CHAPITRE II

REPRESENTATION D'ETATS DES SYSTEMES LINEAIRES

II.1. INTRODUCTION

La théorie et les méthodes de commande classiques sont basées sur une simple description d'entrée-sortie du système, généralement exprimée comme une fonction de transfert ; ces méthodes n'utilisent aucune connaissance de la structure interne du système, de plus cette représentation est obtenue en supposant les conditions initiales nulles (système initialement au repos) qui n'est pas toujours vrai et les conditions initiales jouent souvent un rôle très important dans l'étude des systèmes dans le domaine temporel où la réponse dépend du passé du système, de plus cette représentation s'adapte mal aux systèmes multivariables (MIMO : Multiple-Input Multiple-Output) et se limite généralement aux systèmes monovariables (SISO: Single-Input Single-Output), et ne permettent qu'un contrôle limité du comportement en boucle fermée.

Les techniques de commande moderne des systèmes font appel un type de modélisation beaucoup plus « riche » dite représentation d'état (ou représentation interne) qui permet de pallier aux difficultés de la fonction de transfert. Il s'agit d'un modèle qui prend en compte la dynamique interne (état) du système et ne se limite pas à la description d'un comportement de type boite noire (entrée/ sortie) et il tient en compte des conditions initiales. Par ailleurs, bien que ce cours soit consacré à l'étude des systèmes linéaires invariants, signalons que le formalisme d'état est universel ; il s'adapte bien aux systèmes SISO qu'aux systèmes MIMO, aux systèmes variants et invariants, aux systèmes linéaires et non linéaires, ….

II.2. REPRESENTATION D'ETAT

L'état d'un système à l'instant t_0 représente l'ensemble des informations que l'on doit posséder sur le système à cet instant pour pouvoir déterminer son évolution ultérieure ($t > t_0$), à partir de la seule connaissance de l'entrée ultérieure (pour $t > t_0$).

La représentation d'état modélise la dynamique du système par un ensemble d'équations différentielles de premier ordre couplées avec les variables d'état, et un ensemble d'équations algébriques combinant les variables d'état pour donner les variables de la sortie. Les systèmes dynamiques rencontrés en automatique peuvent être décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t)\end{cases}$$

Si les fonctions f et g sont linéaires vis-à-vis $x(t)$ et $u(t)$ et ne dépendent pas explicitement du temps t, alors le système est linéaire et invariant, et sa représentation d'état prend la forme :

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t)\end{cases}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ Vecteur de sortie

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice d'état ou matrice dynamique,

$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrice d'entrée ou de commande,

$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ matrice de sortie ou d'observation,

$D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ matrice de couplage ou matrice de liaison entrée-sortie.

II.3. REPRESENTATION ANALOGIQUE DES MODELES D'ETAT

Soit la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Le schéma analogique de cette représentation est le suivant :

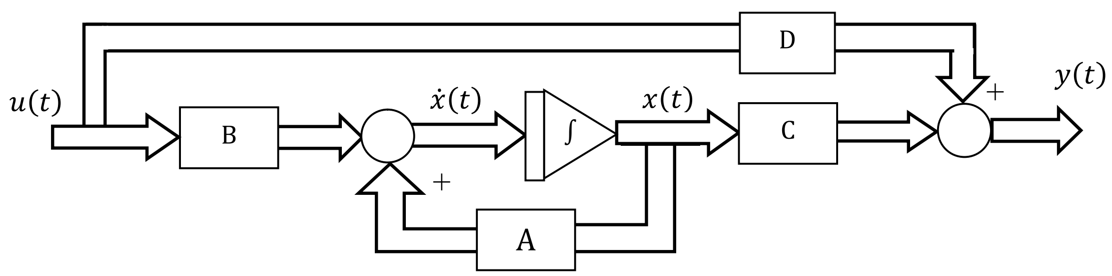

Fig.2.1 Schéma analogique d'un modèle d'état.

Exemple : Pour la représentation d'état du moteur à CC :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ b_0\end{bmatrix}u(t),\ y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Le schéma analogique correspondant est le suivant :

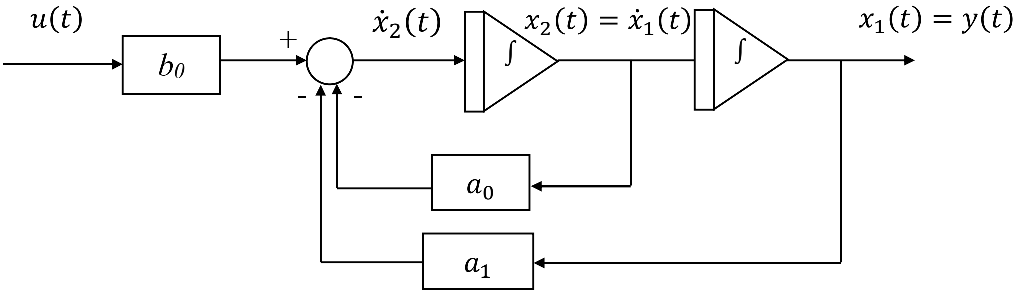

Fig.2.2 Schéma analogique du MCC.

