CHAPITRE IV

COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT DES SYSTEMES MONOVARIABLES

IV.1. INTRODUCTION

L'objectif ici et la conception de la commande par retour d'état des systèmes linéaires. Le placement de pôles est la méthode générale utilisée, cette approche assure la stabilité du système bouclé d'une manière naturelle et permet également d'obtenir le comportement dynamique désiré par un choix approprié des modes (pôles) du système en boucle fermée. En effet, si le système est complètement commandable alors un placement arbitraire des pôles en boucle fermé sera possible par une loi de commande par retour d'état.

IV.2. COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT (SANS OBSERVATEUR)

IV.2.1. *PREAMBULE*

Etant donné un système en boucle ouverte défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Le système est supposé commandable.
Le principe de la méthode consiste à utiliser une loi de commande par retour d'état de la forme :

$$u(t) = -K\,x(t) + g\,y_c(t) \tag{4.2}$$

$y_c(t)$: est la consigne (sortie desirée).
g : est un gain de préreglage.
$K = [k_0\ k_1 \cdots k_{n-1}]$ est un vecteur ligne de *n* composantes appelé vecteur des gains du retour d'état
$X \in R^n$ vecteur d'état (vecteur colonne).
Le schéma bloc de la commande est présenté sur la figure (4.1).

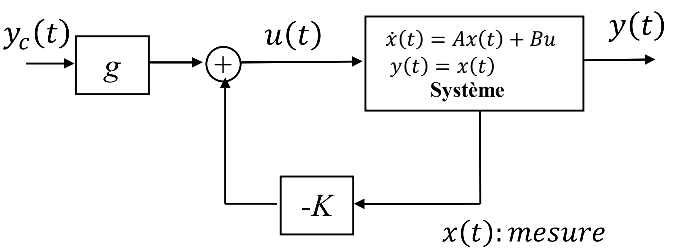

Figure 4.1 : commande par retour d'état

La fonction de transfert en boucle ouverte du système est :

$$G_{BO}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{4.3}$$

Si $D = 0$ alors $G_{BO}(s) = C(sI - A)^{-1}B$
L'équation caractéristique du système en boucle ouverte est :

$$det(SI - A) \quad = S^n + a_{n-1}\,S^{n-1} + \cdots + a_1 S + a_0 = 0 \tag{4.4}$$

Les pôles en boucle ouverte sont les valeurs propres de A obtenues à partir de l'équation (4.4).
En remplaçant la loi de commande dans l'équation d'état (4.1), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(-K\,x + g\,y_c) \\ y &= Cx + D(-K\,x + g\,y_c) \end{aligned}$$

Donc, la représentation d'état en boucle fermée est :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + Bg\,y_c \\ y(t) &= (C - DK)x(t) + Dgy_c \end{aligned} \tag{4.5}$$

La fonction de transfert en boucle fermée du système est :

$$G_{BF}(s) = \frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \left((C - DK)(sI - (A - BK))^{-1}B + D\right)g \qquad (4.6)$$

Si $D = 0$ alors $G_{BF}(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}Bg$

L'équation caractéristique du système en boucle fermée est :

$$det(SI - (A + BK)) = s^n + \beta_{n-1}(K)\, s^{n-1} + \cdots + \beta_1(K)s + \beta_0(K) = 0 \qquad 4.7)$$

Les pôles en boucle fermée sont les valeurs propres de $(A - BK)$ obtenues à partir de l'équation (5.7).

Remarque

Les coefficients de l'équation caractéristique du système en BF sont fonction de K, d'où un choix approprié du vecteur K permet d'imposer les pôles du système en BF, donc il nous permet d'améliorer la stabilité et les performances dynamiques (rapidité et amortissement) du système. Le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système.

$$Dynamique\ en\ BO : A \xrightarrow{application\ de\ la\ commande\ par\ retour\ d'eta} Dynamique\ en\ BF : (A - BK)$$

Donc, le problème de la commande par retour d'état consiste à trouver K qui stabilise le système en BF.

