# CHAPITRE III

## COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE

### III.1. INTRODUCTION

L'utilisation de la représentation d'état suscite deux questions importantes :

1) Est-ce que pour tout couple $x_0 = x(t_0)$ et $x_1 = x(t_1)$, il existe un vecteur de commande $u(t)$ défini sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ permettant de passer de l'état $x_0$ à l'état $x_1$, c'est le problème de commandabilité du système.
2) Est-ce que la connaissance de $y(t)$ et de $u(t)$ sur l'intervalle$[t_0, t_1]$ permet d'obtenir $x_0 = x(t_0)$, c'est le problème d'observabilité du système.

Ces deux propriétés sont nécessaires que ce soit pour la commande où il faudra que le système soit commandable, ou pour la synthèse d'observateur où il faudra que le système soit observable. Pour cela, il est nécessaire de partir d'une représentation d'état minimale (commandable et observable) en éliminant (du modèle) les parties non commandables et non observables à la condition impérative que celles-ci soient asymptotiquement stables.

### III.2. COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE

Considérons un système linéaire et stationnaire représenté par le modèle d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad (3.1)$$

#### III. 2.1. Commandabilité

Un système décrit par un modèle d'état (ou la paire $(A, B\ )$ est dit *commandable* si pour tout état $x_f$ du vecteur d'état, il existe un signal d'entrée $u(t)$ d'énergie finie qui permet au système de passer de l'état initial $x_0$ à l'état $x_f$ en un temps fini.

Un système est dit *complètement commandable* s'il est commandable à tout point de l'espace d'état.

#### III. 2.2. Critère de commandabilité de Kalman

Un système linéaire $(A,\ B)$ est complètement commandable si et seulement si : $rang[Q_c] = n$, c-à-d, $Q_c$ est régulière où $n$ est l'ordre du système (nombre de variables d'état) avec :

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \ldots\ A^{n-1}B] \qquad (3.2)$$

$Q_c$est dite matrice de commandabilité.

***Exemple*** **:**

**Système 1 :** $\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$

$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X}$

$Q_c = [B \quad AB\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow det(Q_c) = 2 \neq 0$

Le système est commandable.

**Système 2 :** $\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$

$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X}$

$Q_c = [B \quad AB\ ] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow det(Q_c) = 0$

Le système n'est pas commandable.

### III. 2.3. Observabilité

On dit qu'un état $x(t_0)$ est *observable*, s'il peut être identifié à partir de la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ sur un intervalle de temps fini $[t_0\ , t_1]$.
Le système est dit *complètement observable* si $\forall\ x(t_0) \in$ *à l'espace d'état*, il est possible de restituer ou identifier sa valeur à partir de la seule connaissance de $u(t)$ et $y(t)$.

### III. 2.4. Critère d'observabilité de Kalman

Un système linéaire est complètement observable si et seulement si : $rang[Q_o] = n$ , c-à-d, $Q_o$ est régulière, où *n* est l'ordre du système (nombre de variables d'état) avec :

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

$Q_o$ est dite matrice d'observabilité.

***Exemple 3.2* :**

Etudier l'observabilité des deux systèmes donnés dans l'exemple 3.1.

**Système 1** : $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det(Q_c) = -2 \neq 0.$

**Système 2** : $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(Q_c) = 1 \neq 0.$

Les deux systèmes sont observables.

***Remarques :***

- La Commandabilité d'un système est liée seulement aux matrices $A$ et $B$.
- L'observabilité d'un système est liée seulement aux matrices $A$ et $C$.
- Si la matrice $A$ est *diagonale*, le système est complètement commandable si tous les éléments de $B$ sont non nuls. le système est complètement observable si tous les éléments de $C$ sont non nuls.

## III.3. STABILISABILITE ET DETECTABILITE

La commandabilité et d'observabilité sont des propriétés relativement fortes qui peuvent ne pas être vérifiés simultanément. Donc, Il est possible que : $rang[Q_c] = r < n$, donc, la commandabilité ne se vérifie que pour une partie du vecteur d'état ($r$ variables d'état). Les $r$ variables d'état sont les variables d'états commandables du système et les *n-r* variables d'état sont les variables non commandables du système, dans ce cas le système est dit *partialement commandable*. De même il est possible que $rang[Q_o] < n$, donc l'observabilité ne se vérifie que pour une partie du vecteur d'état.
Si le système n'est pas commandable ou n'est observable, la représentation d'état peut être encore utile. En effet, deux propriétés plus faibles, à savoir, la stabilisabilité et la détectabilité peuvent alors être satisfaites et permettre au concepteur d'utiliser cette représentation d'état.

### III. 2.5. Stabilisabilité

On dit qu'un système de pair (A,B) est stabilisable si tous ses modes instables sont commandables. Cela signifie de manière équivalente que tous ses modes non commandables sont stables.

### III. 2.6. Détectabilité

On dit qu'un système de pair (A, C) est détectable si tous ses modes instables sont observable. Cela signifie de manière équivalente que tous ses modes non observables sont stables.

