

Chapitre I

Rappel sur le Calcul Matriciel

I.1. Définition : On appelle une matrice A de dimension $m \times n$ le tableau rectangulaire à m lignes et n colonnes de nombres réels dits éléments de la matrice.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} est l'élément de la matrice A situé à l'intersection de la ligne i et la colonne j .

Si $m = n$ la matrice est dite **carrée**. Dans le cas d'une matrice carrée, les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sont appelés les éléments diagonaux.

I.2. Matrices particulières

- **Matrice nulle :** c'est une matrice $m \times n$ dont tous les éléments sont nuls, on la note $0_{m \times n}$ ou tout simplement 0.
- **Matrice diagonale :** c'est une matrice carrée dont tous les éléments sont nuls sauf ceux situés sur la diagonale.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matrice identité :** La matrice identité est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont égaux à 1.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matrice triangulaire supérieure :** c'est une matrice carrée dont tous les éléments sont nuls sauf ceux sur la diagonale et au dessus de la diagonale.

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matrice triangulaire inférieure :** c'est une matrice carrée dont les éléments sont nuls sauf ceux sur la diagonale et au dessous de la diagonale.

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn-1} & t_{nn} \end{bmatrix}$$

I.3. Somme de deux matrices : on peut sommer deux matrices s'ils ont la même taille. soient deux matrices A et B de même taille $m \times n$. On définit leur somme par la matrice $C = A + B$ de taille $m \times n$, avec :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

I.4. Le produit matriciel : Le produit AB de deux matrices A et B est défini seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B :

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $m \times n$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $n \times p$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $m \times p$ dont les éléments c_{ij} sont définis par

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$$

I.5. Produit d'une matrice par un scalaire

Le produit d'une matrice A par un scalaire λ est la matrice de même taille que A obtenue en multipliant tous les éléments de A par λ .

Soit la matrice $A = (a_{ij})$ de dimension $m \times n$ et le scalaire λ . Alors le produit $C = \lambda A = A\lambda$ est une matrice $m \times n$ dont les éléments c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

I.6. Exponentielle d'une matrice

Par analogie au cas scalaire, on définit l'exponentielle d'une matrice carrée A d'ordre n de la façon suivante

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots$$

I.7. Règles du calcul matriciel

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $A + 0 = A$
- $AI = IA = A$
- $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$
- $AB \neq BA$, le produit de deux matrices n'est pas nécessairement commutatif.

I.8. L'inversion des matrices

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que $AB = I$ et $BA = I$, on dit que A est inversible et on dit que B est l'inverse de A .

Si A est une matrice inversible, son inverse est noté A^{-1} . On a donc $AA^{-1} = I$ et $A^{-1}A = I$.

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $A^{-m} = (A^m)^{-1} = A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1} = (A^{-1})^m$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ avec $\lambda \neq 0$

I.9. Transposé d'une matrice

Soit A une matrice de taille $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

On appelle matrice transposée de A , la matrice A^T de taille $n \times m$ définie par :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

On a :

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ qui sera notée A^{-T} .

Exemple : les matrices suivantes sont symétriques

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 6 & -1 \\ 8 & -7 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -4 & 6 & -7 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

I.10. Matrice symétrique et matrice antisymétrique

- On dit qu'une matrice carrée A est **symétrique** si : $A^T = A$

Exemples : les matrices suivantes sont symétriques :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad I_n, \quad 0_{n \times n}$$

- On dit qu'une matrice carrée A est **antisymétrique** si : $A^T = -A$

Exemples : les matrices suivantes sont antisymétriques :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_{n \times n}$$

I.11. Matrice échelonnée

Définitions

- le **pivot** d'une ligne d'une matrice est le premier élément non nul de cette ligne.
- Une matrice A est **échelonnée** si les deux conditions suivantes sont vérifiées
 - 1) Le pivot d'une ligne est toujours situé à droite du pivot de la ligne précédente.
 - 2) Toutes les lignes nulles sont situées sous les lignes qui ont des pivots.
- Une matrice A est **échelonnée réduite** si elle est échelonnée et si elle vérifie encore les deux conditions suivantes :
 - 1) Tous les pivots de la matrice valent 1.
 - 2) Tous les éléments de chaque colonne qui contient un pivot sont nuls sauf le pivot.

Exemples : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

La matrice A n'est pas échelonnée et la matrice B est échelonnée réduite.

I.12. Opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont de trois types :

- 1) Permutation de 2 lignes.
- 2) Multiplication d'une ligne par une constante non nulle.
- 3) Ajout d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

I.13. Matrices élémentaires

À chaque opération élémentaire est associée une **matrice élémentaire** E telle que multiplier une matrice A à gauche par cette matrice donne le même effet que l'opération. Chacune des trois matrices élémentaires est obtenue par une seule opération élémentaire sur les lignes de la matrice identité.