II.4. RESOLUTION DE L'EQUATION D'ETAT

Considérons un système d'ordre *n* représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned} \tag{2.1}$$

Il s'agit de trouver l'expression de la sortie $y(t)$ à une entrée $u(t)$.

4.1. Réponse libre ($\mathbf{u(t) = 0}$)

Il s'agit ici de voir comment le système réagit librement à la seule condition initiale et en absence de l'entrée.

- **Cas d'un système du 1^er ordre : Forme scalaire:**

Soit le système du 1^erordre ($n = 1$) et a une seule variable d'état $x(t)$ donné par l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t)\\ y(t) &= cx(t) + du(t)\end{aligned} \tag{2.2}$$

où a, b, c et d sont des scalaires constants.
le système autonome ($u(t) = 0$) est donc :

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$

$$\Rightarrow\ \dot{x}(t) - ax(t) = 0\ \Rightarrow -e^{a\,t}\dot{x}(t) - e^{-a\,t}ax(t) = 0\ \Rightarrow \frac{d\left(e^{-a\,t}x(t)\right)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{d\left(e^{-a\,\tau}x(\tau)\right)}{d\tau}d\tau = 0 \Rightarrow \left[e^{-a\,\tau}x(\tau)\right]_0^t = 0\ \Rightarrow e^{-a\,t}x(t) - x(0) = 0 \Rightarrow e^{-a\,t}x(t) = x(0)$$

Finalement, la réponse libre est:

$$x(t) = e^{a\,t}x(0) \tag{2.3}$$

- **Cas d'un système d'un système d'ordre élevé : Forme matricielle**

$$\dot{x} = Ax \tag{2.4}$$

Par analogie au cas scalaire, on définit l'exponentielle d'une matrice carrée A d'ordre n de la façon suivante

$$e^{A}\ = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots\frac{A^k}{k!} + \cdots$$

Donc :

$$e^{A\,t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots\frac{A^kt^k}{k!} + \cdots$$

On peut monter que la solution de l'ED (2.4) est : $x(t) = e^{A\,t}x(0)$
Effectivement, on a :

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{A\,t}x(0)\right) = \frac{d}{dt}\left(\left(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots\frac{A^kt^k}{k!} + \cdots\right)x(0)\right)$$

$$= \left(A + A^2t^2 + \frac{A^3t^3}{2!} + \cdots \frac{A^{k+1}t^{k+1}}{k!} + \cdots\right)x(0) = A\underbrace{\left(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots \frac{A^kt^k}{k!} + \cdots\right)x(0)}_{x\,(t)} = Ax(t)$$

La matrice $\Phi(t) = e^{At}$ est dite *matrice de transition d'état*.

$$x(t) = \Phi(t)x(0) \tag{2.4}$$

4.2. Réponse forcée ($\mathbf{u(t) \neq 0}$):

Il s'agit ici de voir comment le système réagit en présence de l'entrée.

- **Cas d'un système du 1er ordre : Forme scalaire:**

On a :

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) - ax(t) = bu(t) \Rightarrow e^{-at}\dot{x}(t) - e^{-a}\ ax(t) = e^{-at}bu(t)$$
$$\Rightarrow \frac{d\left(e^{-a}\ x(t)\right)}{dt} = e^{-at}bu(t) \Rightarrow \int_0^t \frac{d\left(e^{-a\tau}x(\tau)\right)}{d\tau}d\tau = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$
$$\Rightarrow [e^{-a\,\tau}x(\tau)]_0^t = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \ \Rightarrow e^{-a\,t}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$
$$\Rightarrow e^{-a\,t}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \Rightarrow x(t) = e^{at}x(0) + e^{at}\int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau$$

Alors, on a :

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \tag{2.5}$$

en remplaçant dans l'équation de la sortie, on obtient la réponse totale du système :

$$y(t) = \underbrace{cx(0)e^{at}}_{\substack{Réponse\\ libre}} + \underbrace{c\int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}b\,u(\tau)d\tau + du(t)}_{Réponse\ forcée} \tag{2.6}$$

- **Cas d'un système d'un système d'ordre élevé : Forme matricielle**

Dans le cas où le système est d'ordre $n \geq 2$, donc il possède n variables d'état $x_i(t)$.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

La solution d'un tel système matriciel est analogue à celle obtenue dans le cas scalaire, donc, en remplaçant les scalaires a, b, c et d dans (2.5) et (2.6) par les matrices A, B, C et D respectivement, il vient :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{2.7}$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x(0)}_{\substack{Réponse\\ libre}} + \underbrace{C\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\substack{Réponse\\ forcée}} \tag{2.8}$$

Remplaçons (2.3) dans (2.7) et (2.8), il vient :

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \tag{2.9}$$
$$y(t) = C\Phi(t)x(0) + C\int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t) \tag{2.10}$$

Le problème de la résolution des équation d'état se ramène au problème de calcul de la matrice de transition. Avant de décrire différentes méthodes pour l'obtention de la matrice de transition, nous montrons quelques propriétés de cette matrice.

