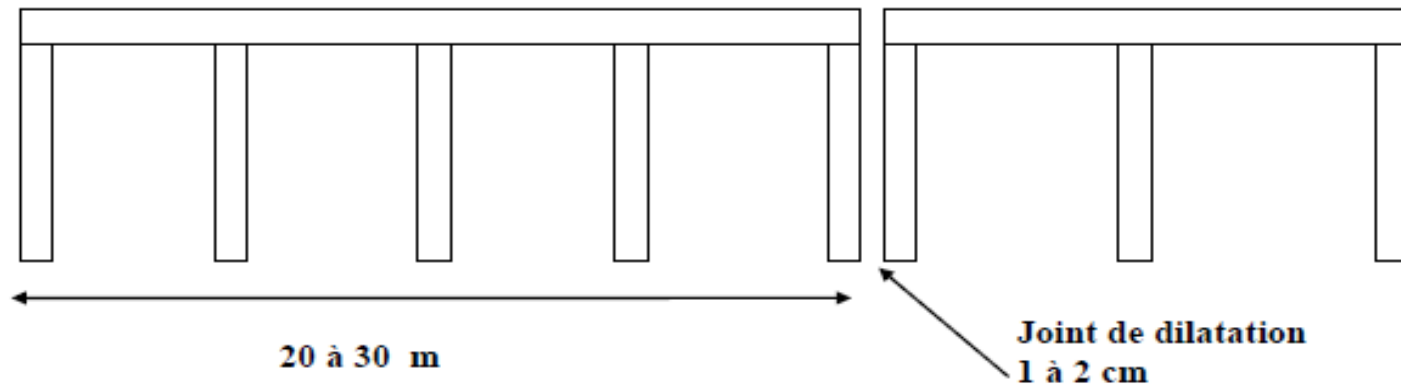
La longueur de la poutre

Coefficient de dilatation

Différence de température

2- Le retrait hygrométrique : le béton après sa confection (fabrication) contient un excès d'eau, si le durcissement se fait à l'air libre l'eau va s'évaporer. Cette évaporation s'accompagne automatiquement par une diminution du volume. Cette diminution s'appelle le retrait.

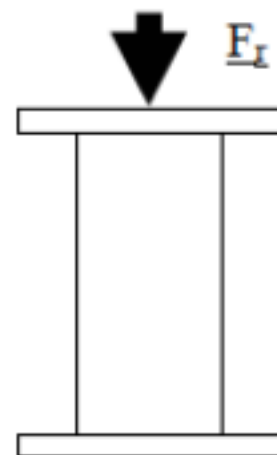
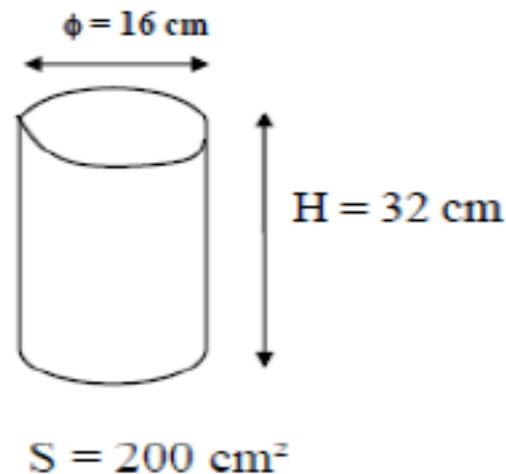
Pour les constructions courantes, les effets du au variation de température et au retrait seront négligés, si on prévoit des joints de dilatation tout les 20 à 30 mètre.



C- déformation du béton sous actions courte durée (< 24 H) :

1- Résistance à la compression :

a- Essai de compression : l'essai est effectué sur des cylindres en béton comme suit :



$$\sigma = \frac{4.F_c}{\pi.\phi^2}$$

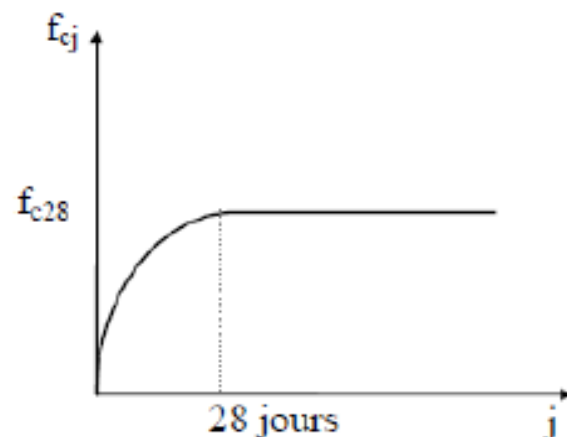
b- Evolution de la résistance à la compression avec l'âge du béton :

On peut admettre que pour $j \leq 28$, la résistance en compression f_{cj} à j jours des bétons suit approximativement les lois suivantes :

$$\text{Pour } f_{c28} < 40 \text{ Mpa} \rightarrow f_{cj} = \frac{j}{4.76 + 0.83j} f_{c28}$$

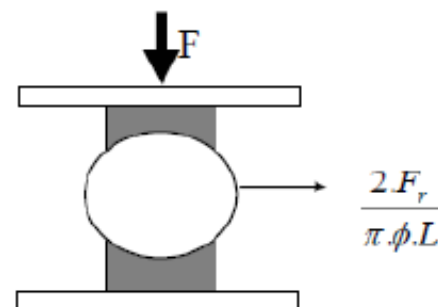
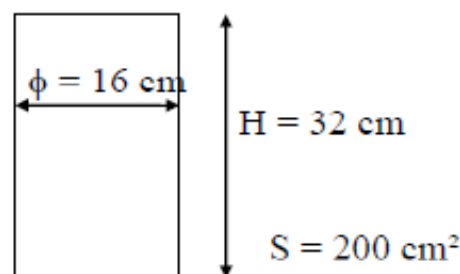
$$\text{Pour } f_{c28} > 40 \text{ Mpa} \rightarrow f_{cj} = \frac{j}{1.40 + 0.95j} f_{c28}$$

f_{c28} : résistance caractéristique du béton à 28 jours (en MPa)



2- Résistance à la traction :

a- Traction par fendage :



b- Résistance caractéristique à la traction :

$$f_{tj} = 0,6 + 0,06 \cdot f_{cj} \quad \text{avec} \quad f_{cj} : \text{la résistance à la compression à } j \text{ jour.}$$

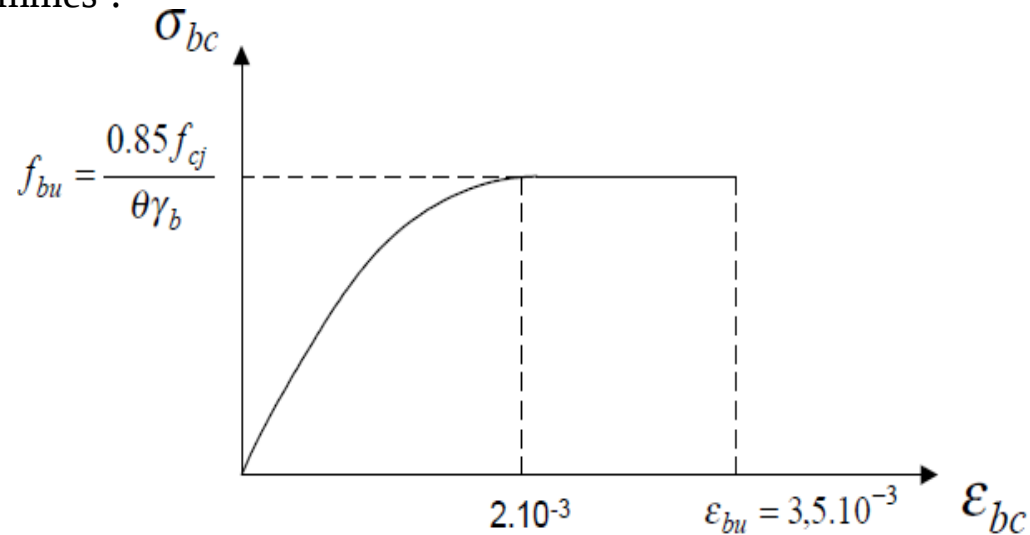
$$f_{tj} : \text{la résistance à la traction compression à } j \text{ jour.}$$

IV. Diagramme contrainte /déformation de calcul des bétons :

Il est évident qu'on ne peut introduire dans les calculs le comportement réel du béton en raison de la complexité des calculs que cela entraînerait, on est donc amené à faire des simplifications.

Le BAEI dans ce cas distingue 2 types de diagrammes :

1. À E.L.U :



$$\sigma_{bc} = \frac{0.85 f_{cj}}{\theta \gamma_b} \left[1 - \left(\frac{2.10^{-3} - \epsilon_{bc}}{2.10^{-3}} \right)^2 \right] \quad 0 < \epsilon_{bc} \leq 2\text{‰}$$

$$\sigma_{bc} = \frac{0.85 f_{cj}}{\theta \gamma_b} \quad 2\text{‰} < \epsilon_{bc} \leq 3,5\text{‰}$$

- f_{bu} est la valeur de calcul de la contrainte du béton.
- Le coefficient θ dépend de la durée d'application des charges : $\theta=1$ si durée > 24 h - $\theta=0.9$ si $1 \text{ h} > \text{durée} < 24 \text{ h}$.
- γ_b est le coefficient de sécurité : $\gamma_b=1.5$ (cas courants) - $\gamma_b=1.15$ (combinaisons accidentelles).

b. À E.L.S :

On adopte le diagramme élastique linéaire suivant:



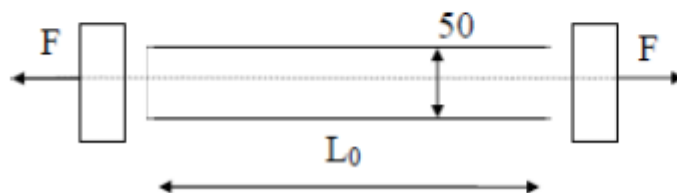
V. Caractéristique des Aciers :

C'est l'alliage fer et carbone. On distingue des aciers doux, des aciers mi-durs et des aciers durs.