## III.4. COMMANDABILITE/OBSERVABILITE ET FONCTION DE TRANSFERT

Dans cette partie, on montre la relation entre la fonction de transfert et ces deux propriétés (commandabilité et observabilité) à travers un exemple. Soit un système d'ordre 4 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{B}u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}}_{X}$$

$A$ est diagonale, donc :

La variable d'état $x_1$ : est commandable et observable ($CO$)
La variable d'état $x_2$ : est commandable et non observable ($C\bar{O}$)
La variable d'état $x_3$ : est non commandable et observable ($\bar{C}O$)
La variable d'état $x_4$ : est non commandable et non observable ($\bar{C}\bar{O}$)

$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \quad \Rightarrow X_1(s) = U(s)/(s+1)$
$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t) \Rightarrow X_2(S) = U(s)/(s+2)$
$\dot{x}_3(t) = -3x_3(t) \qquad \Rightarrow X_3(s)(s+3) = 0$
$\dot{x}_4(t) = -3x_4(t) \qquad \Rightarrow X_4(s)(s+4) = 0$
$y(t) = x_1(t) + \ x_3(t) \quad \Rightarrow U(s) = x_1(s) + \ x_3(S)$
Le système peut être décomposé en quatre sous-systèmes (CO,CNO, NCO,NCNO) comme :

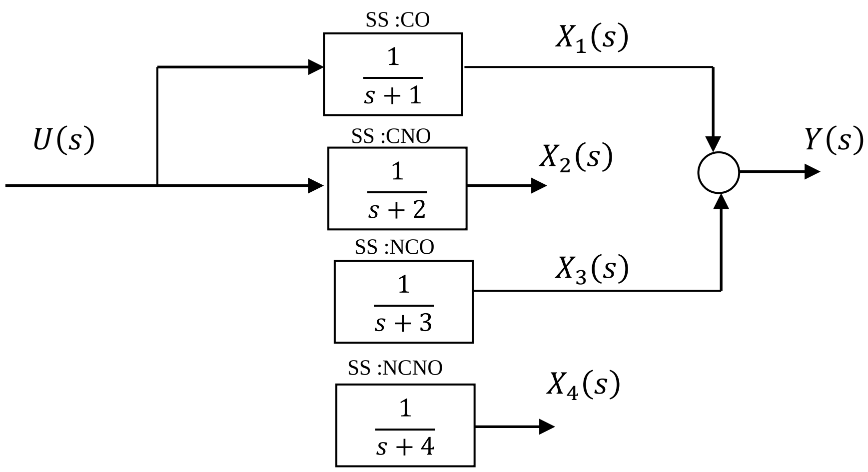



**Figure 3.1** Différents modes d'un système.

On calcule la fonction de transfert :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

Cependant, d'après la représentation d'état ce système est d'ordre 4, donc, on peut écrire :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

***Remarques :***

- Les modes (pôles) qui se compensent avec des zéros sont les modes non commandales, non observales ou non commandables et non observables. Donc, un système dont la fonction de transfert possède des zéros qui se compensent avec des pôles est un système non commandable et/ou non observable.
- Un système dont la fonction de transfert a tous ses zéros différents de ses pôles est un système commandable et observable.

- La commandabilité et l'observabilité sont des propriétés structurelles du système qui n'apparaissent pas dans la représentation par fonction de transfert. Donc, la fonction de transfert est quelques fois insuffisante pour décrire un système.
- Une représentation d'état d'un système à la fois commandable et observable est dite *minimale*.
- L'ordre de la représentation d'état n'est pas toujours le même que celui de la fonction de transfert. Tout dépend de la commandabilité et de l'observabilité de ce dernier. Lorsqu'il est complètement commandable et observable, les deux ordres sont égaux.

## III.5. PASSAGE D'UNE REALISATION A L'AUTRE

On peut passer d'une forme d'état à une autre tout simplement par un changement de base dans l'espace d'état $R^n$.
Considérons l'équation d'état:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad (3.3)$$

On peut appliquer au vecteur d'état $x$ un changement de repère de sorte à obtenir un nouveau vecteur d'état $\tilde{x}$. Ainsi, soit le changement de base $x = M\tilde{x}$ où $M$ est une matrice inversible appelée matrice de passage, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= M^{-1}A\,M\,\tilde{x} + M^{-1}Bu \\ y &= CM\tilde{x} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned} \qquad (3.4)$$

où $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$ , $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$. Comme il existe une infinité de matrices de passage $M$ utilisables, il existe aussi une infinité de formes équivalentes qui correspondent toutes à la même fonction de transfert. En effet :

$$\begin{aligned} \tilde{G}(S) = \tilde{C}\left(SI - \tilde{A}\right)^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} &= CM(SI - M^{-1}A\,M)^{-1}M^{-1}B + D \\ = CM(M^{-1}(SI - A)\,M)^{-1}M^{-1}B + D &= C(SI - A)^{-1}B + D = G(s) \end{aligned}$$

***Remarques :***

- En outre, puisque $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$ , les valeurs propres de la matrice d'état $A$ et la matrice $\tilde{A}$ sont les mêmes quelle que soit la forme considérée ; ce sont toujours les pôles de $G(s)$, c-à-d, les racines du polynôme caractéristique $P(s) = (sI - A)^{-1}$.
- Le passage d'une forme à une autre peut se révéler utile quand la seconde forme a une forme particulière (facilitant les calculs ou montrant certaines caractéristiques du système).

## III.6. PASSAGE AUX FORMES CANONIQUES

### III. 6.1. FORMES CANONIQUES DES SYSTEMES MONOVARIABLES

En général, on désigne par *forme canonique* d'un système linéaire continu une représentation d'état dont les matrices $A, B$ et $C$ ont une forme très simple et par conséquent, possèdent un nombre réduit d'éléments différents de zéro dans leurs structures. Les formes canoniques les plus connues et utilisées sont : *la forme compagne de commandabilié* et *la forme compagne d'observabilité*. Comme on va le voir plus tard ces deux formes seront très utiles, quand on étudie le problème de la commande et de l'observation.