IV.2.2. CALCUL DE LA COMMANDE

IV.2.1.1. Performances dynamiques : calcul du gain de commande K

Le système (4.1) étant commandable à partir de la seule entrée, donc, il existe une matrice M inversible tel que : $x = M\tilde{x}$ qui permet de mettre le système sous forme canonique compagne de commandabilité :

$$\dot{\tilde{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}=M^{-1}A\,M} \tilde{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}=M^{-1}B} u(t)$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle ouverte :

$$P_{BO}(s) = s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

En appliquant la commande par retour d'état (4.2): $u(t) = -K\,x(t) + g\,y_c(t)$ avec : $K = [k_0\ k_1 \cdots k_{n-1}]$.

Dans la base canonique compagne de commandabilité, la commande devient :

$$x = M\tilde{x} \Rightarrow u(t) = -\underbrace{K\,M}_{\tilde{K}}\,\tilde{x} + g\,y_c(t)$$

$$u(t) = -\tilde{K}\,\tilde{x} + g\,y_c(t) \qquad (4.8)$$

Avec : $\tilde{K} = K\,M = [\tilde{k}_0\ \tilde{k}_1 \cdots \tilde{k}_{n-1}]$

Considérons le système dans la base canonique compagne de commandabilité :

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

En remplaçant la commande obtenue dans la base canonique compagne de commandabilité, on obtient la représentation d'état en boucle fermée :

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-\tilde{K}\,\tilde{x} + g\,y_c(t))$$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 + \tilde{k}_0) & -(a_1 + \tilde{k}_1) & -(a_2 + \tilde{k}_2) & \dots & -(a_{n-1} + \tilde{k}_{n-1}) \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g\,y_c(t) \qquad (4.9)$$

Le système en boucle fermée est sous forme compagne de comandabilité, donc, le polynôme caractéristique en boucle fermée est :

$$P_{BF}(s) = s^n + (a_{n-1} + \tilde{k}_{n-1})\, s^{n-1} + \cdots + (a_1 + \tilde{k}_1)s + (a_0 + \tilde{k}_0) \qquad (4.10)$$

En imposant « *n* » pôles désirées en boucle fermée $(p_1, p_2 \cdots p_n)$. Le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée s'écrit :

$$P_{BF}^d(s) = (s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n) = s^n + \alpha_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 \qquad (4.11)$$

En identifiant (4.10) et (4.11) terme à terme, il vient :

$$\begin{cases} \alpha_0 = a_0 + \tilde{k}_0 \\ \alpha_1 = a_1 + \tilde{k}_1 \\ \quad\vdots \\ \alpha_{n-1} = a_{n-1} + \tilde{k}_{n-1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \tilde{k}_0 = \alpha_0 - a_0 \\ \tilde{k}_1 = \alpha_1 - a_1 \\ \quad\vdots \\ \tilde{k}_{n-1} = \alpha_{n-1} - a_{n-1} \end{cases}$$

D'une manière générale : $\tilde{k}_i = \alpha_i - a_i$ avec: $i = 0 \dots n-1$

où :

a_i sont les coefficients du polynôme caractéristique en boucle ouverte.

α_i sont les coefficients du polynôme caractéristique désirée en boucle fermée.

Finalement, on revient à la base initiale : $K = \tilde{K}M^{-1}$

- ***Résume : Algorithme de placement de pôles –retour d'état***

Soit un système à commander :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

L'on dispose d'un spectre désiré (n pôles désirés en BF)

La commande par retour d'état à appliquer au système est : $u(t) = -K\, x(t) + g\, y_c(t)$

Etape 1 *: Vérification de la commandabilité du système : calcul du* $\det(Q_c)$

Etape 2 *: Mettre le système sous forme compagne commandable :* $x = M\tilde{x}$ *(calcul de* M *et* M^{-1}*)*