Acier doux $\rightarrow$ % carbone 0,15 - 0,25 %

Acier mi dur et dur $\rightarrow$ % carbone 0,25 - 0,45 %

1. Essai de traction :

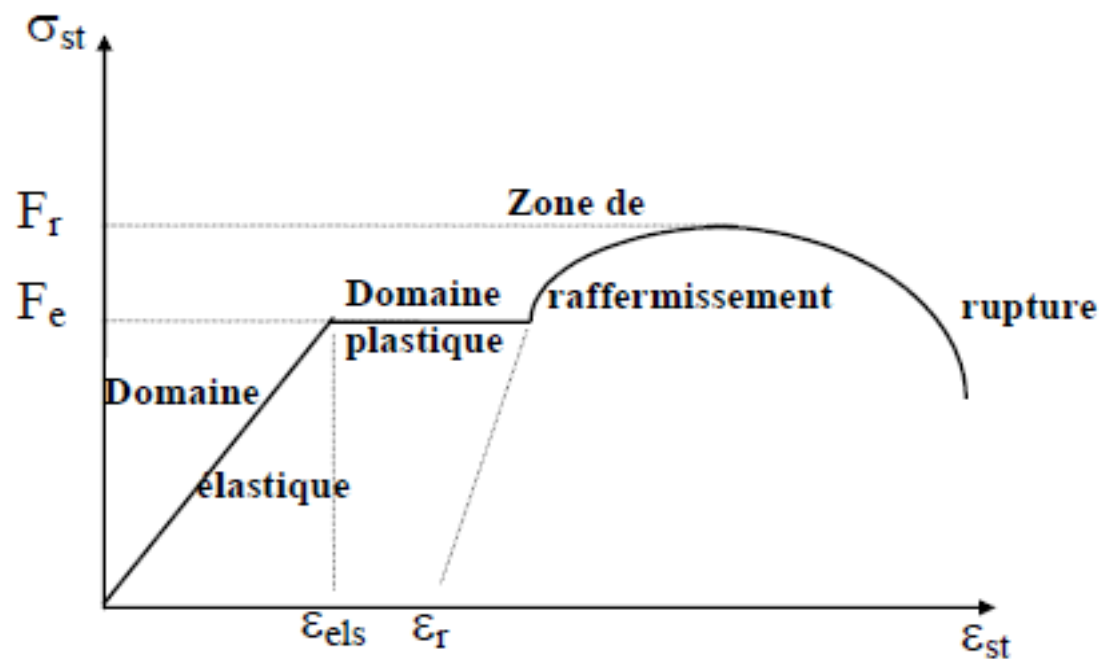


Enregistrer F et ΔL

contrainte / déformation

$$\sigma_{st} = \frac{F}{S_0} \quad \epsilon_{st} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

le diagramme contrainte - déformation pour les aciers doux aura l'allure suivante :



Dans le domaine élastique, l'expression de la contrainte en fonction de l'allongement

$$\text{sera : } \sigma_{st} = E \cdot \epsilon$$

avec : $E = 200\,000 \text{ MPa}$

le module de young

ϵ : la déformation.

La contrainte correspondante à la limite de proportionnalité entre contrainte et déformation est appelée limite élastique ou limite d'élasticité, elle est notée par F_e .

Dans la zone de raffermissement la contrainte atteint un maximum; on appelle contrainte de rupture et elle sera notée par F_r .

VI. Différent types d'aciers

- Acier rond lisse.
- Acier haute adhérence.
- Treillis soudés.

1. Acier rond lisse : l'acier se forme de barre, en principe d'une longueur de **12 m** et une section circulaire et il ont une surface qui est lisse. Les diamètres généralement utilisés sont les suivants :

6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 20 ; 25 ; 32 ; 40mm.

Les ronds lisses sont utilisés en deux nuances (catégories).

Qui sont notées par : FeE220 ou FeE215 $f_e = 215$ Mpa.

FeE240 ou FeE235 $f_e = 235$ Mpa.

Nuance	Fe (MPa)	ϵ	F_r
FeE215	215	1,075	330 - 490
FeE235	235	1,175	410 - 490

2. Acier haute adhérence : les barres à haute adhérence ont une section sensiblement circulaire qui présente des nervures d'une hauteur de 0,5 à 3 mm (la hauteur est suivant le diamètre) pour améliorer l'adhérence entre l'acier et le béton. Les diamètres ou les barres à haute adhérence utilisés sont : 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 20 ; 25 ; 25 ; 32 ; 40 mm.

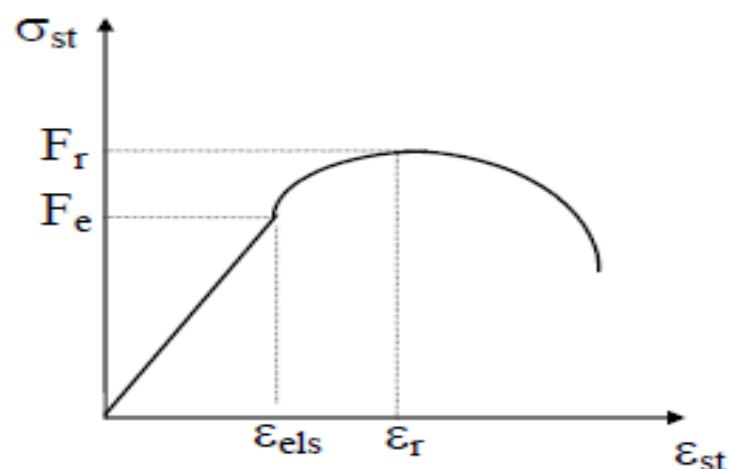
les hautes adhérences se divisent en deux nuances :

FeE400 $\rightarrow$ Fe = 400 MPa.

FeE500 $\rightarrow$ Fe = 500 MPa.

Nuance	Fe (MPa)	ϵ	Fr
FeE400	400	2	480
FeE500	500	2,5	550

le diagramme contrainte - déformation pour les hautes adhérences sont les suivant :



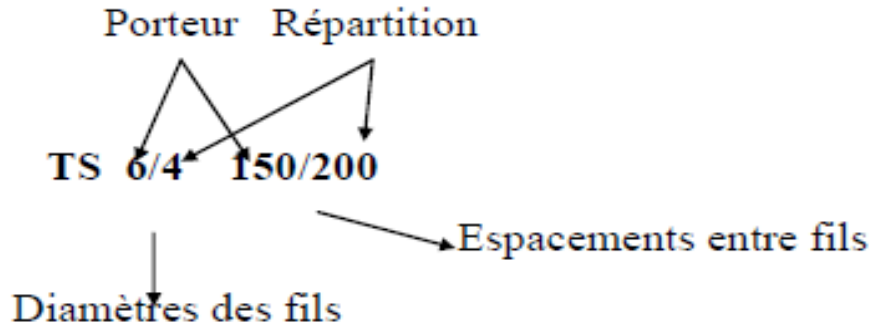
Haute adhérence (HA , T) :

Exemple : 3 HA 12

3 T 12

3 barres hautes adhérence de diamètre 12 mm

Les treillis soudés (TS) :



VII Diagramme contrainte-déformation de calcul des aciers

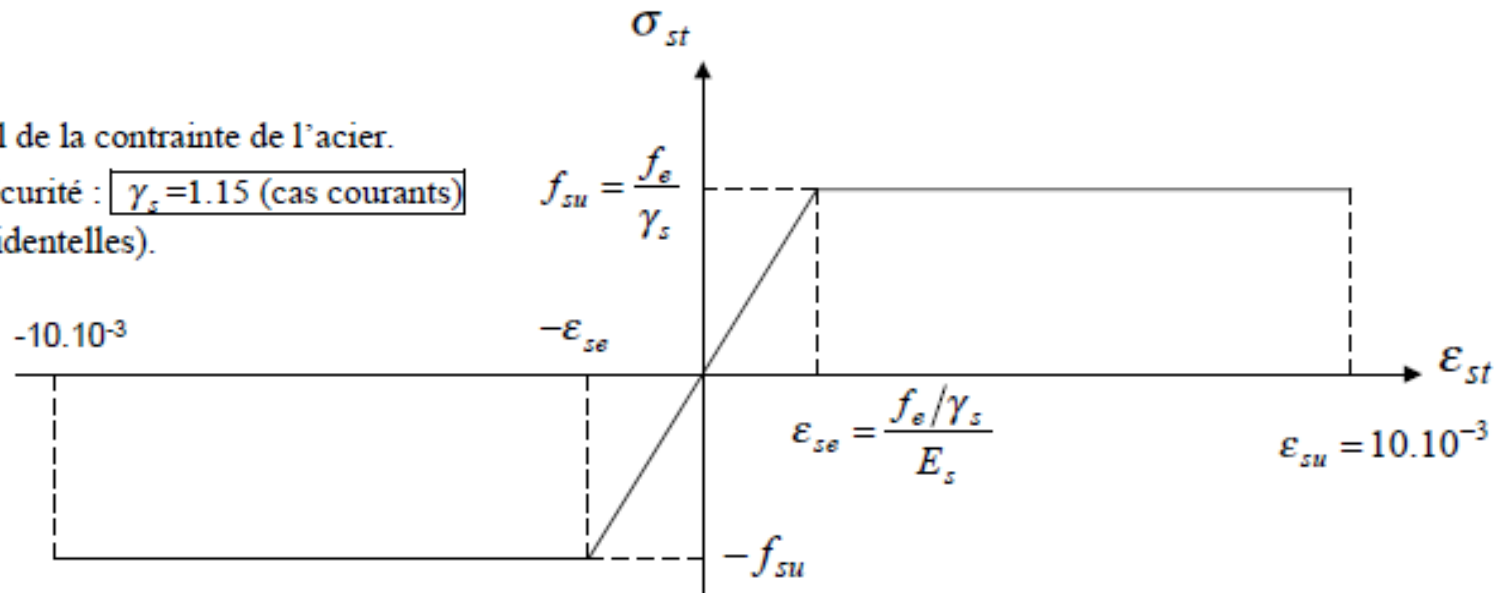
il s'agit de montrer les différences entre les diagrammes physique que nous venons d'étudier et les diagramme adoptés pour le calcul.

a) à E.L.U :

f_{su} est la valeur de calcul de la contrainte de l'acier.

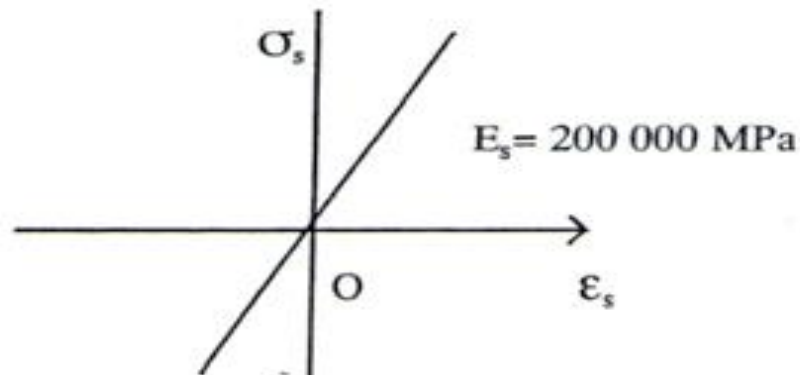
γ_s est le coefficient de sécurité : $\gamma_s = 1.15$ (cas courants)

$\gamma_s = 1$ (combinaisons accidentelles).



b) à E.L.S :

On adopte le diagramme élastique linéaire suivant:



E_s : module d'élasticité sera limité uniquement dans l'état limité d'ouverture des fissures .