#### III. 6.1.1. Obtention d'une forme compagne de commandabilité

Considérons une représentation d'état quelconque :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\,x + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Si le système est commandable, on peut le mettre sous forme compagne de commandabilité :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned}$$

tel que :

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1}\end{bmatrix},\quad \tilde{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix},\quad \tilde{C}=[b_0\ \ b_1\ \ \dots\ \ b_{n-1}]$$

$x=M\tilde{x}$ ($M$ matrice carrée inversible de dimension $n$)
En remplaçant $x=M\tilde{x}$ dans (3.10), on aura :

$$\begin{matrix} M\dot{\tilde{x}}=A\,M\tilde{x}+Bu\\ y=CM\tilde{x}\end{matrix}\quad\Longrightarrow\quad\begin{matrix}\dot{\tilde{x}}=M^{-1}A\,M\tilde{x}+M^{-1}Bu\\ y=CM\tilde{x}\end{matrix}$$

d'où $\tilde{A}=M^{-1}A\,M$ , $\tilde{B}=M^{-1}B$, $\tilde{C}=\ CM$

- ***Calcul de la matrice de passage M***

$$\tilde{A}=M^{-1}A\,M\Rightarrow\tilde{A}M^{-1}=M^{-1}A\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M^{-1}(1)\\M^{-1}(2)\\M^{-1}(3)\\ \vdots\\M^{-1}(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M^{-1}(1)\\M^{-1}(2)\\M^{-1}(3)\\ \vdots\\M^{-1}(n)\end{bmatrix}A$$

où $M^{-1}(i)$ est la ligne *i* de $M$, avec : *i*=1…*n*.

Donc :
$$\begin{aligned}&M^{-1}(2)=M^{-1}(1)A\\&M^{-1}(3)=M^{-1}(2)A=M^{-1}(1)A^2\\&M^{-1}(4)=M^{-1}(3)A=M^{-1}(1)A^3\\&\vdots\\&M^{-1}(n)=M^{-1}(n-1)A=M^{-1}(1)A^{n-1}\end{aligned}$$

Et
$$-a_0M^{-1}(1)-a_1M^{-1}(2)-a_2M^{-1}(3)-\cdots-a_{n-1}M^{-1}(n)=M^{-1}(n)A$$

$$\Rightarrow -a_0M^{-1}(1)-a_1M^{-1}(1)A-a_2M^{-1}(1)A^2-\cdots-a_{n-1}M^{-1}(1)A^{n-1}=M^{-1}(1)A^n$$
$$\Rightarrow\ M^{-1}(1)\underbrace{[A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I]}_{\substack{=0\\ selon\ le\ th\acute{e}or\grave{e}me\ de\ Cayley-Hamilton}}=0$$

On aussi :

$$\tilde{B}=M^{-1}B\Leftrightarrow\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M^{-1}(1)\\M^{-1}(2)\\M^{-1}(3)\\ \vdots\\M^{-1}(n)\end{bmatrix}B\Rightarrow\begin{cases}M^{-1}(1)B=0\\M^{-1}(2)B=0\\M^{-1}(3)B=0\\ \vdots\\M^{-1}(n)B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M^{-1}(1)B=0\\M^{-1}(1)AB=0\\M^{-1}(1)A^2B=0\\ \vdots\\M^{-1}(1)A^{n-1}B=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow M^{-1}(1)\ \underbrace{[B\quad AB\quad A^2B\quad\dots\quad A^{n-2}B\quad A^{n-1}B]}_{Q_c}=[0\quad 0\quad\dots\quad 0\quad 1]$$

$\Rightarrow M^{-1}(1)\,Q_c=[0\quad 0\quad\dots\quad 0\quad 1]$
$\Rightarrow M^{-1}(1)=\ Q_c^{-1}(n)$ ( la n$^{\text{ème}}$ ligne de $Q_c^{-1}$)

- ***Résumé: Calcul de la matrice de passage M vers une forme compagne de commandabilité***

 **1)** *Calculer la matrice de Commandabilité $Q_c$, si le système est commandable, c-à-d $|Q_c|\neq 0$, alors, suivre les étapes suivantes :*
 **2)** *Calculer $Q_c^{-1}$*
 **3)** *Mettre $M^{-1}(1)=\ Q_c^{-1}(n)$ : c à d, 1-iere ligne de $M^{-1}$= n-ieme ligne de $Q_c^{-1}$*
 **4)** *Calculer les autres lignes de M comme suit :*

$$\begin{aligned}&M^{-1}(2)=M^{-1}(1)A\\&M^{-1}(3)=M^{-1}(1)A^2\\&M^{-1}(4)=M^{-1}(1)A^3\\&\vdots\\&M^{-1}(n)=M^{-1}(1)A^{n-1}\end{aligned}$$

### III. 6.1.2. Obtention *d'une forme compagne d'observabilité*

Considérons une représentation d'état quelconque :

$$\dot{x} = A\,x + Bu$$
$$y = Cx$$

Si le système est observable, on peut le mettre sous forme compagne observable :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

tel que :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [0\ \ 0 \dots 0\ \ 0\ \ 1]$$

$x = N\tilde{x}$ ($N$ matrice carrée de dimension *n* inversible)

En remplaçant $x = N\tilde{x}$ dans l'équation d'état et l'équation de sortie, on aura :

$$\begin{matrix} N\dot{\tilde{x}} = A\,N\tilde{x} + Bu \\ y = CN\tilde{x} \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \dot{\tilde{x}} = N^{-1}A\,N\tilde{x} + N^{-1}Bu \\ y = CN\tilde{x} \end{matrix}$$

d'où $\tilde{A} = N^{-1}A\,N$ , $\tilde{B} = N^{-1}B$, $\tilde{C} = CN$

- ***Concept de dualité***

Il existe une analogie entre les formes compagne commandable et compagne observable, cette analogie est liée à la notion de *dualité*. On appellera systèmes duaux deux systèmes *S* et $S^*$ définis respectivement par les équations :

| Système *S* | Système $S^*$ |
|---|---|
| $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ | $\dot{x}^*(t) = A^T x^*(t) + C^T u(t)$ |
| $y(t) = Cx(t)$ | $y^*(t) = B^T x^*(t)$ |

Ces systèmes sont tels que :

- Si *S* est commandable, alors $S^*$ est observable.
- Si *S* est observable, $S^*$est commandable.