- 1) Permutation des 2 lignes i et j : la matrice élémentaire est :

$$E_{ij} = \begin{matrix} & & i & & j & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ i & & & & & & \\ & & & & & & \\ j & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- 2) Multiplication d'une ligne j par une constante non nulle.

$$E_j(\alpha) = \begin{matrix} & & j & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ j & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- 3) Ajout α fois la ligne j à la ligne i .

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{matrix} & & j & & \\ & & & & \\ & & & & \\ i & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

I.14. Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot

La méthode du pivot sert à trouver l'inverse de toute matrice carrée A d'ordre n . Dans ce cas, on augmente la matrice A de la matrice identité d'ordre n et on effectue des opérations élémentaires de lignes pour passer de $[A|I_n]$ à $[I_n|B]$. Si cette transformation est possible, on obtient une matrice B qui est l'inverse de la matrice A ($B = A^{-1}$).

Exemple : Calculer l'inverse de la matrice : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 [A|I_n] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{3}{7}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{3}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & 1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{7}{20}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} & \frac{7}{20} \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{7}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{20} & \frac{2}{4} & \frac{10}{20} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} & \frac{7}{20} \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_2 - \frac{4}{3}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} & \frac{7}{20} \end{array} \right] \\
 \text{Donc ;} \quad A^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} & \frac{7}{20} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

I.15. Déterminant

Le **déterminant** d'une matrice A est un nombre associé à cette matrice désigné par $|A|$ ou $\det(A)$. Dans le cas général d'une matrice A d'ordre n , le déterminant de A est défini par la règle des cofacteurs sur la 1^{ère} ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{1j}C_{1j} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} |A_{1j}|$$

On peut aussi déterminer le déterminant par la règle des cofacteurs sur la ligne i comme suit :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}C_{ij}$$

Ou encore par la règle des cofacteurs sur la colonne j par :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}C_{ij}$$

- Si A est d'ordre 1, $A = [a_{11}]$, alors $\det(A) = a_{11}$
- Si A est d'ordre 2, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, alors $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- Si A est d'ordre 3, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{j+1} a_{1j} |A_{1j}| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{23} + a_{13}a_{32}a_{11} - a_{13}a_{31}a_{22} \end{aligned}$$

Voici une méthode simple (**règle de Sarrus**) pour calculer le déterminant d'une matrice 3×3 ; on recopie les colonnes 1 et 2 à droite de la colonne 3 comme suit :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{23} + a_{13}a_{32}a_{11} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

I.16. Sous-matrice

une sous-matrice A_{ij} de la matrice A est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A .

I.17. Mineur

- Un mineur d'ordre p d'une matrice A d'ordre $m \times n$ est le déterminant de la sous-matrice à p lignes et p colonnes.
- Le mineur de l'élément a_{ij} d'une matrice carrée A d'ordre n est le déterminant de la sous-matrice A_{ij} .

$$M_{ij} = |A_{ij}|$$

I.18. Cofacteur

Le cofacteur c_{ij} de l'élément a_{ij} d'une matrice A est défini par :

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

I.19. Matrice des cofacteurs

La matrice des cofacteurs C d'une matrice carrée A est défini par :

$$(C)_{ij} = (Cof(A))_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

I.20. Matrice Adjointe

La matrice adjointe $Adj(A)$ d'une matrice carrée A est la transposée de la matrice des cofacteurs de A donnée par :

$$Adj(A) = (Cof(A))^T = C^T$$

I.21. Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode des cofacteurs

L'inverse d'une matrice est donné par la formule suivante :

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{\det(A)}, \quad \text{avec:} \quad Adj(A) = (Cof(A))^T$$

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 1 \\ 0 & 10 & -5 \\ 8 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \quad Det(A) = 3(-4) - 2(6) + 4(1) = -20$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{\det(A)} = \frac{-1}{20} \begin{bmatrix} -4 & -6 & 1 \\ 0 & 10 & -5 \\ 8 & 2 & -7 \end{bmatrix}^T = \frac{-1}{20} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 \\ -6 & 10 & 2 \\ 1 & -5 & -7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & -0.4 \\ 0.3 & -0.5 & -0.1 \\ -0.05 & 0.25 & 0.35 \end{bmatrix}$$

I.22. Rang d'une matrice

Les définitions du rang suivantes sont toutes vraies.

- Le **rang** d'une matrice A , noté $rang(A)$ ou $rg(A)$, est la dimension de l'espace image de A , $Im(A)$ définit par : $Im(A) = \{y/Ax = y\}$

$$rang(A) = \dim(Im(A))$$

- Le **rang** d'une matrice A est le nombre maximal de lignes ou de colonnes linéairement indépendants de A .
- Le **rang** d'une matrice A est l'ordre du plus grand mineur non nul de A .