1- Fissuration peu préjudiciable $\Rightarrow$ limitation à **Fe** (aucune vérification)

2-Fissuration préjudiciable : $\sigma_{st} \leq \min \left(\frac{2}{3} F_e ; 110 \sqrt{\eta \cdot f_{tj}} \right)$

3- Fissuration très préjudiciable : $\sigma_{st} \leq \min \left(\frac{1}{2} F_e ; 90 \sqrt{\eta \cdot f_{tj}} \right)$

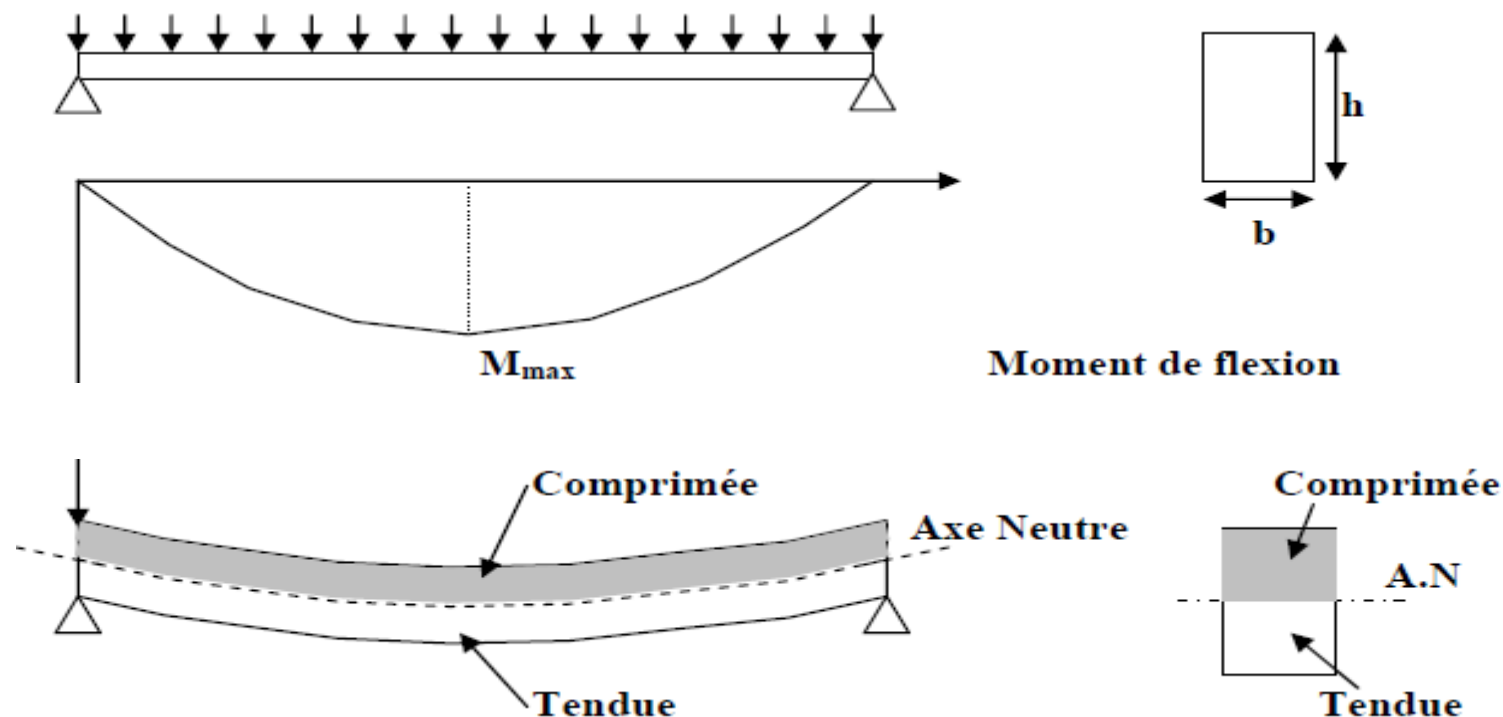
η : Coefficient de fissuration $\Rightarrow \eta = 1$ pour rond lisse

IIX. Dénomination des armatures

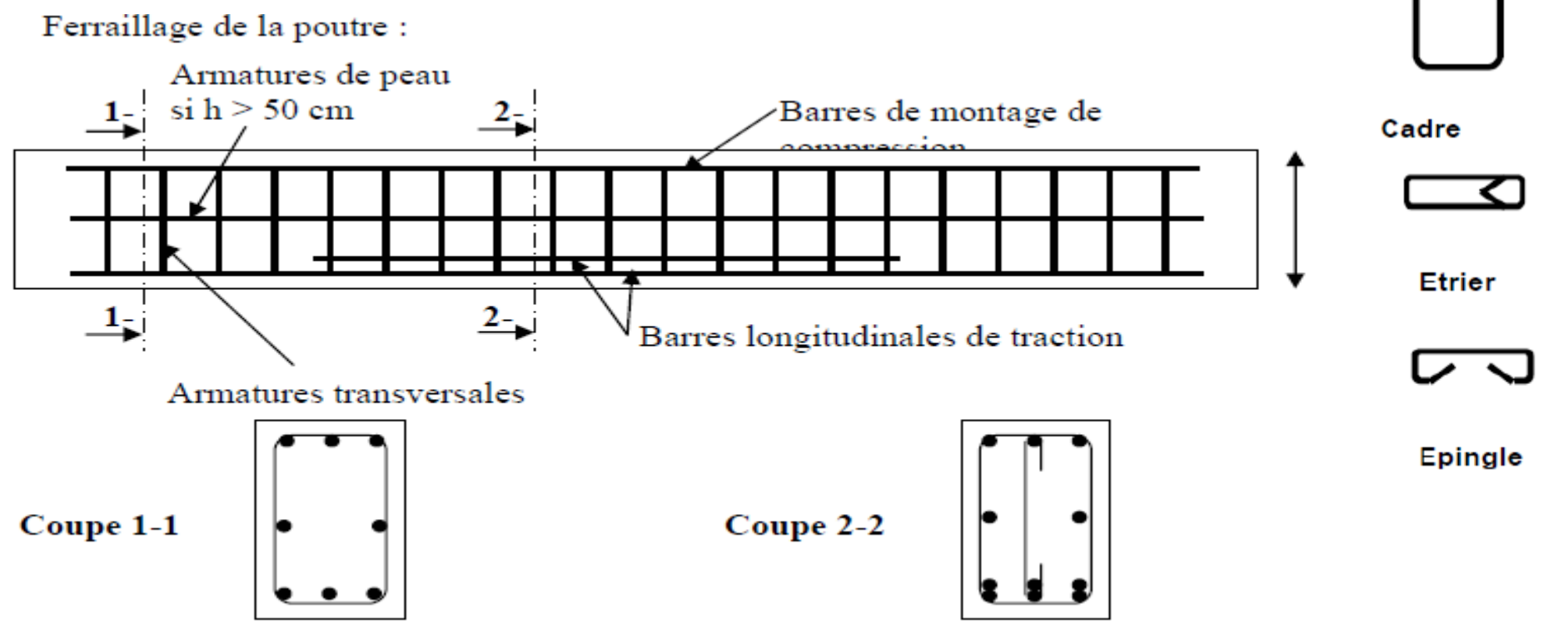
On distingue deux types d'armatures:

a-Les armatures longitudinales : on utilise généralement du haute adhérence avec de diamètres supérieurs ou égales à **12 mm**, elle seront disposées dans la partie tendue de la poutre pour reprendre les efforts de traction (armatures principales). Dans la partie comprimée les barres de montage qui peuvent éventuellement reprendre une partie des efforts de compression lorsque le béton ne suffit pas.

Pour les armatures de traction, il peut y avoir plusieurs nappes dans la partie où le moment est maximum.



b- Les armatures transversales : sont appelées armatures de couture puisqu'elles coudent les fissures. Elles ont un diamètre inférieur à 10 mm. Il existe trois sorte d'armatures transversales :



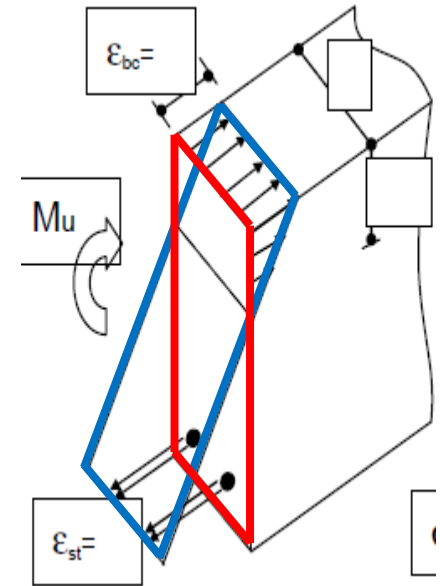
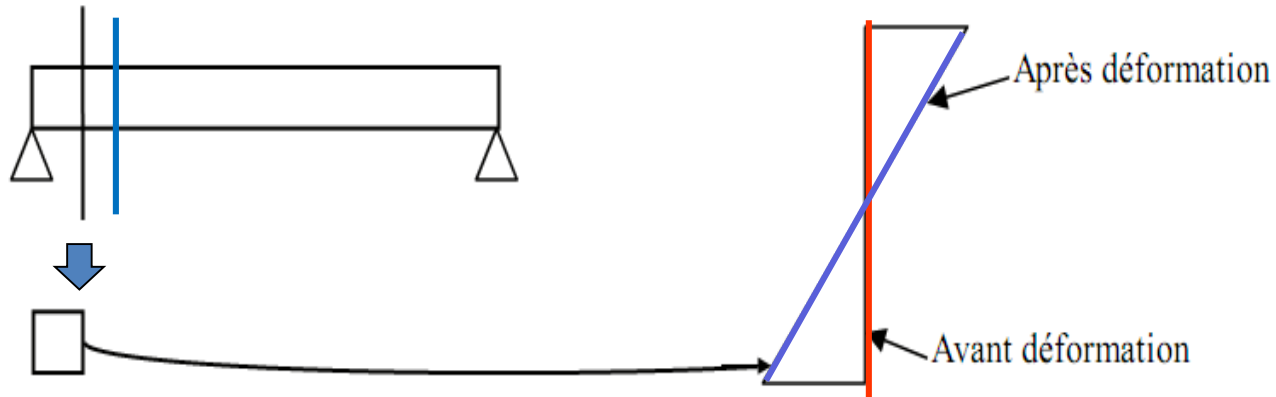
- Les armatures transversales sont disposées le long de la poutre, elles sont très rapprochées au niveau des appuis parce que l'effort tranchant est maximum.
- Les armatures transversales sont attachées aux barres longitudinales en maintenant leurs écartements.

IX . Les hypothèses de calcul

IX.1 Hypothèses à L'E .L .U

Hypothèse (1) : toute section plane avant déformation reste plane après déformation.