Il est donc possible de tester l'observabilité d'un système en vérifiant la commandabilité de système dual.

- ***Résumé : passage d'une forme quelconque vers une forme compagne d'observabilité***

1) *Soit un système S :* $(A, B, C)$.
2) *Calculer le système dual* $S^*$: $(A^T, C^T, B^T)$
3) *Calculer la matrice de passage* $M^*$ $({M^*}^{-1})$ *pour rendre le système* $S^*$ *sous forme compagne de commandabilité. Le système obtenu est* $\tilde{S}^{T*}$: $(\tilde{A}^T, \tilde{C}^T, \tilde{B}^T)$
4) *Calculer le système dual du système* $\tilde{S}^{T*}$, *le système obtenu* $\tilde{S}$ : $(\tilde{A}, \tilde{B}\ , \tilde{C})$ *est sous forme compagne d'observabilité.*

## III. 6.2. INDICES DE COMMANDABILITE ET INDICES D'OBSERVABILITE

### III.6.2.1. Indices de commandabilité

Soit un système multivariable linéaire représenté par le modèle d'état suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

avec : $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^p$ $A(n \times n)$, $B(n \times m)$, $C(p \times n)$ et $D(p \times m)$

Selon le critère de commandabilité de Kalman, le système est commandable si et seulement si

$$rang[Q_c] = n.$$

Avec : $Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \dots\ A^{n-1}B]$

On a : $B = [b_1 \dots b_m]$

$$Q_c = [|b_1\ b_2 \dots b_m||Ab_1 Ab_2 \dots Ab_m||A^2b_1\ A^2b_2 \dots\ A^2b_m| \dots\ |A^{n-1}b_m\ A^{n-1}b_m \dots\ A^{n-1}b_m|]$$

Dans un système multi-entrées ($m > 1$), la matrice $Q_c$ n'est pas carrée ($Q_c\big((n) \times (n \times m)\big)$, et pour que le système soit commandable, il faudra trouver $n$ colonnes linéairement indépendants dans $Q_c$ en utilisant la méthode des indices de commandabilité.

L'indice de commandabilité (IC) $n_i$ relatif à l'entrée $u_i$ est le nombre d'états que l'on peut commander par la seule entrée $u_i$.

- ***Choix par lignes***

1) On construit le tableau c-contre :

| $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | ... | $b_m$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | ... | X | $A^0$ |
| X | 0 | X | ... | X | $A^1$ |
| 0 | | 0 | ... | X | |
| | | | $\vdots$ | | |
| | | | ... | | $A^{n-1}$ |

2) On remplit le tableau ligne par ligne,
3) On indique les vecteurs linéairement indépendants en mettant une croix (X) dans leurs cellules correspondantes
4) Une fois un vecteur linéairement dépondant aux vecteurs précédents est trouvé, on met dans sa cellule un zéro (0). Toutes les cellules se trouvant au-dessous de cette cellule sont laissées vides car les vecteurs correspondants sont aussi linéairement dépendants.
5) On arrête la procédure dès qu'on trouve $n$ vecteurs linéairement indépendants ($n$ croix dans le tableau).
6) L'indice de commandabilité $n_i$ relatif à l'entrée $u_i$ est égal au nombre de croix (X) dans la colonne $b_i$.

- ***Choix par colonnes***
  Dans ce cas on remplit le tableau colonne par colonne en suivant la même procédure.

**Critère de commandabilité des systèmes multivariables**

- On calcule les indices de commandabilité $n_i, (i = 1 \dots m)$.
- Le système est dit commandable si $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$.
- Dans ce cas, la matrice de commandabilité $Q_c$ se reduit à la matrice carrée régulière suivante :

$$Q_c = [b_1\ Ab_1 \dots A^{n_1-1}b_1 | b_2\ Ab_2 \dots A^{n_2-1}b_1 | \dots | b_m\ Ab_m \dots\ A^{n_m-1}b_m]$$

- On peut décomposer le système en $m$ sous-systèmes chacun d'ordre $n_i$ commandable par $u_i$.

***Exemple***: Soit un système à deux entrées :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

Trouver les indices de commandabilité de $u_1$ et $u_2$ et tester la commandabilité du système.

$$Q_c = [b_1\ b_2\ Ab_1\ Ab_2\ A^2b_1\ A^2b_2\ A^3b_1\ A^3b_2\ ]$$

$$Q_c = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & Ab_1 & Ab_2 & A^2b_1 & A^2b_2 & A^3b_1 & A^3b_1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 14\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

***Choix par lignes :***

| $b_1$ | $b_2$ | |
|---|---|---|
| X | X | $A^0$ |
| X | X | $A^1$ |
| 0 | | $A^2$ |
| | | $A^3$ |

Les indices de commandabilité sont : $n_1 = 2,\ n_2 = 2$. On a : $\sum_{i=1}^{2} n_i = 4$, le système est commandable.

***Choix par colonnes :***

| $b_1$ | $b_2$ | |
|---|---|---|
| X | X | $A^0$ |
| X | | $A^1$ |
| X | | $A^2$ |
| 0 | | $A^3$ |

Les indices de commandabilité sont : $n_1 = 3, n_1 = 1$. On a : $\sum_{i=1}^{2} n_i = 4$, le système est commandable.

### III.6.2.2. Indices d'observabilité

Suivant le critère d'observabilité de Kalman, le système est observable si et seulement si $rang[Q_o] = n$.

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \\ c_1A \\ \vdots \\ c_pA \\ c_1A^2 \\ \vdots \\ c_pA^2 \\ \vdots \\ c_1A^{n-1} \\ \vdots \\ c_pA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Dans un système multi-sorties ($p > 1$), la matrice $Q_o$ n'est pas carrée ($Q_o\big((p\text{x}n)\text{x}n\big)$, et pour que le système soit observable, il faudra trouver $n$ vecteurs linéarement indépendants dans $Q_o$ en utilisant la méthode suivante (méthode d'indice d'observabilité).