4.3. Propriétés de la matrice de transition d'état

- $\Phi(0) = e^{A\times 0} = I$.
- $\Phi(t) = e^{At} = [e^{-At}]^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1}$, $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$.
- $\Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$.
- $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$.
- $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$

4.4. Calcul de la matrice de transition d'état

Il existe plusieurs méthodes pour le calul de la matrice de transition $\Phi(t) = e^{At}$:

a) Méthode du développement en série

Si la matrice A est nilpotente d'ordre k (c.-à-d. il existe $k \geq 1$ tel que pour $> k$ $A^r = 0$), alors , on peut calculer la matrice de transition par la somme de la série :

$$e^{A\,t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots . + \frac{A^i t^i}{i!} + \cdots = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots \frac{A^r tr^2}{r!}$$

Exemple :

Soit : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc $A^{r \geq 2} = 0$ alors :

$$e^{A\,t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Méthode de transformée de Laplace

Soit l'équation d'état : $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
En posant $u(t) = 0$.
$\dot{x}(t) = Ax(t) \Longrightarrow TL\,[\dot{x}(t)] = TL[Ax(t)] \Longrightarrow sX(s) - x(0) = AX(s)$
$\Longrightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) \Longrightarrow TL^{-1}[X(s)] = x(t) = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0)$
Finalement :

$$x(t) = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0) \tag{2.11}$$

D'autre part, la réponse libre de l'équation d'état est: $x(t) = e^{At}x(0)$
Donc :

$$e^{At} = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}]) \tag{2.12}$$

Exemple : Soit un système d'ordre deux :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Calculer la matrice de transition $\emptyset(t) = e^{At}$.

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & S \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\alpha_1}{(s+1)} + \frac{\alpha_2}{(s+2)}\right) & \left(\frac{\alpha_3}{(s+1)} + \frac{\alpha_4}{(s+2)}\right) \\ \left(\frac{\alpha_3}{(s+1)} + \frac{\alpha_4}{(s+2)}\right) & \left(\frac{\alpha_5}{(s+1)} + \frac{\alpha_6}{(s+2)}\right) \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = \lim_{s \to -1} (s+1)\left(\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right) = 2, \alpha_2 = \lim_{s \to -2} (s+2)\left(\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right) = -1$

$\alpha_3 = \lim_{s \to -1} (s+1)\left(\frac{-2}{(s+1)(s+2)}\right) = -2, \alpha_4 = \lim_{s \to -2} (s+2)\left(\frac{-2}{(s+1)(s+2)}\right) = 2$

$\alpha_5 = \lim_{s \to -1} (s+1)\left(\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right) = -1, \alpha_4 = \lim_{s \to -2} (s+2)\left(\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right) = 2$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right) & \left(\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right) \\ -2\left(\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(S+2)}\right) & \left(\frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}\right) \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}] = TL^{-1}\begin{bmatrix} \left(\frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right) & \left(\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right) \\ \left(\frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}\right) & \left(\frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

c) Méthode de diagonalisation de la matrice A

Si la matrice d'état A est diagonale, on montre facilement que :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \Longrightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

d'où l'idée de passer par un changement de variables judicieux, de la représentation d'état initiale vers une autre représentation faisant intervenir une matrice d'état diagonale.

Si A est une matrice carrée $(n \times n)$ à n valeurs propres *distincts* λ_i $(1, \dots, n)$, qui sont associées aux n vecteurs propres V_i par :

$$AV_i = \lambda_i V_i \qquad i = 1 \dots n \tag{2.14}$$

d'où

$$\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ AV_2 = \lambda_2 V_2 \\ \quad\vdots \\ AV_n = \lambda_n V_n \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$A[V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n] = [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

En multipliant à gauche les deux membres de (2.35) par $[V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n]^{-1}$:

$$\underbrace{[V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n]^{-1}}_{P^{-1}} A \underbrace{[V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_n]}_{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathrm{D}} \tag{2.16}$$

$$P^{-1}AP = \mathrm{D} \Longrightarrow A = PDP^{-1} \tag{2.17}$$

Finalement :

$$e^{At} = Pe^{\mathrm{D}t}P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} \tag{2.18}$$

Exemple 2.5 : Calculer la matrice de transition e^A avec : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

Valeurs propres :

$det(\lambda I - A) = 0$

$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Soit $z = [z_1 \quad z_2]^T$ et $v = [v_1 \quad v_2]^T$ les deux vecteurs propres associés au valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement, alors :

a) $Az = \lambda_1 z$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = -z_2$, on pose $z_1 = 1 \Longrightarrow z_2 = -1,\ z = [1 \quad -1]^T$

b) $Av = \lambda_2 v$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow -2v_1 = v_2$, on pose $v_2 = 2 \Longrightarrow z_1 = -1,\ v = [-1 \quad 2]^T$

Donc: $P = [z \quad w] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Vérification : $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

c) Méthode de CAYLEY-HAMILTON

Cette méthode est basée sur le fait qu'une matrice est toujours solution de son équation caractéristique. L'équation caractéristique de la matrice A de dimensions $(n \times n)$ est :

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2.19}$$

On a toujours :