Cas de flexion

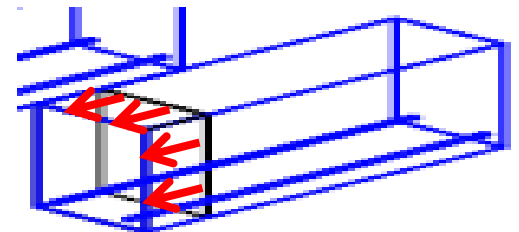


Cas de Traction

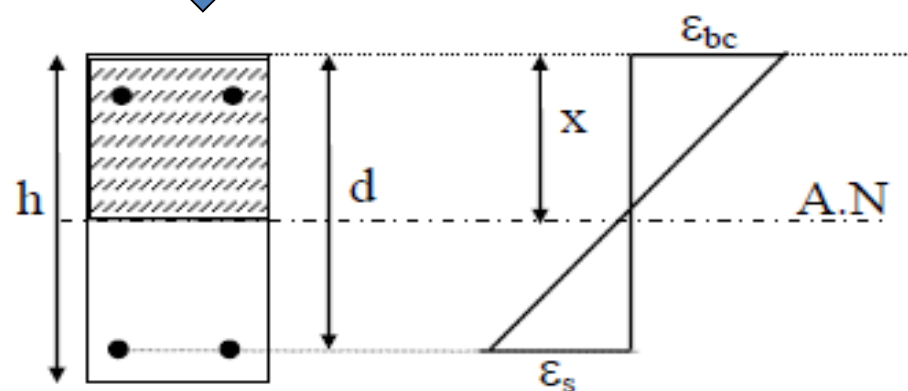
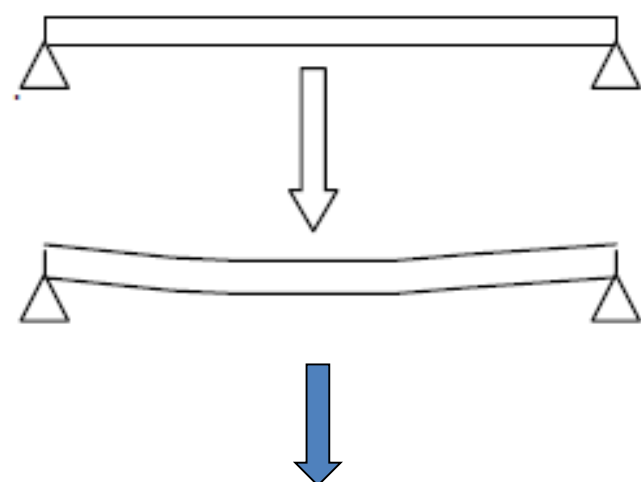
Après
déformation



Avant
déformation



Hypothèse (2) : Il n'y a pas de glissement relatif entre le béton et l'acier . la déformation de deux matériaux est la même. Il résulte de cette hypothèse que les déformations des fibres sont proportionnelles à leurs distances par rapport à l'axe neutre .



ϵ_{bc} : la déformation du béton à la compression

ϵ_s : la déformation des l'aciers tendue .

x : la distance de l'axe neutre .

d : la distance du centre de gravité aux armatures tendues.

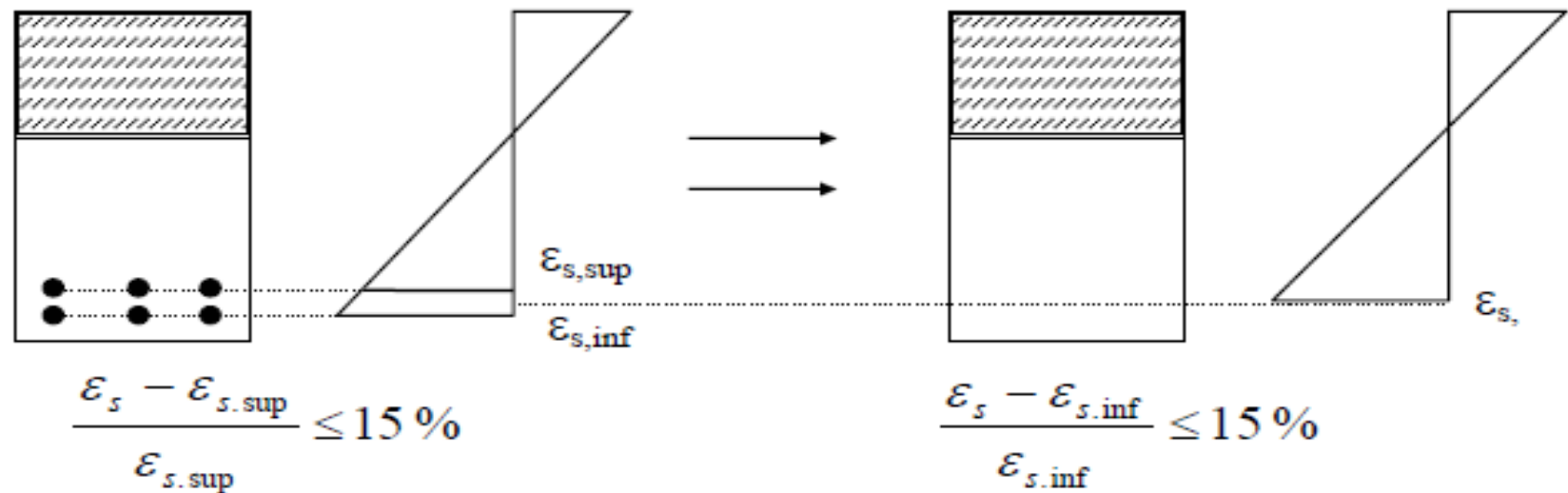
$$\alpha = \frac{x}{d} = \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{bc} + \epsilon_s}$$

$$\Rightarrow \epsilon_s = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \epsilon_{bc}$$

$$\text{ou} \quad \epsilon_{bc} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \epsilon_s$$

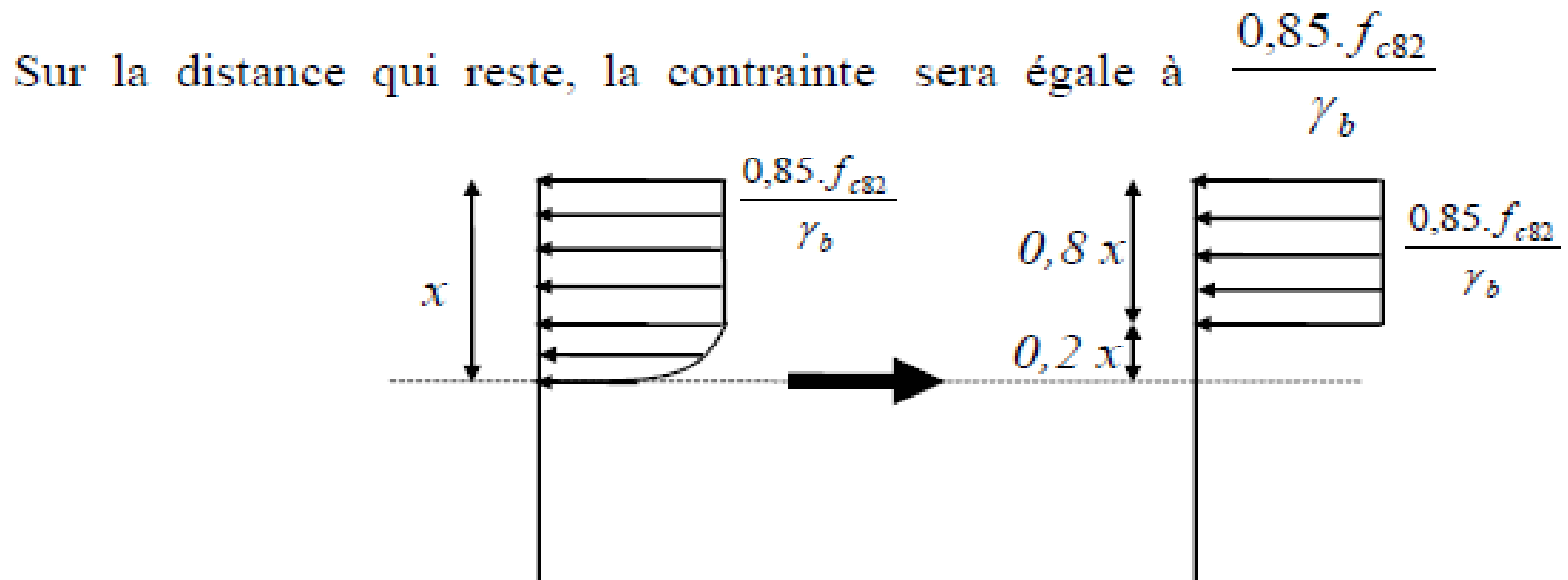
Hypothèse (3) : la résistance du béton tendu est négligée.

Hypothèse (4) : On suppose concentré en leur centre de gravité la section d'un groupe de plusieurs barres tendues ou comprimées, si l'erreur commise sur les déformations unitaires ne dépassent pas 15% .



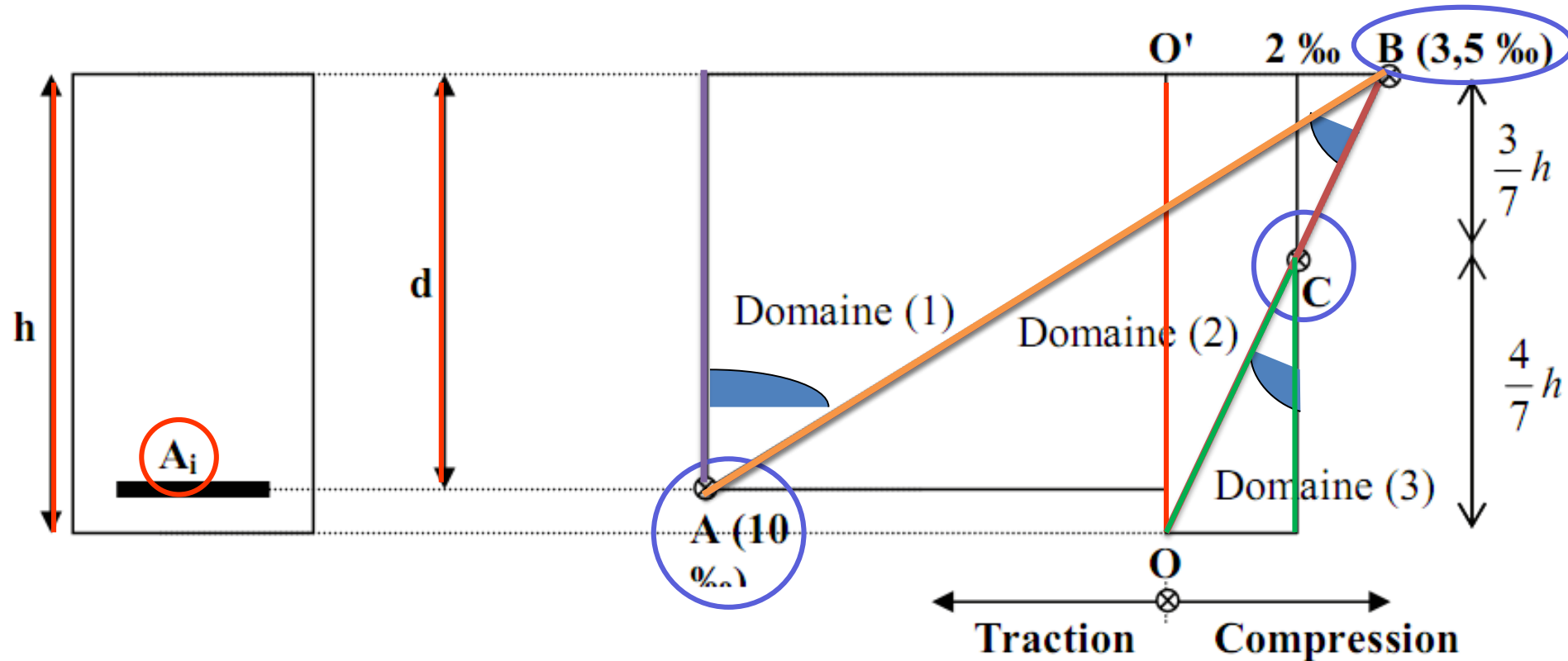
Hypothèse (5) : le diagramme contrainte-déformation du béton pouvant être utilisé dans tout les cas sera le diagramme parabole-rectangle. Lorsque la section n'est pas entièrement comprimée, On peut utiliser le diagramme rectangulaire simplifié définit comme suit :

sur une distance de $0,2.x$ à partir de l'axe neutre, la contrainte sera considérée comme nulle.