L'indice d'observabilité (IO) $\tau_i$ relatif à la sortie $y_i$ est le nombre d'états que l'on peut observer en connaissant $y_i$ et $u$. Pour le calcul de l'indice d'observabilité, on suit la même procédure utilisée pour le calcul de l'indice de commandabilité en remplaçant les $b_i$ par les $c_i$ dans le tableau.

**Critère d'observabilité des systèmes multivariables**

- On calcule les indices d'observabilité $\tau_i, (i = 1 \dots p)$.
- Le système est dit observable si $\sum_{i=1}^{p} \tau_i = n$.
- Dans ce cas, la matrice d'observabilité $Q_o$ se reduit à la matrice carrée régulière suivante :

$$Q_o = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1A \\ \vdots \\ c_1A^{\tau_1-1} \\ c_2 \\ c_2A \\ \vdots \\ c_2A^{\tau_2-1} \\ \vdots \\ c_p \\ c_pA \\ \vdots \\ c_pA^{\tau_p-1} \end{bmatrix}$$

***Exemple***: Soit un système à deux entrées :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -3 & -4 & 6 \\ -3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Trouver les indices d'observabilité de $y_1$ et $y_2$ et tester l'observabilité du système.

$$Q_o = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1A \\ c_2A \\ c_1A^2 \\ c_2A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -4 & 6 \\ -4 & -6 & 8 \\ -3 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

***Choix par lignes :***

| $c_1$ | $c_2$ | |
|---|---|---|
| X | X | $A^0$ |
| 0 | 0 | $A^1$ |
| | | $A^2$ |

On a : $c_1A = 5c_1 - 3c_2$ et $c_2A = c_1A - c_2 + c_1$ , alors : $rang(Q_o) = 2$.
Les indices d'observabilité sont : $\tau_1 = 1,\ \tau_1 = 1$.
$\sum_{i=1}^{2} \tau_i = 2$, le système n'est observable.

### III. 6.3. FORMES CANONIQUES DES SYSTEMES MULTIVARIABLES

Dans cette section trois décompositions fondamentales seront étudiées :

**1-** Décomposition en $r$ sous systèmes mono-entrée commandables avec: $r < m$, où $m$ est le nombre d'entrées.
**2-** Décomposition en $m$ sous systèmes mono-entrée commandables.
**3-** Décomposition en $p$ sous systèmes mono-sortie observables, où $p$ est le nombre de sorties.

Les deux premières décompositions ont pour but de mettre sous une forme particulière l'ensemble des matrices $A$ et $B$ et on verra leurs importances dans l'étude du problème de commande par retour d'état. La troisième décomposition a pour but de simplifier les formes de $A$ et $C$ et sera utilisée dans le problème d'observation d'état.

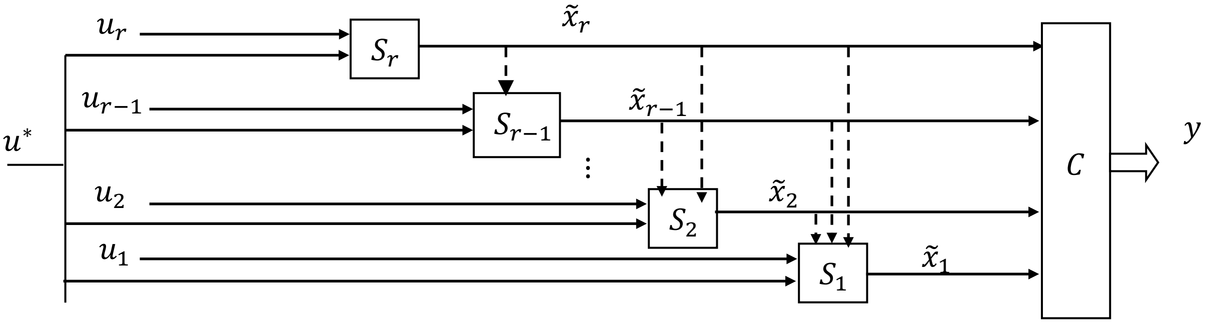
#### III.6.3.1. Décomposition en « r <m » sous systèmes mono-entrée commandables

On cherche à décomposer le système global de dimension $n$ et possédant $m$ entrées en un nombre de sous-systèmes $r$ avec $r < m$ tel que :

- Chaque sous-système soit commandable par une seule entrée,
- Ils soient hiérarchisés de telle sorte que :

$S_r$ agisse sur $S_{r-1} .... S_1$ ,
$S_{r-1}$ agisse sur $S_{r-2} .... S_1$,
…..
$S_2$ agisse sur $S_1$.

Il est à noter que les $m - r$ composantes de $u$ soit $u^* = [u_{r+1} \dots u_m]^T$ peuvent éventuellement agir sur tous les sous-systèmes.
On désigne par $n_i$ la dimension du sous-système $i$ et par $\tilde{x}_i$ son vecteur d'état.