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0 \Rightarrow A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1 A - a_0 I = 0 \tag{2.20}$$

Donc, pour toutes matrice carrée possédant n valeurs propres distinctes, toutes puissance de A supérieure ou égale à n peut s'exprimer en fonction d'une combinaison des puissances de A inferieures à n . Donc :

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nt^n}{n!}$$

$$e^{At} = f_{n-1}(t)A^{n-1} + f_{n-2}(t)A^{n-2} + \cdots + f_1(t)A + f_0(t)I \qquad (2.21)$$

Notons que tous les valeurs propres λ_i de la matrice A vérifient également cette équation, c-à-d :

$$e^{\lambda_i t} = f_{n-1}(t)\,\lambda_i^{\,n-1} + f_{n-2}(t)\,\lambda_i^{\,n-2} + \cdots + f_1(t)\,\lambda_i + f_0(t) \qquad (2.23)$$

En résumé cette méthode consiste à calculer e^{At} de la façon suivante :

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(t)A^i \qquad (2.25)$$

où les fonctions $f_i(t)$ sont à calculer en résolvant le système d'équations suivant :

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{j=0}^{n-1} f_j(t)\lambda_i^j \qquad (2.26)$$

Exemple : soit : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

Calculer la matrice de transition $\Phi(t) = e^{At}$.

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$

On a :

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{1} f_i(t)A^i = f_0(t)I + f_1(t)A$$

et :

$$\begin{cases} e^{-t} = f_0(t) + f_1(t)\lambda_1 = f_0(t) - f_1(t) \\ e^{-2t} = f_0(t) + f_1(t)\lambda_2 = f_0(t) - 2f_1(t) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} f_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ f_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

et

$$e^{At} = f_0(t)I + f_1(t)A = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

4.5. Réponse du système à des entrées typiques

On donne la réponse générale d'un système donné sous forme de représentation d'état

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = C\left[e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right] + Du(t)$$

Pour des raisons de simplicité on considère le cas ou $D = 0$, donc la réponse sera :

$$y(t) = Cx(t) = C\left[e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right]$$

- **Réponse impulsionnelle**

Pour calculer la réponse à une entrée de type impulsion de Dirac $u(t) = \delta(t)$, on utilise la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \text{ où } f \text{ est une fonction continue à l'origine}$$

Alors :

$$y(t) = C\left[e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A}\; B\,\delta(\tau)d\tau\right] = C[e^{At}x(0) + e^{At}B]$$

$$y(t) = Ce^{At}[x(0) + B] \qquad (2.44)$$

- **Réponse indicielle**

L'entrée est l'échelon unitaire également appelée fonction de Heavyside $u(t) = \Gamma(t)$ définie par :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$y(t) = C\left[e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A}\; B\,d\tau\right] = C\left[e^{At}x(0) + \left[-e^{A(t-\tau)}A^{-1}B\right]_0^t\right]$$

$$= C[e^{At}x(0) - A^{-1}B + e^{At}A^{-1}B\,] = Ce^{At}[x(0) + A^{-1}B\,] - CA^{-1}B$$

Donc :

$$y(t) = Ce^{At}[x(0) + A^{-1}B\,] - CA^{-1}B \qquad (2.45)$$

5. PASSAGE DE LA REPRESENTATION D'ETAT A LA MATRICE DE TRANSFERT

Le passage de la représentation d'état vers la fonction de transfert n'offre aucune difficulté. Soit la représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.50}$$

Posons les conditions initiales nulles ($x(0) = 0$) et prenons la transformée de Laplace des deux équations (4.1), on obtient :

$sX(s) = AX(s) + BU(s) \Longrightarrow (sI - A)X(s) = BU(s) \Longrightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$

$Y(s) = CX(s) + DU(s) = (C(SI - A)^{-1}B + D)U(s)$

Dans le cas SISO, on a une seule fonction de transfert (FT) reliant l'entrée à la sortie. Dans le cas MIMO, on a plusieurs FT représentant l'effet de chaque entrée sur chaque sortie. L'ensemble de ces fonctions rangées en tableau constitue la matrice de transfert.

Dans le cas monovariable on obtient la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{2.51}$$

Donc le cas d'un système multivaribale à m entrées et p sorties, on obtient la matrice de transfert :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(s) & \dots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

Avec : $\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{p1}(s) & \dots & G_{pm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}$

6. PASSAGE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE A LA REPRESENTATION D'ETAT (cas monovariable (SISO))

Soit le système décrit par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = u(t)$$

Soit le changement de variable suivant : $x_1 = y$, $x_2 = \frac{dy}{dt}$, $x_3 = \frac{d^2y}{dt^2}$, …, $x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$

Alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \dfrac{d^n y}{dt^n} = u - a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} - \dots - a_0 y(t) = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots u - a_{n-1}x_n + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Soit sous forme matricielle

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Nous allons maintenant étendre ce résultat au cas général défini par :

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_n\frac{d^n u(t)}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 u(t)$$

Que l'on écrira en abrégé $L(y) = M(u)$, avec L et M des opérateurs adéquats.