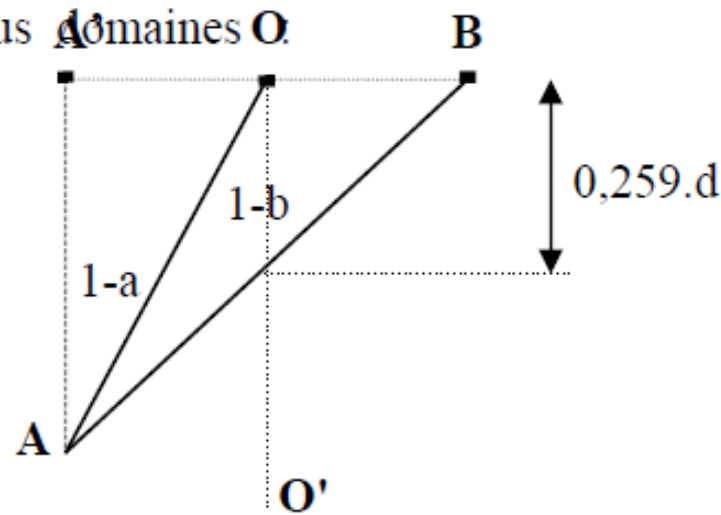
Hypothèse (6) : le raccourcissement unitaire du béton est limité de 3,5‰ en compression et l'allongement unitaire des aciers sera limité à 10‰.

Règle des 3 pivots : Le diagramme de déformation d'une section à l'état limite ultime de résistance représenté par une droite doit obligatoirement passer par l'un des pivots A - B - C, dont la position sera définie sur la figure ci après. Cette règle se fixe comme objectif pour utiliser au mieux le béton et l'acier .

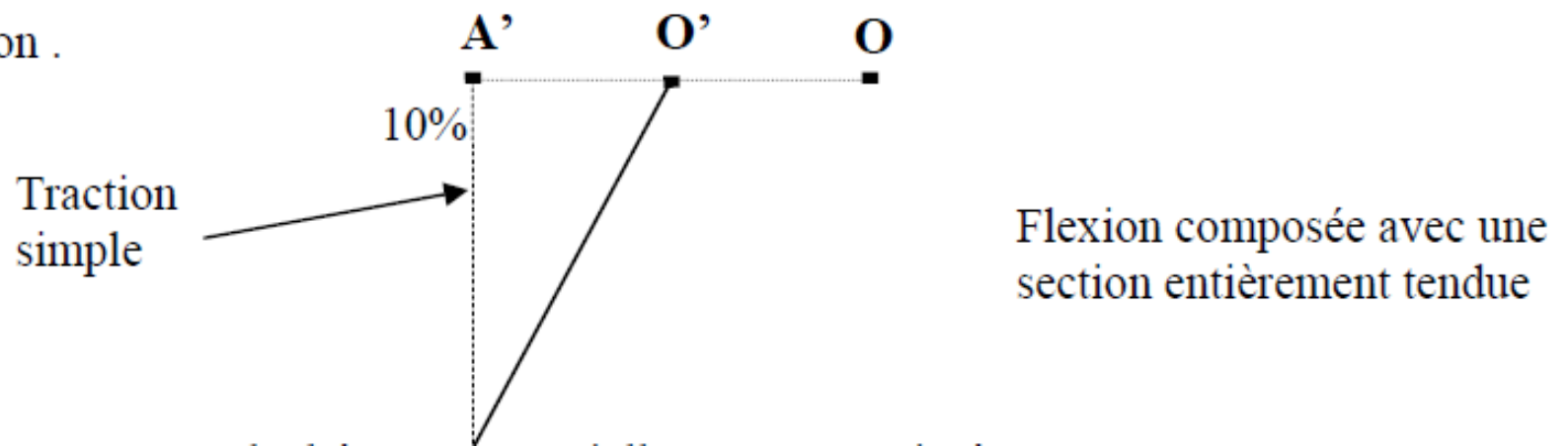


Ce diagramme sera divisé en 3 domaines

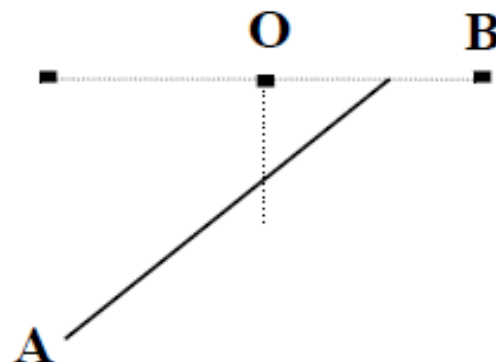
Le domaine (1) : les diagrammes passent par le pivot A qui correspond à un allongement maximum de 10%, les armatures tendues supposées concentré en leur centre de gravité .on distingue deux sous domaines O



le sous domaine 1-a : le béton est toujours tendue et ne participe pas à la résistance de la section .

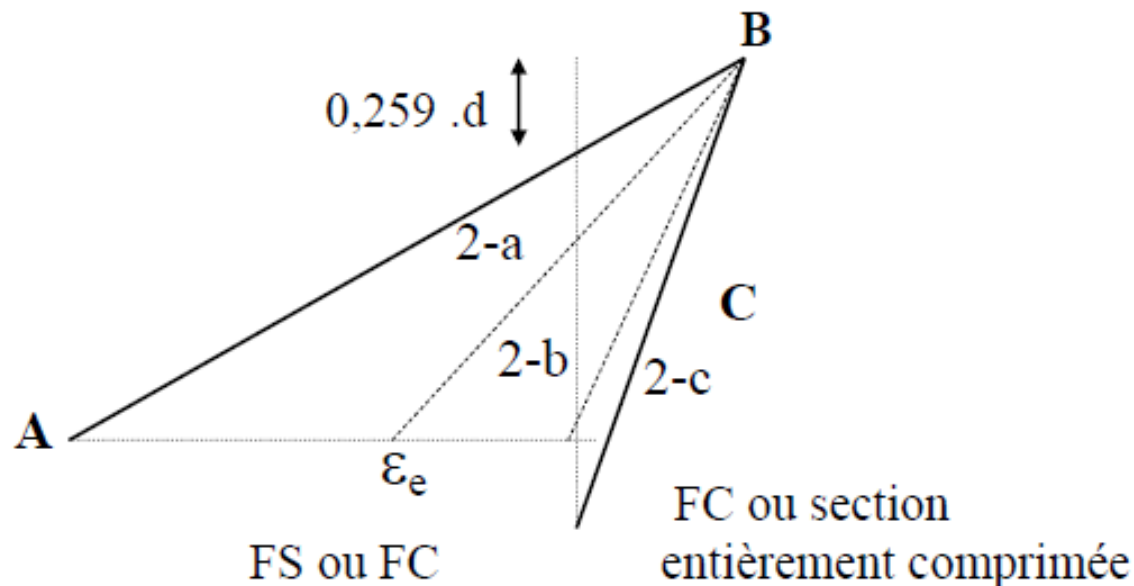


Le sous domaine 1-b : le béton est partiellement comprimé.



Flexion simple ou composée
avec une section
partiellement comprimée.

Le domaine(2) : les diagrammes passent par le pivot **B** qui correspond à un raccourcissement de **3,5%** de la fibre la plus comprimée. On distingue 3 sous domaines.



Sous domaine 2-a : l'allongement des armatures est supérieure à l'allongement élastique (ϵ_{es}) donc les armatures sont plastifiée .

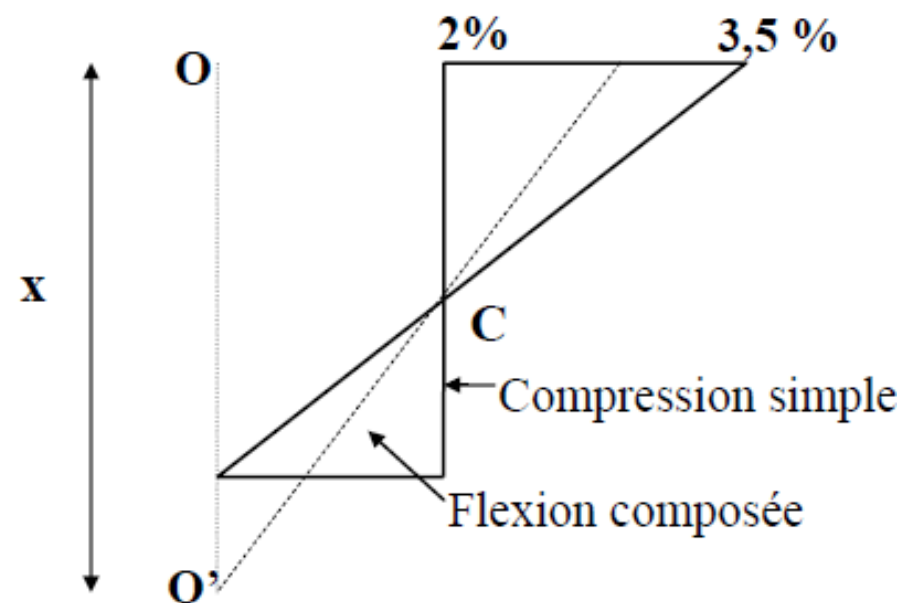
Sous domaine 2-b : L'allongement des armatures tendues est inférieure à l'allongement élastique (ϵ_{es}) et la contrainte dans les aciers sera inférieure à f_c/γ_s .