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

Avec : $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$

Etape 3 *: Détermination du polynôme caractéristique en BO :*

$$P_{BO}(s) = s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Etape 4 *: Détermination du polynôme caractéristique désiré en BF :*

$$P_{BF}^d(s) = s^n + \alpha_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Etape 5 *: Calcul du retour d'état* $\tilde{K} = [\tilde{k}_0\ \tilde{k}_1 \cdots \tilde{k}_{n-1}]$ *dans la base canonique de commandabilité.*

$$\tilde{k}_i = \alpha_i - a_i \quad \text{avec: } i = 0 \dots n-1$$

Etape 6 *: Calcul de retour d'état* $K = [k_0\ k_1 \cdots k_{n-1}]$ *dans la base initiale :*$K = \tilde{K}M^{-1}$

<u>Exemple 4.1</u> : Soit un système donné :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Concevoir un retour d'état de sorte que le système corrigé (c à d en boucle fermée) ait le pôle double -1.

Etape 1 : $Q_c = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $det(Q_c) = -1$

Etape 2 : : $Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

Etape 3 : $D_{BO}(s) = s^2 - 3\,s - 2$

Etape 4 : $D_{BF}^d(s) = s^2 + 2\,s + 1$

Etape 5 : $\tilde{K} = [\tilde{k}_0\ \tilde{k}_1] = [3\ \ 5]$

Etape 6 : $K = [k_0\ k_1] = \tilde{K}M^{-1} = [3\ \ 8]$.

IV.2.1.2. Performances statiques : calcul du gain de préréglage g

Dans un premier temps, nous allons déterminer une loi de commande telle que le gain statique du système en boucle fermée est unitaire pour assurer une poursuite parfaite. A cet effet, on utilise le dernier degré de liberté disponible, à savoir le gain de précommande g.
On a : la fonction de transfert en boucle fermée :

$$G_{BF}(s) = \left((C-DK)(sI-(A-BK))^{-1}B+D\right)g$$

Le gain statique ne boucle fermée $K_{BF} = G_{BF}(0)$
On imposant le gain statique unitaire en boucle fermée :

$$G_{BF}(0) = 1 = \left((C-DK)(0-(A-BK))^{-1}B+D\right)g$$

Alors :

$$g = (D-(C-DK)(A-BK)^{-1}B)^{-1}$$

Si $D = 0$ alors : $g = (-C(A-BK)^{-1}B)^{-1}$
Malheureusement cette approche ne garantie pas ces performance en régimes statique si le modèle du système n'est pas précis et/ou le système est perturbé.

IV.2.1.3. Performances statiques : Rejet de perturbations

Afin de surmonter les problèmes de l'approche précédente et de préserver les performances statiques même en présence de perturbations externes de type échelon, des perturbations paramétriques, ou des incertitudes du modèle, une solution alternative consiste à insérer une action intégrale dans la chaine directe afin d'augmenter la classe du système en boucle ouverte à 1 supposé 0. Dans le cas où le système est de classe supérieur ou égal à 1, on n'a pas besoin de cette solution et les performances statiques vis-à-vis à un échelon de consigne sont garanties.
La solution proposée consisté à réaliser le schéma de commande par retour d'état selon la figure (4.2).

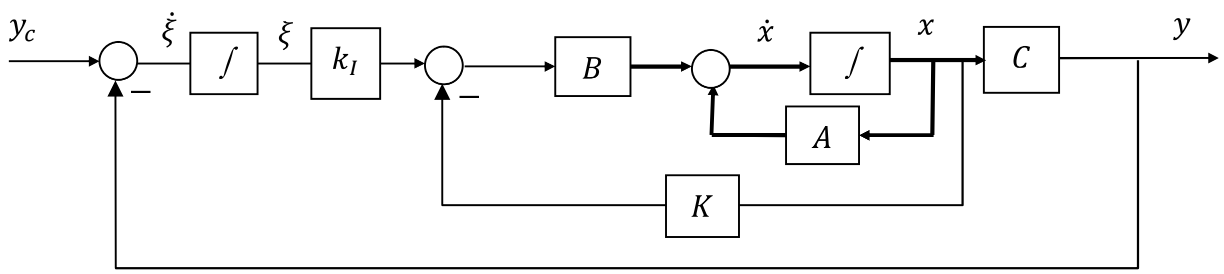

Figure 4.2 : Commande par retour d'état avec action intégrale

La nouvelle loi de commande est :