Pour cela, formons tout d'abord une équation auxiliaire :

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 z(t) = L(z) = u(t)$$

Et effectuons le changement de variable suivant : $x_1 = z, x_2 = \frac{dz}{dt}, x_3 = \frac{d^2z}{dt^2}, \ldots, x_n = \frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}}$

Du fait de la linéarité de l'opérateur L on a :

$$L\left(\frac{d^i z(t)}{dt^i}\right) = \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

Donc

$$L(y) = M(u) = M(L(z)) = L(M(z)) \Longrightarrow y = M(z)$$

Soit

$$y = b_n \frac{d^n z(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} z(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_0 z(t) = b_n \frac{d^n z(t)}{dt^n} + b_{n-1} x_n + \cdots + b_0 x_1$$

Or

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n} = u(t) - a_{n-1} \frac{d^{n-1} z(t)}{dt^{n-1}} - \cdots - a_0 z(t) = u(t) - a_{n-1} x_n - \cdots - a_0 x_1$$

Ainsi

$$y(t) = (b_0 - a_0 b_n) x_1 + (b_1 - a_1 b_n) x_2 + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_n) x_n + b_n u$$

La représentation d'état s'écrit donc

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [(b_0 - a_0 b_n)\ \ (b_1 - a_1 b_n)\ \ \cdots\ \ (b_{n-1} - a_{n-1} b_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$

Si $b_n = 0$ alors :

$$y(t) = [b_0\ \ b_1\ \ \cdots\ \ b_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

7. PASSAGE DE LA MATRICE DE TRANSFERT A LA REPRESENTATION D'ETAT

7.1. Cas des systèmes monovariables

Soit la fonction de transfert d'un système SISO donné par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} \ldots + a_1 s + a_0} + b_n \tag{2.52}$$

avec : $\deg(N(s)) < n$

7.1.1. Formes modales

a) Forme diagonale

Dans le cas où les pôles λ_i $(i = 1 \ldots n)$ sont distincts, il est facile de réaliser la décomposition en éléments simples de $G(s)$.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} \ldots + a_1 s + a_0} + b_n = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i)} + b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i} + b_n \tag{2.53}$$

avec : $\alpha_i = \lim_{s \to \lambda_i} (s - \lambda_i) G(s)$

On pose $X_i(s) = \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i} U(s)$ on aura :

$$s X_i(s) = \alpha_i U(s) + \lambda_i X_i(s) \tag{2.54}$$

A partir de (4.8), il vient

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i} U(s) + b_n U(s) = X_1(s) + X_2(s) + \cdots + X_n(s) + b_n U(s)$$

En utilisant la transformée inverse de Laplace, on obtient :

$$\dot{x}_i(t) = \alpha_i u(t) + \lambda_i x_i(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t) + b_n u(t)$$

Ce qui donne la forme suivante :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+b_n u \tag{2.55}$$

Une telle forme est *dite diagonale* car la matrice d'évolution A est diagonale.

Remarque:

- Cette forme peut être modifiée en remplaçant le vecteur B par le vecteur C^T et le vecteur C par le vecteur B^T, ceci peut être obtenu en choisissant $X_i(s)=\frac{1}{s-\lambda_i}U(s)$ au lieu de $X_i(s)=\frac{\alpha_i}{s-\lambda_i}U(s)$.
- La matrice d'état A est diagonale, ses valeurs propres qui sont les pôles du système sont les éléments de la diagonale.

b) Forme de Jordan

Dans ce cas, on obtient la forme quasi diagonale dite *forme de Jordan*. Dans un premier temps, pour comprendre ce qui peut être envisagé dans cette situation, l'on peut tout simplement considérer une fonction de transfert $G(s)$ ne possédant qu'un seul pôle λ de multiplicité *n*. on a alors :

$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{N(s)}{(s-\lambda)^n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{(s-\lambda)^i}$, Avec : $\beta_i=\lim_{S\to\lambda}\frac{1}{(n-i)!}\left[\frac{d^{n-i}}{ds^{n-i}}[(s+\lambda)^n G(s)]\right]$

$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{(s-\lambda)^i}U(s)=\frac{\beta_1}{(s-\lambda)}U(s)+\frac{\beta_2}{(s-\gamma)^2}U(s)+\dots+\frac{\beta_n}{(s-\lambda)^n}U(s)$

On pose :

$X_n(s)=\frac{U(s)}{(s-\lambda)}$

$X_{n-1}(s)=\frac{U(s)}{(s-\lambda)^2}=\frac{1}{(s-\lambda)}X_n(s)$

$X_{n-2}(s)=\frac{U(s)}{(s-\lambda)^3}=\frac{1}{(s-\lambda)}X_{n-1}(s)$

$\vdots$

$X_1(s)=\frac{U(s)}{(s-\lambda)^n}=\frac{1}{(s-\lambda)}X_2(s)$

En utilisant la TL inverse, il vient :