Sous domaine 2-c : les armatures seront comprimées

Le domaine(3):les diagrammes passent par le pivot qui correspond à un raccourcissement de 2% de la fibre du béton située à $\frac{3}{7}h$ de la fibre supérieure. La section est entièrement comprimée .

le domaine (3) se d'écrit par la condition :

$$\alpha \leq h/d.$$



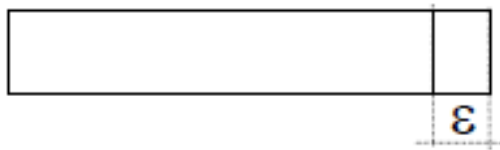
IX.2 Hypothèses à L'E.L.S (durabilité de la structure) :

Hypothèse (1) : les sections droites planes avant déformation restent planes après déformation

→ et il n'y a pas de glissement relatif entre le béton et l'acier.

Hypothèse (2) : le béton tendue est négligé.

Hypothèse (3) : le béton et l'acier seront considérés comme des matériaux linéaires élastiques, donc on leur applique la loi de HOOKE $\Leftrightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon$



$$\left. \begin{array}{l} \sigma_b = E_b \cdot \varepsilon_b \\ \sigma_a = E_a \cdot \varepsilon_a \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon_s = \varepsilon_b \Rightarrow \frac{\sigma_b}{E_b} = \frac{\sigma_s}{E_s}$$

$$\sigma_s = \sigma_b \cdot \frac{E_s}{E_b} \quad \text{On a : } \frac{E_s}{E_b} = n$$

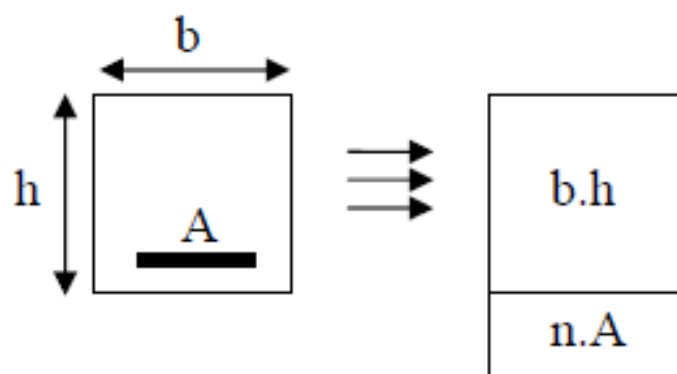
n : coefficient d'équivalence.

$$n = \frac{E_s}{E_b} \begin{array}{l} \longrightarrow 200000 \text{ MPa} \\ \searrow 3700 \sqrt[3]{f_{cj}} \text{ MPa} \\ \searrow 11000 \sqrt[3]{f_{cj}} \text{ MPa} \end{array}$$

donc :

$$n = 15$$

-Homogénéisation de la section : pour pouvoir appliquer au béton armé qui est un matériau hétérogène les règles de RDM pour les corps homogènes, Il sera nécessaire d'homogénéiser la section de béton armé. Une section d'acier travaille n fois plus qu'une même section de béton. Donc une section d'acier $\Leftrightarrow n$ fois qu'une section de béton. Pour homogénéiser la section de béton armé, on remplace la section d'acier par n fois sa section de béton.



Hypothèse(4) : On ne tient pas compte du fluage de béton et du retrait.

Hypothèse(5) : On suppose concentré on leur centre de gravité un ensemble de plusieurs barres.

IX.3 Hypothèses à l'E .L .S de compression du béton :

La contrainte de compression du béton est limitée à **0,6.fc 28**.

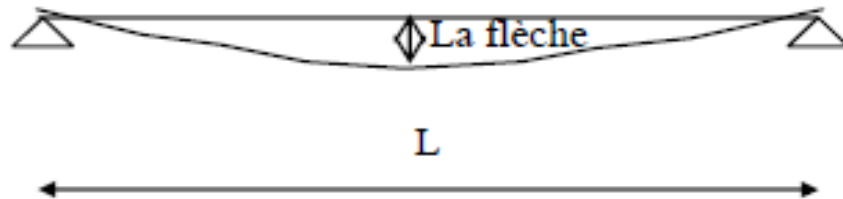
$$\sigma_b \leq 0,6 f_{c28}.$$

Ce risque n'existe que dans le cas où le pourcentage d'armature est élevé.

$$A / b d \geq 2\%.$$

IX.4 Hypothèse à l' E .L .S de déformation :

La flèche d'une poutre ne doit pas dépasser.



$$\frac{L}{500} \quad \text{si} \quad L \leq 5 \text{ m}$$

$$\frac{L}{1000} + 0,5 \text{ cm} \quad \text{si} \quad L > 5 \text{ m}$$

L est exprimée en cm.

IX.5 Hypothèse à l' E .L .S d'ouverture des fissures :

1°-Si la fissuration est peu préjudiciable : Aucune vérification n'est demandée et la contrainte dans les aciers n'est pas limitée. La fissuration est considérée comme peu préjudiciable, lorsque l'élément à vérifier est situé dans les locaux ouverts.

2°. Si la fissuration est préjudiciable : la fissuration considérée comme préjudiciable si les éléments sont exposés aux intempéries (pluie, neige, vent...) ou bien en contact avec l'eau. La contrainte de traction dans les armatures tendues sera limitée à la valeur suivante :

$$\sigma_{st} \leq \min\left(\frac{2}{3}.f_e ; 110\sqrt{\eta.f_{t28}}\right)$$

f_e : limite élastique.

η : coefficient de fissuration. $\Rightarrow \eta = 1$ pour R.L et $\eta = 1,6$ pour H.A.L

f_{t28} : la contrainte du béton à la traction à 28 j.

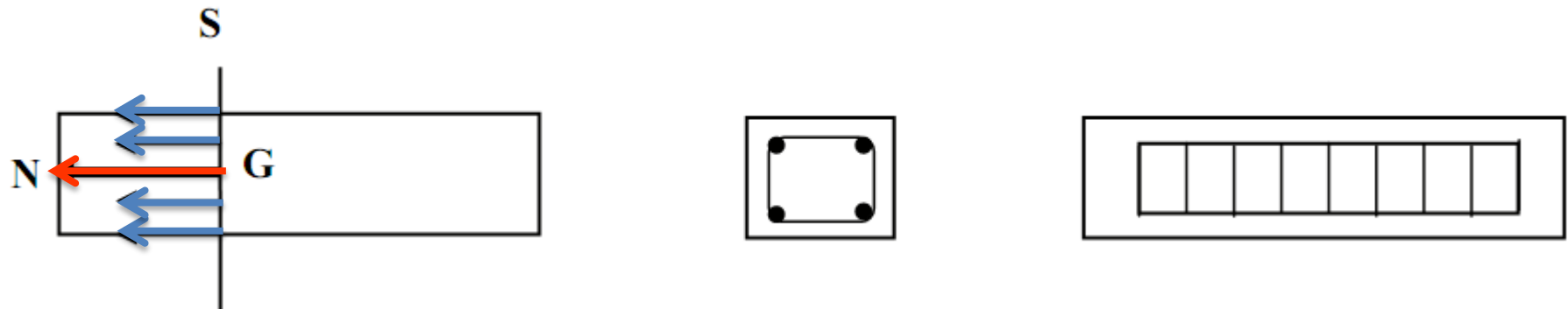
3°. Si la fissuration est très préjudiciable : la fissuration sera considérée comme très préjudiciable si l'élément est soumis à un milieu agressif. La contrainte de traction des armatures tendues sera limitée par la valeur suivante :

$$\sigma_{st} \leq \min\left(\frac{1}{2}.f_e ; 90\sqrt{\eta.f_{t28}}\right)$$

X. La traction simple

Une pièce est sollicitée en traction simple si l'ensemble des forces extérieures agissant d'un même côté d'une section se réduit à une force normale volumique est perpendiculaire à la surface est appliquée au centre de gravité.

Dans chaque section droite le centre de gravité des armatures longitudinales coïncide avec le centre de gravité du béton et avec le point d'application de la force de traction. Les pièces soumises à la traction seront appelées **des tirants**.



X.1- Détermination des armatures longitudinales (traction simple) :

1. Condition de non-fragilité : la section tendue ou fléchie est considérée comme non fragile si les armatures travaillants à leur limite élastique peuvent équilibrer les sollicitations provoquant la fissuration du béton dans cette section.

Les pièces fragiles sont justifiables par le règlement. La condition suivante est appelée « Condition de non fragilité » et doit être vérifiée comme suit :

$$A_{sB} \geq B \cdot \frac{f_{t28}}{f_e}$$

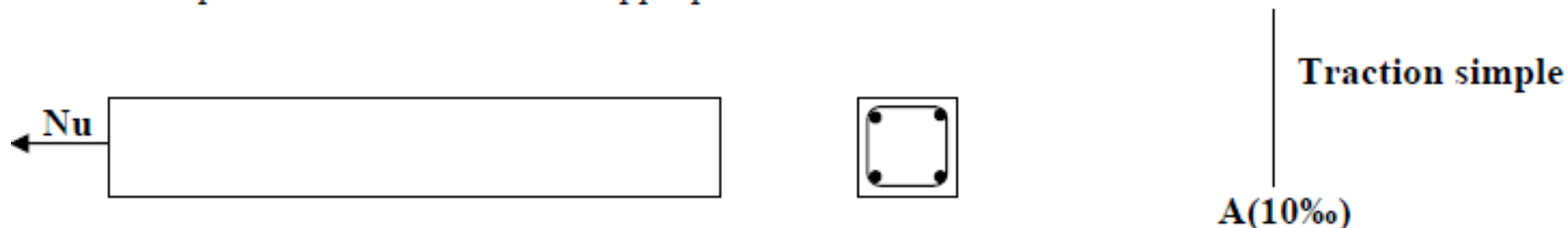
A_{sB} : Armature longitudinale.

B : Section du béton.

Du point de vue résistance B peut être quelconque, mais pour que la pièce ne soit pas fragile, il faut que B vérifie la condition de non fragilité.

Remarque : si B est imposé, il faut que A_s vérifie la condition de non fragilité.

2. E.L.U : Etant donné que le béton est négligé, il résulte que les armatures longitudinales doivent équilibrer à seul les efforts appliqués.



N_u : l'effort de traction à l'E.L.U.

$$\text{D'ou} : A_{su} \geq \frac{N_u}{\sigma_{st} (10\text{‰})} \quad \text{avec} \quad \sigma_{st} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

3. E.L.S : du moment qu'il s'agit de fissuration du béton en traction; nous devons passer par la vérification à l' E.L.S.