$$u(t) = -K\,x + k_I\xi = -[K \quad -k_I]\begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Avec ; $\dot{\xi} = y_c - y$
La loi de commande (4.12) peut être vue comme une commande par retour d'état impliquant un vecteur d'état augmenté de dimension $(n+1)$, formé par le vecteur d'état du système en boucle ouverte x et la variable d'état de l'intégrateur ξ. La nouvelle représentation d'état de dimension $(n+1)$ dus système en boucle fermé est :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A-BK & Bk_I \\ -C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_c \\ y(t) &= [C \quad 0]\begin{bmatrix} x(t) \\ \xi \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.13}$$

La matrice dynamique :

$$\begin{bmatrix} A-BK & Bk_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}[K \quad -k_I] = A^* - B^*K^*$$

Ainsi, comme les performances statiques sont assurées avec cette loi de commande, les performances dynamiques sont assurées en plaçant les $(n+1)$ pôles désirés en boucle fermée (valeurs propres de la matrice $A^* - B^*K^*$) au moyen du gain $K^* = [K \quad -k_I]$.

IV.3. COMMANDE PAR RETOUR DE SORTIE (RETOUR D'ETAT AVEC OBSERVATEUR)

Dans la section précédente, on a étudié le problème de la commande par retour d'état des systèmes monovariables en supposant la disponibilité (à la mesure) de toutes les variables d'état. Mais, Souvent pour des raisons de l'indisponibilité technique du capteur, de son coût, … etc., le nombre des variables d'état pouvant être mesurées par des capteurs est inférieur à celui du vecteur d'état (c.-à-d., qu'il y a des grandeurs d'état non mesurables). Dans ce cas la synthèse d'une loi de commande par retour d'état est alors compromise. On pose ainsi le problème de la synthèse d'un algorithme reconstituant le vecteur d'état, sur la base de la connaissance sur un intervalle de temps, d'une part de l'entrée du système et d'autre part de sa sortie (mesurable); c'est le problème de *l'observation*. Cette reconstitution ou estimation de l'état doit être faite en temps réel, l'observateur revêt usuellement la forme d'un système dynamique auxiliaire.

IV.3.1. Observateur d'état

On appelle observateur un système dynamique capable de reproduire (ou estimer) les états non mesurables d'un système à partir de la seule connaissance de l'entrée et la sortie du système et éventuellement les états mesurables.

IV.3.1.1. Observateur en boucle ouverte

Soit le système d'ordre *n* défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{4.14}$$

L'observateur est défini par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned}$$

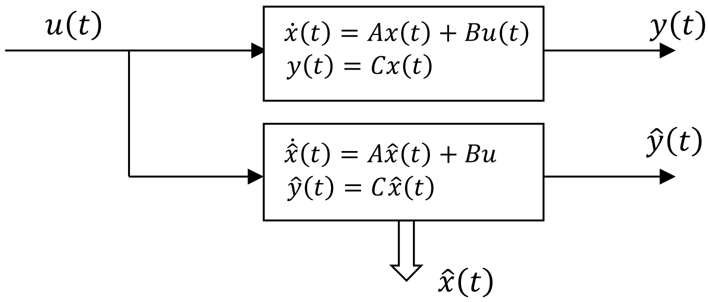

Figure 4.1 Observateur d'état en boucle ouverte.

- ***Erreur d'observation***

L'erreur d'observation est :

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - \hat{x}(t) \\ \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{e}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) \\ &= A\big(x(t) - \hat{x}(t)\big) = A\,e(t) \\ \Rightarrow e(t) &= e(0)e^{A\,t} \end{aligned}$$

Si la partie réelle des valeurs propres de A est négative (système stable), alors, l'erreur d'observation converge vers zéro.

Remarque: On remarque que l'observateur et le système ont la même dynamique (ont les mêmes pôles), alors que *la dynamique d'un observateur doit être plus rapide que celle du système* à observer afin de pouvoir l'insérer dans la boucle de commande.