$\dot{x}_1(t)=\lambda x_1(t)+x_2(t)$

$\dot{x}_2(t)=\lambda x_2(t)+x_3(t)$

$\vdots$

$\dot{x}_{n-1}(t)=\lambda x_{n-1}(t)+x_{n-2}(t)$

$\dot{x}_n(t)=\lambda x_n(t)+x_{n-1}(t)$

$y(t)=\beta_1 x_n(t)+\beta_2 x_{n-1}(t)+\dots+\beta_1 x_1(t)$

Ce qui donne la forme quasi diagonale suivante :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\beta_n & \beta_{n-1} & \dots & \beta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \tag{2.56}$$

Remarque **:** Dans le cas où la fonction de transfert possède « *p* » pôles simples λ_i $(i=1,\dots,p)$ et un pôle λ_{p+1} de multiplicité « q=*n-p* », la décomposition en éléments simples donne :

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{N(s)}{(s-\gamma)^q(s-\lambda_1)\cdots(s-\lambda_p)}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\alpha_i}{s-\lambda_i}+\sum_{j=1}^{q}\frac{\beta_j}{(s-\gamma)^j}$$

avec : $\alpha_i=\lim_{S\to\lambda_i}(s-\gamma)^q G(s)$ et $\beta_j=\lim_{S\to-\gamma}\frac{1}{(q-j)!}\left[\frac{d^{q-j}}{ds^{q-j}}[(s+\gamma)^q G(s)]\right]$

7.1.2. Formes compagnes

a) Forme compagne comandable

On a

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}\ldots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}\ldots+a_1s+a_0}=\frac{Y(s)}{V(s)}\frac{V(s)}{U(s)} \tag{2.57}$$

où $V(s)$ correspond à une variable interne au système, telle que :

$$\frac{Y(s)}{V(s)}=b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}\ldots+b_1s+b_0 \tag{2.58}$$

$$\frac{V(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}\ldots+a_1s+a_0} \tag{2.59}$$

A partir de (2.59), il vient :

$$s^nV(s)=U(s)-a_{n-1}\underbrace{s^{n-1}V(s)}_{X_n(s)}-\cdots-a_1\underbrace{sV(s)}_{X_2(s)}-a_0\underbrace{V(s)}_{X_1(s)} \tag{2.60}$$

On peut choisir les variables d'état de la façon suivante :

$$\begin{cases}X_1(s)=V(s)\\X_2(s)=sV(s)=sX_1(s)\\\vdots\\X_n(s)=s^{n-1}V(s)=sX_{n-1}(s)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\\vdots\\\dot{x}_{n-1}(t)=x_n(t)\\\dot{x}_n(t)=u(t)-a_{n-1}x_n(t)-\cdots-a_1x_2(t)-a_0x_1(t)\end{cases}$$

A partir de (3.58), on obtient :

$$\begin{aligned}Y(s)&=V(s)\,(b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}\ldots+b_1s+b_0)\\&=b_ns^nV(s)+b_{n-1}s^{n-1}V(s)\ldots+b_1sV(s)+b_0V(s)\\&=b_n\big(U(s)-a_{n-1}X_n(s)-\cdots-a_1X_2(s)-a_0X_1(s)\big)+b_{n-1}X_n(s)\ldots+b_1X_2(s)+b_0X_1(s)\\&=(b_0-a_0b_n)X_1(s)+(b_1-a_1b_n)X_2(s)+\cdots+(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)X_n(s)+b_nU(s)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(t)=(b_0-a_0b_n)x_1(s)+(b_1-a_1b_n)x_2(s)+\cdots+(b_{n-1}-a_{n-1}b_n)x_n(s)+b_nu(t)$$

Ceci conduit à la forme compagne commandable:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\ldots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\ldots&-a_{n-1}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=[(b_0-a_0b_n)\ \ (b_1-a_1b_n)\ \cdots\ \ (b_{n-1}-a_{n-1}b_n)]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+b_n\,u$$

Si $b_n=0$ alors : $y(t)=[b_0\ \ b_1\ \cdots\ \ b_{n-1}]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$

Remarque **:**

- La matrice A contient tous les coefficients (a_i)du dénominateur de la fonction de transfert en une seule ligne, ce sont les coefficients du polynôme caractéristique $P(s)=det((sI-A)^{-1})$ de la matrice A.
- Bien qu'une seule variable d'état x_n soit directement influencée par le signal de commande (entrée), les autres variables le sont mais indirectement par intégration successive.

Exemple **:** Trouver la forme compagne de commandabilité du système défini la fonction de transfert :

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2s^2+4s+1}{s^3+2s^2+s}$$

D'où la forme compagne commandable:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y(t)=[1\ \ 4\ \ 2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

b) Forme compagne d'observable

Si le système est observable, on peut le mettre sous une forme d'état dite *forme compagne observable*.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} \ldots + a_1 s + a_0}$$

On divise le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert par s^n.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n + b_{n-1}s^{-1} \ldots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1}s^{-1} \ldots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}}$$

$$Y(s)[1 + a_{n-1}s^{-1} \ldots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}] = [b_n + b_{n-1}s^{-1} \ldots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}]U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = -[a_{n-1}s^{-1} \ldots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}]Y(s) + [b_n + b_{n-1}s^{-1} \ldots + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}]U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\left(\cdots \underbrace{\left(\underbrace{(b_0 U - a_0 Y)s^{-1}}_{X_{1(s)}} + +b_1 U - a_1 Y \right) s^{-1}}_{X_2(s)} + \cdots + b_{n-1}U - a_{n-1}Y \right)}_{\substack{\vdots \\ X_n(s)}} s^{-1} + b_n U(s)$$