N_s : l'effort de traction à l'E.L.S.

$$\text{D'ou} : A_{ss} \geq \frac{N_s}{\sigma_{st}} \quad \text{avec} \quad \sigma_{st} : \text{en fonction de la fissuration.}$$

La section des armatures longitudinales sera la suivante :

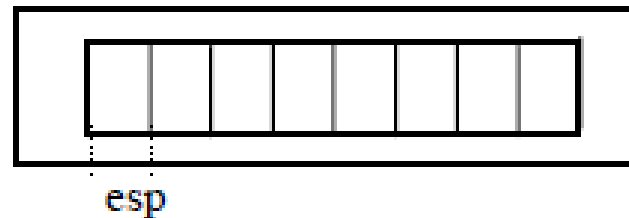
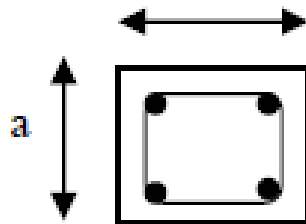
$$A_s = \text{Max} (A_{su} ; A_{ss} ; A_{sB})$$

X.2- Détermination des armatures transversales (traction simple) :

Armatures transversales : elles n'ont aucun rôle dans la résistance à la traction. Leur diamètre est calculé comme suit :

$$\phi_t \geq 0,3 \cdot \phi_L \quad \text{avec} \quad \phi_{\min} = 6 \text{ mm}$$

Espacement : $\text{esp} \leq \text{Min}(40 \text{ cm} ; a + 10 \text{ cm})$ avec a : la plus petite dimension.



Section en cm² de N armatures de diamètre Ø en mm

Ø :	5	6	8	10	12	14	16	20	25	32	40
1	0,20	0,28	0,50	0,79	1,13	1,54	2,01	3,14	4,91	8,04	12,57
2	0,39	0,57	1,01	1,57	2,26	3,08	4,02	6,28	9,82	16,08	25,13
3	0,59	0,85	1,51	2,36	3,39	4,62	6,03	9,42	14,73	24,13	37,70
4	0,79	1,13	2,01	3,14	4,52	6,16	8,04	12,57	19,64	32,17	50,27
5	0,98	1,41	2,51	3,93	5,65	7,70	10,05	15,71	24,54	40,21	62,83
6	1,18	1,70	3,02	4,71	6,79	9,24	12,06	18,85	29,45	48,25	75,40
7	1,37	1,98	3,52	5,50	7,92	10,78	14,07	21,99	34,36	56,30	87,96
8	1,57	2,26	4,02	6,28	9,05	12,32	16,08	25,13	39,27	64,34	100,53
9	1,77	2,54	4,52	7,07	10,18	13,85	18,10	28,27	44,18	72,38	113,10
10	1,96	2,83	5,03	7,85	11,31	15,39	20,11	31,42	49,09	80,42	125,66
11	2,16	3,11	5,53	8,64	12,44	16,93	22,12	34,56	54,00	88,47	138,23
12	2,36	3,39	6,03	9,42	13,57	18,47	24,13	37,70	58,91	96,51	150,8
13	2,55	3,68	6,53	10,21	14,70	20,01	26,14	40,84	63,81	104,55	163,36
14	2,75	3,96	7,04	11,00	15,83	21,55	28,15	43,98	68,72	112,59	175,93
15	2,95	4,24	7,54	11,78	16,96	23,09	30,16	47,12	73,63	120,64	188,5
16	3,14	4,52	8,04	12,57	18,10	24,63	32,17	50,27	78,54	128,68	201,06
17	3,34	4,81	8,55	13,35	19,23	26,17	34,18	53,41	83,45	136,72	213,63
18	3,53	5,09	9,05	14,14	20,36	27,71	36,19	56,55	88,36	144,76	226,2
19	3,73	5,37	9,55	14,92	21,49	29,25	38,20	59,69	93,27	152,81	238,76
20	3,93	5,65	10,05	15,71	22,62	30,79	40,21	62,83	98,17	160,85	251,33

XI. Compression simple

XI.1 Définition :

Un élément est soumis à la compression simple si l'ensemble des forces qui le sollicitent se réduit à un effort normal de compression.



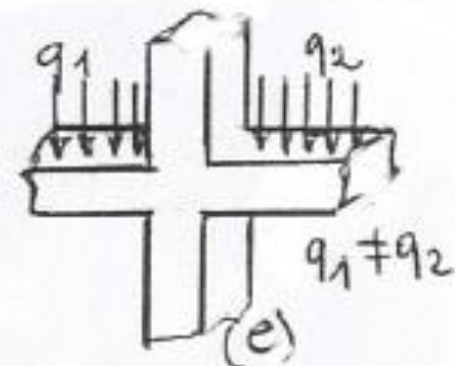
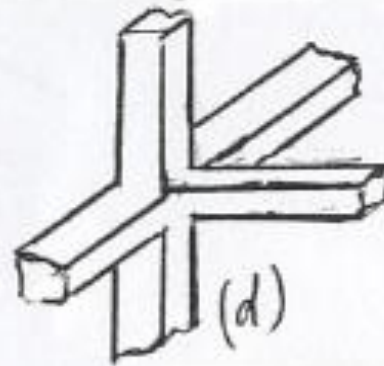
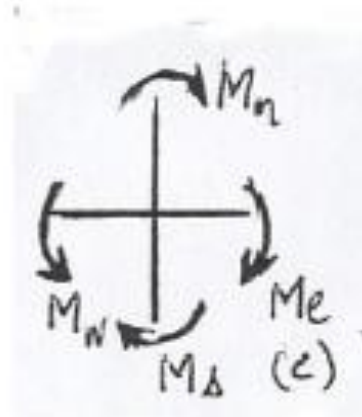
La compression simple implique (comme la traction simple) une **contrainte** (de compression) **constante**.

En pratique, les éléments de construction qui sont sollicités en compression simple sont :

- ✓ Les poteaux et voiles de bâtiments
- ✓ Les voûtes et coques
- ✓ Les piles ou culées de ponts

En réalité, la compression simple n'existe pas. La compression est toujours accompagnée d'une flexion provoquée par :

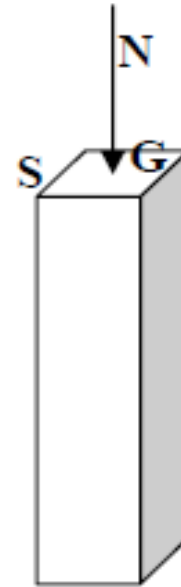
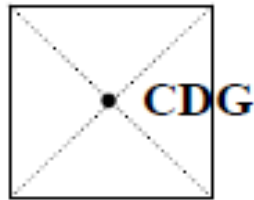
- Des défauts de réalisation ou des imperfections d'exécution d'où création d'une excentricité : ce sont des défauts de verticalité (a) ou de rectitude (b)
- La présence de moments de flexion au niveau des nœuds, à la jonction poutres-poteaux par exemple (c)
- Des différences importantes de part et d'autre d'un poteau par exemple (d) et (e)



XI.2 Compression centrée :

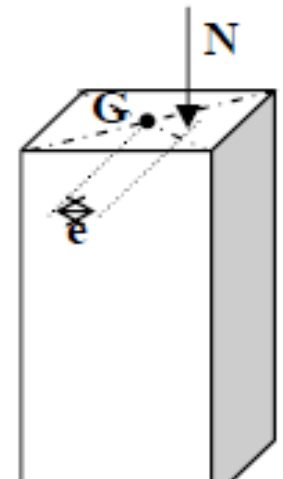
Pour avoir une compression centrée il vérifier les conditions suivantes :

1 - Il faut que le centre de gravité (CDG) soit centré.



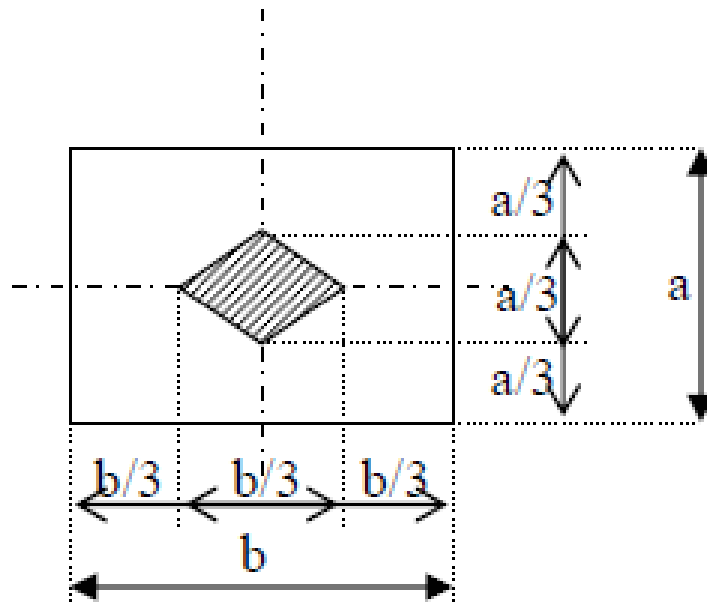
2- Il faut que la force soit appliquée dans le noyau central.

$$e_{\max} = \frac{\text{Dimension du noyau central}}{2}$$

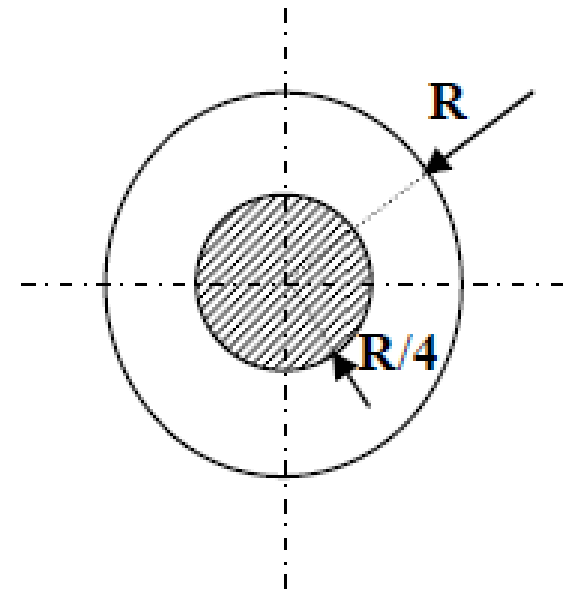


- Définition du noyau central :

Rectangulaire :



Circulaire :



3 - L'élancement est limité à $\lambda \leq 70$.

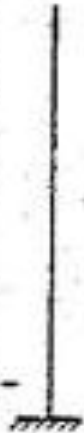
4 - imperfection de rectitude $< \max (1\text{cm} ; 1/500)$

XI.3 Longueur de flambement et élancement:

1- La longueur de flambement (L_f) : Elle dépend de la longueur de l'élément (L) et du type de la liaison.

a- Evaluation de la longueur de flambement et la longueur libre :

-Cas des poteaux isolés :

Longueur de flambement l_f suivant liaisons						
						Légende
						 (a)
						 (b)
						 (c)
$2 l_0$	l_0	l_0	$0,707 l_0$	$0,707 l_0$	$l_0/2$	$\leftarrow l_f$

(a) encastrement, (b) articulation, (c) encastrement et déplacement possible par translation.

-Cas des poteaux dans des bâtiments à étages multiples :

$L_f = 0,7 \cdot L_0$: si le poteau est encastré dans un massif de fondation ou bien assemblé à des poutres de plancher ayant au moins la même raideur (E.I) dans le sens de flambement..
- ou dans le cas de poteaux d'étages multiples.