IV.3.1.2. Observateur en boucle fermée

Soit le système d'ordre *n* défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

L'observateur en boucle fermée est défini par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y}) \tag{4.15}$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \tag{4.16}$$

Où $L(y - \hat{y})$ est un terme de correction, L est un vecteur colonne de dimension *n*

En remplaçant (4.15) dans (4.14) on obtient :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly$$

On remarque que la matrice d'état de l'observateur est $(A - LC)$, donc on peut influencer la dynamique (stabilité et rapidité) de l'observateur en agissant sur le vecteur L (désigné par l'opérateur).

- ***Erreur d'observation***

$$e(t) = x(t) - \hat{x}\,(t)$$
$$\dot{e}\,(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}\,(t)$$
$$\dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - L(y - \hat{y})$$
$$\dot{e}(t) = A[x(t) - \hat{x}(t)] - LC(x - \hat{x})$$
$$\dot{e}(t) = \underbrace{(A - LC)}_{A_{ob}}(x - \hat{x}) = (A - LC)e(t)$$
$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

Alors la trajectoire de l'erreur est :

$$e(t) = e(0)e^{(A-LC)\,t}$$

La dynamique de l'erreur d'observation est la sortie d'un système du premier ordre stable imposé par l'utilisateur (en utilisant L), donc l'erreur d'observation tend asymptotiquement vers zéro, après un régime transitoire. L'observateur suit correctement l'évolution du système à commander (suit l'évolution des états).

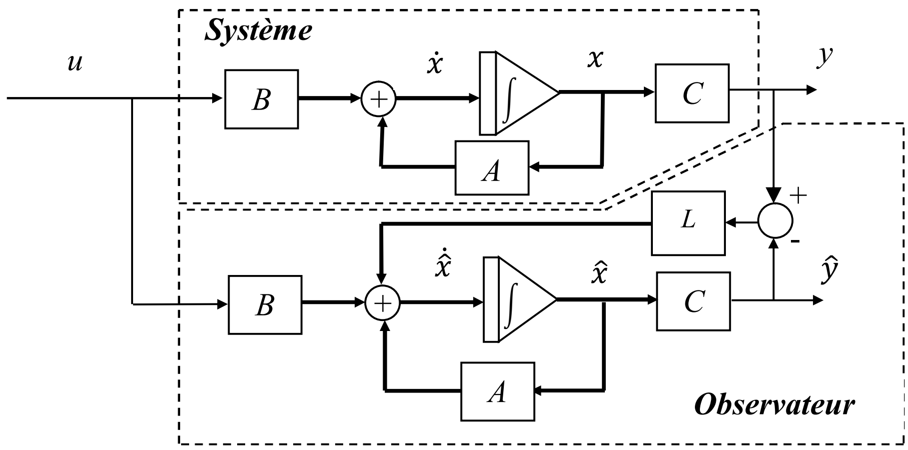

Figure 4.3 Observateur d'état en boucle fermée.

IV.3.1.3. *Commande* par retour de sortie (retour d'état avec observateur)

Le principe de la commande par retour d'état avec observateur consiste à utiliser l'état estimé par un observateur pour ensuite construire un retour d'état comme le montre sur la figure 4.4.

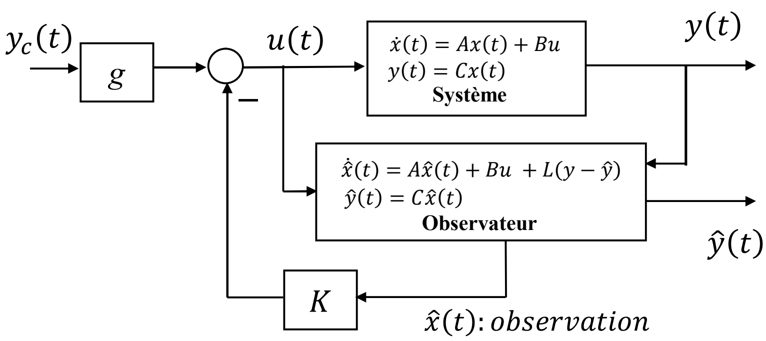

Figure 4.4 Schéma de principe de la commande par retour d'état avec d'observateur.