On pose :

$$\begin{cases} Y(s) = X_n + b_n U \\ X_1(s) = (b_0 U - a_0 Y)s^{-1} = \big((b_0 - a_0 b_n)U - a_0 X_n\big)s^{-1} \\ X_2(s) = (X_1 + b_1 U - a_1 Y)s^{-1} = (X_1 - a_1 X_n + (b_1 - a_1 b_n)U)s^{-1} \\ \vdots \\ X_n(s) = [X_{n-1} - a_{n-1}Y]s^{-1} = (X_{n-1} - a_1 X_n + (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)U)s^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(t) = x_n(t) + b_n u(t) \\ \dot{x}_1(t) = -a_0 x_n(t) + (b_0 - a_0 b_n)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - a_1 x_n(t) + (b_1 - a_1 b_n)u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = x_{n-1}(t) - a_{n-1}x_n(t) + \ (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)u(t) \end{cases}$$

Ceci conduit à la forme compagne observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_2 - a_2 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1}b_n \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [0 \ \ 0 \ \cdots \ \ 0 \ \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$

Si $b_n = 0$ on a :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [0 \ \ 0 \ \cdots \ \ 0 \ \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Exemple 3.4 : Trouver la forme compagne d'observabilité du système défini par la fonction de transfert :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 4s + 1}{s^3 + 2s^2 + s}$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ \ 0 \ \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

7.2. Cas des systèmes multivariables

7.2.1. Méthode de Gilbert (Réalisation minimale)

Dans le cas où tous les pôles de la matrice de transfert sont simples et réels, Gilbert a proposé une méthode permettant de trouver facilement une réalisation complètement commandable et observable (réalisation minimale). On note que cette réalisation est diagonale.

Etant donné la matrice de transfert rationnelle $M(s)$ dont les éléments ont un nombre fini de pôles simples.

$$\lambda_i \text{ où } i = 1 \dots n$$

On décompose $M(s)$ en éléments simples :

$$M(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{s - \lambda_i}; \quad M_i = \lim_{S \to \lambda_i} (s_i - \lambda_i) M(s)$$

Si le rang n_i du pôle λ_i est défini comme étant le rang de M_i, c-à-d $n_i = rang\ (M_i)$, donc il faut choisir n_i lignes linéairement indépendants factorisant M_i alors M(s) admet une représentation minimale d'ordre n.

$$n = \sum n_i \text{ tel que : } A = diag\left(\lambda_i \ I_{n_i}\right),\ M_i = C_i B_i$$

Exemple : Déterminer la forme d'état de cette matrice $M(s)$ suivante :

$$M(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s^2 + 6 & s + s + 4 \\ 2s^2 - 7s - 2 & s^2 - 5s - 2 \end{bmatrix}$$

$$M(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{s - \lambda_i}; \quad M_i = \lim_{s \to \lambda_i} (s - \lambda_i) M(s)$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$

$$M_1 = \lim_{s \to 1} (S - 1) M(S) = \begin{bmatrix} 7/6 & 1 \\ -7/6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \lim_{s \to -1} (S + 1) M(S) = \begin{bmatrix} -7/2 & -2 \\ -7/2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \lim_{s \to -2} (S + 2) M(S) = \begin{bmatrix} 10/3 & 6/3 \\ 20/2 & 12/3 \end{bmatrix}$$

$n_1 = rang\ (M_1) = 1$, on peut choisir une seule ligne factorisant M_1: $\quad M_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{C_1} \underbrace{[7/6 \quad 1]}_{B_1}$

$n_2 = rang\ (M_2) = 1$, on peut choisir une seule ligne factorisant M_2 : $\quad M_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{C_2} \underbrace{[-7/2 \quad -2]}_{B_2}$

$n_3 = rang\ (M_3) = 1$, on peut choisir une seule ligne factorisant M_3 : $\quad M_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{C_3} \underbrace{[10/3 \quad 6/3]}_{B_3}$

Alors, la représentation d'état est :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/6 & 1 \\ -7/2 & -2 \\ 10/3 & 6/3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

7.2.2. Réalisation sous forme canonique de commandabilité

- ***Etape 1*** : Déterminer le dénominateur commun de chaque colonne $D_1(s), D_2(s), \dots, D_m(s)$ et écrire $M(s)$ sous la forme :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{N_{11}(s)}{D_1(s)} & \cdots & \frac{N_{1m}(s)}{D_m(s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_{p1}(s)}{D_1(s)} & \cdots & \frac{N_{pm}(s)}{D_m(s)} \end{bmatrix} = N(s) D^{-1}(s)$$

Où : $\begin{bmatrix} N_{11}(s) & \dots & N_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{p1}(s) & \dots & N_{pm}(s) \end{bmatrix}$ et $D = diag[D_1(s) \quad \dots \quad D_m(s)]$