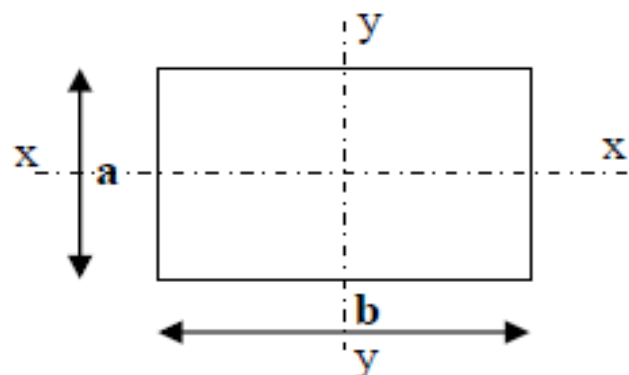
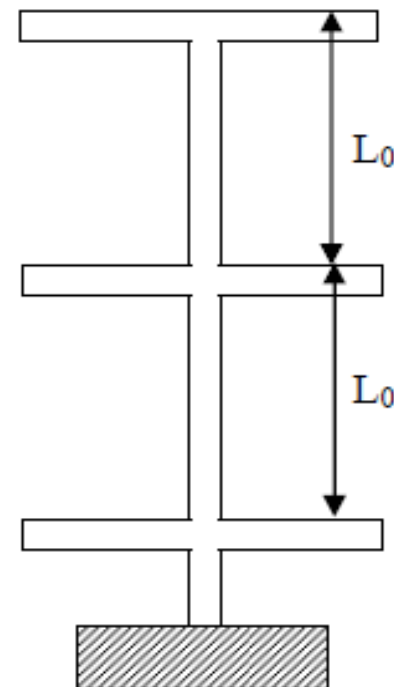
$I_f = I_0$ pour les autres cas (exemple : poteau d'angle)

2- L'élancement de λ :

$$\lambda = \frac{L_f}{i_{\min}}$$

- Définition du rayon de giration : $i_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{B}}$ avec :

B : la section du poteau.

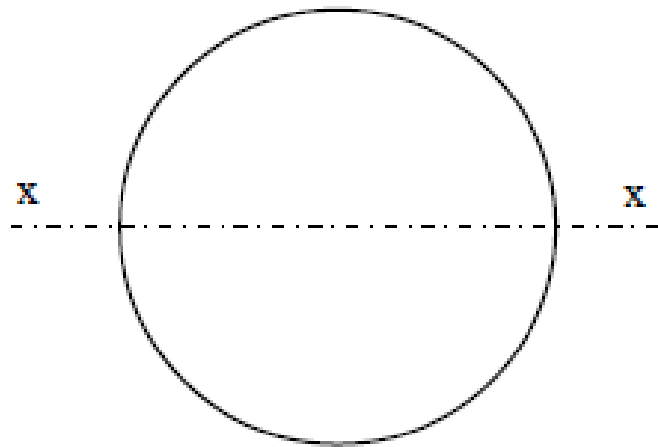


$$I_{xx} = \frac{b \cdot a^3}{12} \quad ; \quad I_{yy} = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

$$a < b \Rightarrow I_{xx} < I_{yy} \Rightarrow i_{xx} < i_{yy}$$

$$\text{d'où : } i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{B}}$$

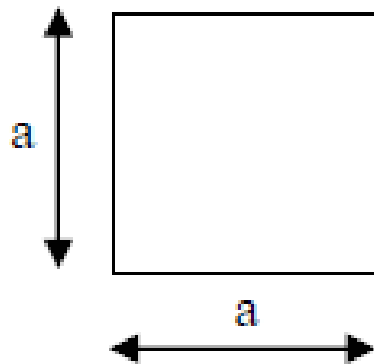
2- Section circulaire :



$$I_{xx} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot D^4}{64}}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}}} = \sqrt{\frac{D^2}{16}} \text{ d'où : } i_x = \frac{D}{4}$$

3- Section carrée :



$$i_{\min} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

XI-4. Etat limite Ultime (E.L.U) :

Soit : N_u : La force extérieure de compression.

B : La surface de l'élément.

F_b : La résistance du béton.

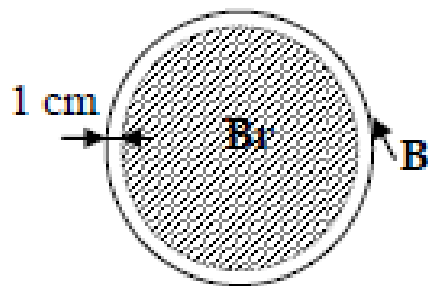
F_e : La résistance de l'acier.

A_{sc} : La section de l'acier.

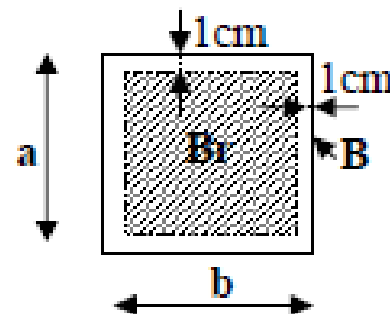
Nous écrivons l'équilibre entre l'action et la résistance comme suit :

$$N_u \leq B \cdot f_b + A_{sc} \cdot \frac{f_e}{\gamma_s}$$
$$\Rightarrow N_u \leq B \cdot \frac{0,85 \cdot f_{c28}}{\gamma_b} + A_{sc} \cdot \frac{f_e}{\gamma_s}$$

Pour plus de sécurité, on minore la résistance pour un coefficient α . Puis on réduit la section en éliminant 1 cm de chaque bordure. On appelle alors la section réduite.



$$Br = \frac{\pi \cdot (D - 0,02)^2}{4}$$



$$Br = (a - 0,02) \cdot (b - 0,02)$$

La loi s'écrit alors : $Nu \leq \alpha \left(Br \cdot \frac{f_{c28}}{0,9 \cdot \gamma_b} + A_{sc} \cdot \frac{fe}{\gamma_s} \right)$

$$\text{- Si } \lambda \leq 50 : \quad \alpha = \frac{0,85}{1 + 0,2 \cdot \left(\frac{\lambda}{35} \right)^2}$$

$$\text{- Si } 50 \leq \lambda \leq 70 : \quad \alpha = 0,6 \cdot \left(\frac{50}{\lambda} \right)^2$$

Remarque : 1- Si la moitié de la charge est appliquée avant 90 jours α sera divisé par 1,1 $\Rightarrow \frac{\alpha}{1,1}$.

2- Lorsque la majorité de la charge est appliquée avant 28 jours, on prend la contrainte du béton f_{cj} et en même temps α sera divisé par 1,2 $\Rightarrow \frac{\alpha}{1,2}$.

XI.5 Détermination des armatures :

1- Armatures longitudinales :

$$Nu \leq \alpha \cdot \left(Br \cdot \frac{f_{c28}}{0,9 \cdot \gamma_b} + A_{sc} \cdot \frac{fe}{\gamma_s} \right)$$

$$\text{d'où :} \quad A_{sc} \geq \left(\frac{Nu}{\alpha} - \frac{Br \cdot f_{c28}}{0,9 \cdot \gamma_b} \right) \cdot \frac{\gamma_s}{fe}$$

2- Pourcentage d'armatures minimum :

Le C.B.A exige : $A_{scmin} = 0,1 \%$ de la section du béton avec $\varnothing_{min} = 12 \text{ mm}$.

Le R.P.A exige : $A_{scmin} = 0,7 \%$. B $\rightarrow$ Zone I

$A_{scmin} = 0,8 \%$. B $\rightarrow$ Zone IIa

$A_{scmin} = 0,9 \%$. B $\rightarrow$ Zones IIb et III

3- Pourcentage d'armatures maximum :

Le C.B.A et le R.P.A exigent :

$A_{scmax} = 4 \%$ de la section du béton en dehors de la zone de recouvrement..

$A_{scmax} = 6 \%$ de la section du béton dans la zone de recouvrement..

Alors pour les armatures longitudinales nous avons trois cas :

1- $A_{min} < A_{sc \text{ calculée}} < A_{max} \Rightarrow$ On ferraille avec A_{sc} calculée.

2- $A_{sc \text{ calculée}} < A_{min} \Rightarrow$ On ferraille avec A_{min} avec $\varnothing_{min} = 12 \text{ mm}$.

3- $A_{sc \text{ calculée}} > A_{max} \Rightarrow$ On augmente la section du béton B et on recalcule un nouveau A_{sc} .

4- Armatures transversales : elles n'ont aucun rôle de résistance, le rôle principale c'est d'empêcher le flambement des armatures longitudinales.

Le diamètre sera : $\phi_t = \frac{\phi_l}{3}$

L'espacement entre deux cadre : $\text{esp} = \text{Min}\{40\text{cm} ; a+10\text{cm} ; 15.\phi_{l\text{min}}\} \dots \text{C.B.A}$

Dans la zone nodale :

$\text{esp} \leq \text{Min}\{15\text{cm} ; 10\phi_{l\text{min}}\} \rightarrow \text{Zones I et IIa} \dots \text{R.P.A}$

$\text{esp} \leq 10\text{cm} \rightarrow \text{Zones IIb et III} \dots \text{R.P.A}$

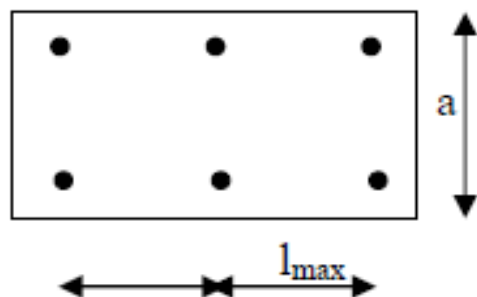
Dans la zone courante :

$\text{esp} \leq 15\phi_{l\text{min}} \rightarrow \text{Zones I et IIa} \dots \text{R.P.A}$

$\text{esp} \leq \{b/2 ; a/2 ; 10\phi_{l\text{min}}\} \rightarrow \text{Zones IIb et III} \dots \text{R.P.A}$

5- Dispositions constructives :

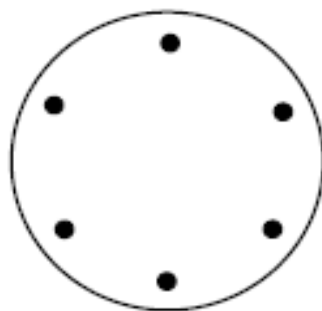
-Section rectangulaire :



$$l_{\max} < \text{Min} (40 ; a+10) \text{ cm} \Rightarrow \text{C.B.A}$$

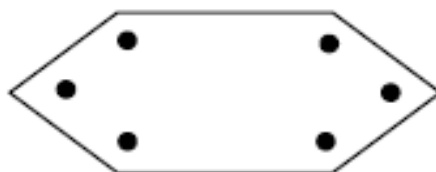
$$l_{\max} < \left\{ \begin{array}{l} 25\text{cm en zones I et IIa} \\ 20\text{cm en zones IIb et III} \end{array} \right\}$$

-Section rectangulaire :



un minimum de 6 barres de $\varnothing 12$.

-Section polygonale :



une barre à chaque sommet