I.23. Valeurs propres et vecteurs propres

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On appelle valeur propre et vecteur propre d'une matrice A le scalaire λ et le vecteur X respectivement tel que :

$$AX = \lambda X \text{ avec } X \neq 0$$

On a donc

$$\lambda X - AX = 0 \Leftrightarrow (\lambda I - A)X = 0$$

Ce système admet une solution non triviale ($X \neq 0$) si et seulement si : $\det(\lambda I - A) = 0$.

- L'équation $\det(\lambda I - A) = 0$ est appelée **équation caractéristique** de A .
- $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ est appelé **polynôme caractéristique** de A . $P(\lambda)$ est d'ordre n , il possède n zéros réels ou complexes, simples ou multiples.
- A possède donc au plus n valeurs propres distinctes.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

L'équation caractéristique : $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ a deux racines : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$.

Les valeurs propres de la matrice A sont donc : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$

Vecteurs propres :**(1)** Pour $\lambda_1 = -1$

$$(\lambda I - A)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (-1) - 1 & -2 \\ -3 & (-1) - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -x_2, \text{ soit } \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \end{cases}$$

D'où les vecteurs propres tV_1 avec $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **(2)** Pour $\lambda_2 = 4$

$$(\lambda I - A)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (4) - 1 & -2 \\ -3 & (4) - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x_1 = 2x_2, \text{ soit } \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 3t \end{cases}$$

D'où les vecteurs propres tV_2 avec $V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **I.24. Diagonalisation d'une matrice**

Soit A une matrice carré d'ordre n . On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice P d'ordre n inversible et une matrice D diagonale d'ordre n telles que :

$$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

$$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow A[P_1 \quad \dots \quad P_n] = [P_1 \quad \dots \quad P_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [AP_1 \quad \dots \quad AP_n] = [\lambda_1 P_1 \quad \dots \quad \lambda_n P_n] \Leftrightarrow \begin{cases} AP_1 = \lambda_1 P_1 \\ \vdots \\ AP_n = \lambda_n P_n \end{cases}$$

Donc les λ_i et P_i ($i = 1, \dots, n$) sont respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

On déduit que : Une matrice A d'ordre n est diagonalisable si elle a n vecteurs propres distincts ($P_1, \dots, P_n$).

Propriétés :

– Si on a matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix}$ alors

$$\blacksquare D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2^k \end{bmatrix}.$$

$$\blacksquare e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

– Si une matrice A est diagonalisable c-à-d : $A = PDP^{-1}$ alors :

$$\blacksquare A^k = PD^k P^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2^k \end{bmatrix} P^{-1}.$$

$$\blacksquare e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Démonstration

- $$\begin{aligned}
 e^{Dt} &= I + Dt + \frac{D^2 t^2}{2!} + \dots \frac{D^i t^i}{i!} + \dots \\
 &= I + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \dots \begin{bmatrix} \lambda_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2^i \end{bmatrix} \frac{t^i}{i!} + \dots \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\lambda_2^2 t^2}{2!} \end{bmatrix} + \dots \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^i t^i}{i!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\lambda_2^i t^i}{i!} \end{bmatrix} + \dots \\
 &= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} + \dots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + \lambda_2 t + \frac{\lambda_2^2 t^2}{2!} + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
 A^k &= (PDP^{-1})^k = \overbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots PDP^{-1}(PDP^{-1})}^{k \text{ fois}} = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \dots (P^{-1}P)P \\
 &= P \overbrace{DD \dots D}^{k \text{ fois}} P^{-1} = PD^k P^{-1}.
 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
 e^{At} &= e^{PDP^{-1}t} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \frac{A^i t^i}{i!} + \dots = I + PDP^{-1}t + \frac{(PDP^{-1})^2 t^2}{2!} + \dots \frac{(PDP^{-1})^i t^i}{i!} + \dots \\
 &= PP^{-1} + e^{PDP^{-1}t}t + \frac{PD^2 P^{-1} t^2}{2!} + \dots \frac{PD^i P^{-1} t^i}{i!} + \dots \\
 &= P \left(I + e^{Dt}t + \frac{D^2 t^2}{2!} + \dots \frac{D^i t^i}{i!} + \dots \right) P^{-1} = P e^{Dt} P^{-1}.
 \end{aligned}$$

I.25. Théorème de Cayley Hamilton

Toute matrice A vérifie son équation caractéristique.

L'équation caractéristique de la matrice A est :

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Alors

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$$

Résultat

On a ;

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0 \Rightarrow A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} \dots - a_1A - a_0I$$

Donc toute puissance $k \geq n$ de A (A^k) peut être exprimé en fonction des puissances de A inférieure à

n (A^i avec $i = 1, 2, \dots, n-1$).

$$A^k = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} \dots + b_1A + b_0I, \quad k \geq n$$