L'équation d'état du sous-système $S_i$ est donc de la forme :

$$\dot{\tilde{x}}_i = \tilde{A}_{ii}\tilde{x}_i + \left[\tilde{A}_{i,i+1}\tilde{x}_{i+1} \dots + \tilde{A}_{ir}\tilde{x}_r\right] + B_i u_i + B^* u^*$$

La quantité entre crochet traduit l'interaction sur le sous-système $S_i$ des sous-systèmes $S_{i+1}$ jusqu'à $S_r$ .
Donc, les matrices $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont sous la forme triangulaire :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \dots & \tilde{A}_{1r} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \dots & \tilde{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{r1} & \tilde{A}_{r2} & \dots & \tilde{A}_{rr} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{cc} & \overset{r}{\longleftrightarrow} \quad \overset{m-r}{\longleftrightarrow} \\ \tilde{B} = & \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 & B_1^* \\ 0 & b_2 & \dots & 0 & B_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_r & B_r^* \end{bmatrix} \end{array}$$

Avec :

$$\tilde{A}_{ii}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0^i & -a_1^i & -a_2^i & \dots & -a_{n-1}^i\end{bmatrix},\quad \tilde{A}_{\substack{ij\\ i<j}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ * & * & \dots & *\end{bmatrix}\quad \tilde{A}_{\substack{ij\\ i>j}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\quad b_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique globale est sous la forme :

$$\left|SI-\tilde{A}\right|=\prod_{i=1}^{r}\left|SI-\tilde{A}_{ii}\right|=\prod_{i=1}^{r}\left(S^{n_i}+a_{n_{i-1}}^{i}S^{n_i-1}+\dots+a_0^i\right)$$

Maintenant, pour mettre le système sous cette forme (en $r$ sous-systèmes mono-entrée et commandables), il suffit de trouver une matrice de passage régulière $M$ tel que $x=M\tilde{x}$.

- ***Détermination de la matrice de passage M***

Soit un système de dimension $n$:

$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=Cx$$

On pose $x=M\tilde{x}$ avec $M$ est une matrice régulière, alors, il vient :

$$\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}u$$
$$y=\tilde{C}\tilde{x}$$

où: $\tilde{A}=M^{-1}A\,M$ , $\tilde{B}=M^{-1}B$, $\tilde{C}=\ CM$

On a : $\tilde{A}=M^{-1}A\,M\Rightarrow \tilde{A}M^{-1}=M^{-1}A$

$M$ est une matrice carrée inversible de dimensin $n$x$n$ composée de $r$ blocs ($M_1$ ,$M_2$ ... $M_r$ ) et chaque bloc $M_i$ $(i=1\dots r)$ contient $n_i$ lignes (idem pour $M^{-1}$)

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0^1 & -a_1^1 & \dots & -a_{n-1}^1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ * & * & \dots & *\end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ * & * & \dots & *\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0^2 & -a_1^2 & \dots & -a_{n-1}^2\end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ * & * & \dots & *\end{bmatrix}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0^i & -a_1^i & \dots & -a_{n-1}^i\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1^{-1}(1)\\ \vdots\\ M_1^{-1}(n_1)\\ M_2^{-1}(1)\\ \vdots\\ M_2^{-1}(n_2)\\ \vdots\\ M_r^{-1}(1)\\ \vdots\\ M_r^{-1}(n_r)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}M_1^{-1}(1)\\ \vdots\\ M_1^{-1}(n_1)\\ M_2^{-1}(1)\\ \vdots\\ M_2^{-1}(n_2)\\ \vdots\\ M_r^{-1}(1)\\ \vdots\\ M_r^{-1}(n_r)\end{bmatrix}A$$

- Determination des lignes du 1ier bloc de $M^{-1}$, c-à-d $M_1^{-1}(i)$ pour : $i=2\dots n_1$

$$M_1^{-1}(2)=M_1^{-1}(1)A$$
$$M_1^{-1}(3)=M_1^{-1}(2)A=M_1^{-1}(1)A^2$$
$$\vdots$$
$$M_1^{-1}(n_1)=M_1^{-1}(n_1-1)A=M_1^{-1}(1)A^{n_1-1}$$

- Determination des lignes du 2ième bloc de $M^{-1}$, c-à-d $M_2^{-1}(i)$ pour : $i=2\dots n_2$

$$M_2^{-1}(2) = M_2^{-1}(1)A$$
$$M_2^{-1}(3) = M_2^{-1}(2)A = M_2^{-1}(1)A^2$$
$$\vdots$$
$$M_2^{-1}(n_2) = M_2^{-1}(n_2-1)A = M_2^{-1}(1)A^{n_2-1}$$

- Determination des lignes du $r^{\text{ième}}$ bloc de $M^{-1}$, c-à-d $M_r^{-1}(i)$ pour : $i = 2 \dots n_r$

$$M_r^{-1}(2) = M_r^{-1}(1)A$$
$$M_r^{-1}(3) = M_r^{-1}(2)A = M_r^{-1}(1)A^2$$
$$\vdots$$
$$M_r^{-1}(n_r) = M_r^{-1}(n_r-1)A = M_r^{-1}(1)A^{n_r-1}$$

D'une façon générale, les lignes du $i^{\text{ième}}$ bloc de $M^{-1}$ pour $i = 2 \dots n_i$

$$M_i^{-1}(2) = M_i^{-1}(1)A$$
$$M_i^{-1}(3) = M_i^{-1}(2)A = M_i^{-1}(1)A^2$$
$$\vdots$$
$$M_i^{-1}(n_i) = M_i^{-1}(n_i-1)A = M_i^{-1}(1)A^{n_i-1}$$

- Determination de la 1ière ligne de chaque bloc de $M^{-1}$, c-à-d $M_i^{-1}(1)$ pour : $i = 1 \dots n_r$

On a: $\tilde{B} = M^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & B_1^* \\ 1 & * & * & \dots & * & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & B_2^* \\ 0 & 1 & * & \dots & * & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & B_r^* \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_1^{-1}(n_1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_2^{-1}(n_2) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(n_r) \end{bmatrix} [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_r \quad \dots \quad b_m]$$