- ***Etape 2*** :$D_i(s) = s^{n_i} + a_{n_i-1}^i s^{n_i-1} + \cdots + a_1^i s + a_0^i \qquad i = 1 \dots . m$

n_i est l'indice de commandabilité de u_i

$$D_i(s) = S^{n_i} + \left[a_0^i a_1^i \dots\ a_{n_i-1}^i\right] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n_i-1} \end{bmatrix}}_{S_i}$$

- ***Etape 3*** :

$$N(S) = C\,S \qquad \text{où :} \qquad S = \begin{bmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_m \end{bmatrix}$$

- ***Etape 4*** :

$$A = diag[A_1(s) \quad \dots \quad A_m(s)] \text{ avec } A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0^i & -a_1^i & -a_2^i & \dots & -a_{n-1}^i \end{bmatrix}$$

$$B = diag[b_1 \quad \dots \quad b_m] \text{ avec } b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemple : Trouver une réalisation sous forme canonique de commandabilité de la matrice de transfert :

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

- ***Etape 1 :***

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s+2)}{s(s+2)} & \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s}{s(s+2)} & \frac{(s+1)}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$M(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} (s+2) & 2(s+2) \\ s & (s+1) \end{bmatrix}}_{N(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}}_{D^{-1}(s)}$$

- ***Etape 2 :***

$$D_1(s) = s(s+2) = s^2 + 2s = s^2 + [\underbrace{0 \quad 2}_{a_0^1\ a_1^1}] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}}_{S_1} \Rightarrow\ n_1 = 2$$

$$D_2(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2 = s^2 + [\underbrace{2 \quad 3}_{a_0^2\ a_1^2}] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}}_{S_2} \Rightarrow n_2 = 2$$

- ***Etape 3 :***

$$N(s) = C\,S = C \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}_{S}$$

- ***Etape 4:***

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7.2.3. *Réalisation sous forme canonique d'observabilité*

- ***Etape 1*** **:** Déterminer le dénominateur commun de chaque ligne $D_1(s), D_2(s), \dots, D_p(s)$ et écrire $M(s)$ sous la forme :

$$M(s)=\begin{bmatrix}\frac{N_{11}(s)}{D_1(s)} & \dots & \frac{N_{1m}(s)}{D_1(s)}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{N_{p1}(s)}{D_p(s)} & \dots & \frac{N_{pm}(s)}{D_p(s)}\end{bmatrix}=D^{-1}(s)N(s)$$

où

$$\begin{bmatrix}N_{11}(s) & \dots & N_{1m}(s)\\ & \ddots & \vdots\\ N_{p1}(s) & \cdots & N_{pm}(s)\end{bmatrix} \text{ et } D=diag\left(D_1(s),\dots,D_p(s)\right)$$

- ***Etape 2*** : $D_i(s)=s^{\tau_i}+a^i_{\tau_i-1}s^{\tau_i-1}+\cdots+a^i_1 s+a^i_0\,,\qquad i=1\dots.p$

τ_i est l'indice d'observabilité de y_i

$$D_i(S)=S^{\tau_i}+\left[a^i_0 a^i_1 \dots\ a^i_{\tau_i-1}\right]\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ s\\ s^2\\ \vdots\\ s^{\tau_i-1}\end{bmatrix}}_{S_i}$$

- ***Etape 3*** :

$$N(s)=SB\quad avec\quad S=diag\left(S_1^T,\dots,S_p^T\right)=\begin{bmatrix}S_1^T & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & S_p^T\end{bmatrix}$$

- ***Etape 4*** :

$$A=diag(A_1,\ \dots,\ A_m)\text{ avec } A_i=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & -a^i_0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a^i_1\\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a^i_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a^i_{\tau_i-1}\end{bmatrix}$$

$$C=diag[c_1\quad\cdots\quad c_p]\text{ avec } c_i=[0\quad\dots\quad 0\quad 1]$$

Exemple : Trouver une réalisation sous forme canonique d'observabilité la matrice de transfert :

$$M(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{2}{s+1}\\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

- ***Etape 1 :***

$$M(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{2}{s+1}\\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{(s+1)}{s(s+1)} & \frac{2\,s}{s\,(s+2)}\\ \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+2)}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{s(s+1)} & 0\\ 0 & \frac{1}{(s+2)}\end{bmatrix}}_{D^{-1}(s)}\underbrace{\begin{bmatrix}s+1 & 2\,s\\ 1 & 1\end{bmatrix}}_{N(s)}$$

- ***Etape 2 :***

$$D_1(s)=s(s+1)=s^2+s=s^2+[\underbrace{0}_{a_0^1}\quad\underbrace{1}_{a_1^1}]\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ s\end{bmatrix}}_{S_1}\Rightarrow\tau_1=2$$

$$D_2(s)=s+2=s+\underbrace{[2]}_{a_0^2}\underbrace{[1]}_{S_2}\Longrightarrow\tau_2=1$$

- ***Etape 3 :***

$$N(s) = S\,B = C\begin{bmatrix} S_1^T & 0 \\ 0 & S_2^T \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B}$$

- ***Etape 4:***

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$