II.1. Introduction : Commande bang-bang

Il s'agit des commandes à temps minimal avec des contraintes intervalle sur les commandes. La commande optimale est alors toujours égale au maximum ou au minimal

- **Démonstration**:
  - Système linéaire à une entrée $\dot{x} = Ax + bu, x(t_0) = x_0$.
  - Coût $J = \int_{t_0}^{t_f} dt$ (temps minimal).
  - Contrainte sur l'entrée $-1 \leq u \leq 1$.
  - Contrainte sur l'état final $x\left(t_f\right) = 0$
- **Application du principe du maximum**
  - Le Hamiltonien est $H(x, u, \lambda, t) = 1 + \lambda^T \dot{x} = 1 + \lambda^T(Ax + bu)$
  - La commande minimisant le critère est $u^* = \min_{|u| \leq 1} H(x, u, \lambda, t) = -sign(b^T \lambda)$
  - L'équation adjointe est $-\lambda = \dfrac{\partial H}{\partial x} = A^T \lambda$
  - Equation d'état $\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax - bsign(b^T \lambda)$
- **Exemple illustratif : intégrateur double**

$\dot{x_1} = x_2, \dot{x_2} = u$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- **Résolution :**

$$H(x, u, \lambda, t) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

$$u^* = -sign(\lambda_2)$$

$$\lambda_{1=}c_1$$

$$\lambda_{2=}c_1 t + c_2$$

$$x_2 = ut + c_3 = \begin{cases} t + c_3 & si\ u = 1 \\ -t + c_3 & si\ u = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = u\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 & si\ u = 1 \\ -\dfrac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 & si\ u = -1 \end{cases}$$

II.2. Problématique

On remarque que la commande optimale u^* dépend du signe de $\lambda_2(t)$, c'est-à-dire :

$$u^* = \begin{cases} 1 \ si\ \lambda_2 < 0 \\ -1\ si\ \lambda_2 > 0 \\ 0 \ \ si\ \lambda_2 = 0 \ \ (rejetée\ si\ \forall t \in R^+ \ \ et\ acceptée\ si\ t = t_c) \end{cases}$$

Cependant $\lambda_2(t)$ peut changer son signe à l'instant $t_c = -c_2/c_1$ (t_c temps de commutation). Alors la commande optimale change sa valeur de +1 à -1 ou de -1 à +1.

Deux problèmes sont posés :

1- Point de commutation $x_c = (x_{1c}, x_{2c})$
2- La trajectoire de départ ainsi la trajectoire finale

Pour résoudre ces problèmes, on va étudier l'évolution des trajectoires d'état dans le plan x_1, x_2

Où $x_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}x_2^2 + c \quad\ \ si\ u = 1 \\ -\frac{1}{2}x_2^2 + c \quad si\ \ u = -1 \end{cases}$

Pour le sens des trajectoires est déduit par la variation de x_2 c'est-à-dire $\frac{\partial x_2}{\partial t} = u$

II.3. Objectifs

L'objectif de TP est d'écrire un programme qui permet de

1- Tracer les trajectoires d'état pour $c = -100 : 10 : 100$.
2- Tracer les trajectoires finales
3- trouver le point de commutation $x_c = (x_{1c}, x_{2c})$ si $\lambda_2(t)$ changer son signe
4- Tracer les trajectoires de départ et finales dans une nouvelle figure.

II.4. Applications

$x(0) = (4{,}5)$;

$x(0) = (3, -0.5)$;

$x(0) = (4, -5)$;

$x(0) = (-5, -5)$;

$x(0) = (-3, -0.5)$;

$x(0) = (-4{,}4)$.