En développant

$$\begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\quad r \quad} \; \overleftrightarrow{m-r} & \overleftrightarrow{\qquad\qquad r \qquad\qquad} \; \overleftrightarrow{\quad m-r \quad} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & B_1^* \\ 1 & * & * & \dots & * & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & B_2^* \\ 0 & 1 & * & \dots & * & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & B_r^* \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \end{array}\right] = & \left[\begin{array}{cccc|cc} M_1^{-1}(1)b_1 & M_1^{-1}(1)b_2 & \dots & M_1^{-1}(1)b_r & \dots & M_1^{-1}(1)b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_1^{-1}(n_1)b_1 & M_1^{-1}(n_1)b_2 & \dots & M_1^{-1}(n_1)b_r & \dots & M_1^{-1}(n_1)b_m \\ M_2^{-1}(1)b_1 & M_2^{-1}(1)b_2 & \dots & M_2^{-1}(1)b_r & \dots & M_2^{-1}(1)b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_2^{-1}(n_2)b_1 & M_2^{-1}(n_2)b_2 & \dots & M_2^{-1}(n_2)b_r & \dots & M_2^{-1}(n_2)b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_r^{-1}(1)b_1 & M_r^{-1}(1)b_2 & \dots & M_r^{-1}(1)b_r & \dots & M_r^{-1}(1)b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_r^{-1}(n_r)b_1 & M_r^{-1}(n_r)b_2 & \dots & M_r^{-1}(n_r)b_r & \dots & M_r^{-1}(n_r)b_m \end{array}\right] \end{array}$$

Par identification des blocs, on peut écrire :

$$M_1^{-1}(1)b_1 = 0$$
$$M_1^{-1}(2)b_1 = M_1^{-1}(1)Ab_1 = 0$$
$$\vdots$$
$$M_1^{-1}(n_1)b_1 = 1 = M_1^{-1}(1)A^{n_1-1}b_1$$

$$M_2^{-1}(1)b_2 = 0$$
$$M_2^{-1}(2)b_2 = M_2^{-1}(1)Ab_2 = 0$$
$$\vdots$$
$$M_2^{-1}(n_2)b_2 = 1 = M_2^{-1}(1)A^{n_2-1}b_2$$

$$M_r^{-1}(1)b_r = 0$$
$$M_r^{-1}(2)b_r = M_r^{-1}(1)Ab_r = 0$$
$$\vdots$$
$$M_r^{-1}(n_r)b_r = 1 = M_r^{-1}(1)A^{n_r-1}b_r$$

Sous forme compacte :

$$\begin{array}{l} M_1^{-1}(1)[b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{n_1-1}b_1] = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \\ M_2^{-1}(1)[b_2 \quad Ab_2 \quad \dots \quad A^{n_2-1}b_2] = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1)[b_r \quad Ab_r \quad \dots \quad A^{n_r-1}b_r] = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \end{array}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \end{bmatrix} \underbrace{[b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{n_1-1}b_1 \quad b_2 \quad Ab_2 \quad \dots \quad A^{n_2-1}b_2 \quad \dots b_r \quad Ab_r \quad \dots \quad A^{n_r-1}b_r]}_{Q_c} =$$

$$\begin{bmatrix} \overbrace{0 & \dots & 1}^{n_1} & \overbrace{0 & \dots & 0}^{n_2} & \dots & \overbrace{0 & \dots & 0}^{n_r} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} Q_c^{-1}$$

On pose :

$$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n1} \\ \vdots \\ q_{n1+n_2} \\ \vdots \\ q_{n_1+n_2+\dots+n_r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1^{-1}(1) \\ M_2^{-1}(1) \\ \vdots \\ M_r^{-1}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n1} \\ \vdots \\ q_{n1+n_2} \\ \vdots \\ q_{n_1+n_2+\dots+n_r} \end{bmatrix}$$

$n_1$ $\quad n_1+n_2 \quad n_1+n_2+\dots+n_r$

d'où :

$$M_i^{-1}(1) = q_{\sigma_i}$$

avec : $\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$

- ***Résumé : Décomposition d'un système MIMO en r<m sous-systèmes mono-entrée commandables***

*Soit un système MIMO d'ordre n*:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

1) *Calculer les indices de commandabilité* $n_1, n_2, \dots, n_r$ *en utilisant le choix par colonnes.*
2) *Déterminer la matrice de commandabilité :*

$$Q_C = [b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{n_1-1}b_1 \; \vdots \; b_2 \quad Ab_2 \quad \dots \quad A^{n_2-1}b_2 \; \vdots \; \dots \; \vdots \; b_r \quad Ab_r \quad \dots \quad A^{n_r-1}b_r]$$

3) *Calculer* $Q_c^{-1}$ :$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$ *avec* $q_i$ *la* $i^{\text{ème}}$ *ligne de* $Q_c^{-1}$
4) *Pour i =1…r, on définit* :$\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$

**5)** *Calculer $M^{-1}$ :*

$$M^{-1} == \begin{bmatrix} q_{\sigma_1} \\ q_{\sigma_1}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_1}A^{n_1-1} \\ \hdashline q_{\sigma_2} \\ q_{\sigma_2}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_2}A^{n_2-1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline q_{\sigma_r} \\ q_{\sigma_r}A \\ \vdots \\ q_{\sigma_r}A^{n_r-1} \end{bmatrix}$$

**6)** *Calculer $M$ et déterminer : $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$ , $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$ où :*

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

***Exemple 3.7*** Soit le système :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Décomposer le système en $r$ sous systèmes mono-entrée commandables.

$m = 2 \Longrightarrow r = 1$

1) Indices de commandabilité (choix par colonnes)

$$Q_c = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & A^2b_1 & b_2 & Ab_2 & A^2b_2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$n_1 = 3, n_2 = 0$

| $b_1$ | $b_2$ | |
|---|---|---|
| X | | $A^0$ |
| X | | $A^1$ |
| X | | $A^2$ |

2) $$Q_c = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & A^2b_1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

3) $$Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 5/2 & 4 & -3/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

4) $i = 1 \Rightarrow \sigma_1 = n_1 = 3$

5) $$M^{-1} = \begin{bmatrix} q_{\sigma_1} \\ q_{\sigma_1}A \\ q_{\sigma_1}A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_3A \\ q_3A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \\ 1/2 & 4 & -9/2 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

6) $$\tilde{A} = M^{-1}A\,M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \tilde{B} = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

#### III.6.3.2. Décomposition du système en « m » sous systèmes mono-entrée commandables

Soit le système multivariable d'ordre $n$ :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

On veut décomposer ce système en $m$ sous systèmes mono-entrée commandables où $m = rang(B)$. Il est possible de trouver une matrice de passage $M$ tel que $x = M\tilde{x}$, donc :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

avec : $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$ , $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$ , où :

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}0&1&\dots 0&0\\0&0&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\\-a_0^1&-a_1^1&\dots&-a_{n_1-1}^1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\\ *&\cdots&\cdots&*\end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\\ *&\cdots&\cdots&*\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\\ *&\cdots&\cdots&*\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&1&\dots 0&0\\0&0&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\\-a_0^2&-a_1^2&\dots&-a_{n_2-1}^2\end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\\ *&\cdots&\cdots&*\end{bmatrix}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\\ *&\cdots&\cdots&*\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\\ *&\cdots&\cdots&*\end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix}0&1&\dots 0&0\\0&0&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\\-a_0^m&-a_1^m&\dots&-a_{n_m-1}^m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix}
0&0&0&\dots&0\\
\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\
1&*&*&\cdots&*\\
0&0&0&\cdots&0\\
\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\
0&1&*&\dots&*\\
\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\
0&0&&0&0\\
\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\
0&0&\dots&0&1
\end{bmatrix}$$

- ***Détermination de la matrice de passage M***

Pour obtenir cette matrice on applique le même algorithme de la décomposition en $r$ sous-systèmes, le seul changement est dans la construction de la matrice de commandabilité qui se fait cette fois-ci en suivant *le choix par lignes*.

- ***Résumé : Décomposition d'un système multivariable en m sous-systèmes mono-entrée commandables***

*Soit un système mutivariable d'ordre n :*

$$\dot{x}(t)=Ax+Bu$$
$$y(t)=Cx$$

**1)** *Calculer les indices de commandabilité* $n_1, n_2, \dots, n_m$ *en utilisant le choix par ligne.*

**2)** *Déterminer la matrice de commandabilité :*

$$Q_C=[b_1\quad Ab_1\quad\dots\quad A^{n_1-1}b_1\;\; \vdots\;\; b_2\quad Ab_2\quad\dots\quad A^{n_2-1}b_2\quad\dots\;\; \vdots\;\; b_m\quad Ab_m\quad\dots\quad A^{n_m-1}b_m]$$

**3)** *Calculer* $Q_c^{-1}$ : $Q_c^{-1}=\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{bmatrix}$ *avec* $q_i$ *la* $i^{ième}$ *ligne de* $Q_c^{-1}$

**4)** *Pour i =1…m, on définit :* $\sigma_i=\sum_{j=1}^{i}n_j$

**5)** *Calculer* $M^{-1}$ : $M^{-1}=\begin{bmatrix}q_{\sigma_1}\\q_{\sigma_1}A\\\vdots\\q_{\sigma_1}A^{n_1-1}\\\hdashline q_{\sigma_2}\\q_{\sigma_2}A\\\vdots\\q_{\sigma_2}A^{n_2-1}\\\hdashline\vdots\\\hdashline q_{\sigma_m}\\q_{\sigma_m}A\\\vdots\\q_{\sigma_m}A^{n_m-1}\end{bmatrix}$

**6)** *Calculer M et déterminer :* $\tilde{A}=M^{-1}A\,M$ , $\tilde{B}=M^{-1}B$, $\tilde{C}=\;CM$ *où :*

$$\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}u$$
$$y=\tilde{C}\tilde{x}$$

***Exemple 3.8*** : Décomposer le système de l'exemple précédent en $m = 2$ sous système mono-entrée commandables.

1) Indices de commandabilité (choix par lignes)

$$Q_c = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & Ab_1 & A\,b_2 & A^2b_2 & A^2b_2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -3 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

$det[b_1 \quad b_2 \quad Ab_1] = 0$ (rejeté)

$det[b_1 \quad b_2 \quad Ab_2] \neq 0$

$n_1 = 1, n_2 = 2$

| $b_1$ | $b_2$ | |
|---|---|---|
| X | X | $A^0$ |
| 0 | X | $A^1$ |
| | | $A^2$ |

2) $Q_c = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & Ab_2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

3) $Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$

4) $i = 1 \Rightarrow \sigma_1 = n_1 = 1$

$i = 2 \Rightarrow \sigma_2 = n_1 + n_2 = 3$

5) $M^{-1} = \begin{bmatrix} q_{\sigma_1} \\ q_{\sigma_2} \\ q_{\sigma_2}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 A \\ q_3 A \end{bmatrix} =$

6) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7) $\tilde{A} = M^{-1}A\,M = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \tilde{B} = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

### III.6.3.3. Décomposition du système en « p » sous systemes mono-sortie observables

Si la décomposition en sous-systèmes commandables est conçue dans une optique de commande, cette nouvelle décomposition est destinée à faciliter le problème de la construction du vecteur d'état et sera à la base de la réalisation des observateurs d'état.

Pour obtenir cette décomposition, on fait appel au principe de dualité :

$$\underbrace{S(A,B,C)}_{systeme\ initial} \xrightarrow{Dual} S^*(A^T, C^T, B^T) \xrightarrow[\text{( calcul de } M^{*\,-1} \text{ et } M^* \text{)}]{\text{Décomposition en "p" sous systemes commandables}} \tilde{S}^*(\tilde{A}^T, \tilde{C}^T, \tilde{B}^T) \xrightarrow{Dual} \underbrace{\tilde{S}\ (\tilde{A}\ , \tilde{B}\ , \tilde{C}\ )}_{\text{Système décomposé en "p" sous systemes observables}}$$