a) Principe de séparation

Soit le système monovariable d'ordre n :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned} \qquad (4.17)$$

avec l'observateur :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu + L(y - \hat{y})\\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned} \qquad (4.18)$$

Le retour d'état avec observateur est :

$$u(t) = g\, y_c(t) - K\,\hat{x}(t) \qquad (4.19)$$

En remplçant (4.19) dans (4.17) et (4.18), il vient :

$$\dot{x} = Ax - B\,K\,\hat{x} + Bgy_c \qquad (4.20)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - B\,K\,\hat{x}\ + +Bgy_c + LC(x - \hat{x}) \qquad (4.21)$$

On met (4.19) et (4.20) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\hat{x}}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}A & -B\,K\\ LC & A - BK - LC\end{bmatrix}}_{A_G}\begin{bmatrix}x\\ \hat{x}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B\\ B\end{bmatrix} gy_c \qquad (4.22)$$

$A_G = \begin{bmatrix}A & -B\,K\\ LC & A - BK - LC\end{bmatrix}$ est la matrice d'évolution globale (système+observateur)

1ière colonne= 1ière colonne +2ième colonne :

$$A_G = \begin{bmatrix}A - B\,K & -B\,K\\ A - BK & A - BK - LC\end{bmatrix}$$

2ième ligne= 2ième ligne - 1ière ligne :

$$A_G = \begin{bmatrix}A - B\,K & -B\,K\\ 0 & A - LC\end{bmatrix}$$

L'équitation caractéristique du système global est :

$$det\big[\big(sI - (A - B\,K\,)\big) \times \big(sI - (A - LC)\big)\big] = 0$$

$$|sI - (A - B\,K)| \times |sI - (\,A - LC)| = 0 \qquad (4.23)$$

$$\begin{cases}|sI - (A - B\,K)| = 0\\ |sI - (\,A - LC)| = 0\end{cases}$$

$(A - B\,K)$: matrice dynamique du système bouclé.

$(\,A - LC)$: matrice dynamique de l'observateur.

La dynamique du système global est constituée par la dynamique due au retour d'état plus celle due à l'observateur. Donc, le vecteur K (gain de commande) et le vecteur L (gain d'observateur) se calculent indépendamment (séparément).

b) Calcul de K (déjà fait au chapitre précèdent)

c) Calcul de L :

Dans la base initiale, on a

$$\text{Système : }\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu(t)\\ y = Cx\end{cases}$$

$$\text{Observateur : }\begin{cases}\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y})\\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t)\end{cases}$$

$$\text{Observateur: }\begin{cases}\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly\\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t)\end{cases}$$

La matrice d'évolution de l'observateur : $A_{obs} = A - LC$, où $L = [l_0 \quad l_1 \quad \cdots \quad l_{n-1}]^T$

Afin de faciliter les calculs, il faut mettre le système sous forme compagne observabilité.

$$\text{Système : }\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u(t)\\ y = \tilde{C}\tilde{x}\end{cases}$$

$$\text{Observateur : }\begin{cases}\dot{\hat{\tilde{x}}}(t) = \tilde{A}\hat{\tilde{x}}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{L}\big(y - \hat{y}\big)\\ \hat{y}(t) = \tilde{C}\hat{\tilde{x}}(t)\end{cases} = \begin{cases}\dot{\hat{\tilde{x}}}(t) = (\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C})\hat{\tilde{x}}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{L}y\\ \hat{y}(t) = \tilde{C}\hat{\tilde{x}}(t)\end{cases}$$

La matrice d'évolution de l'observateur : $\tilde{A}_{obs} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$, où : $\tilde{L} = \big[\tilde{l}_0 \quad \tilde{l}_1 \quad \cdots \quad \tilde{l}_{n-1}\big]^T$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix},\qquad \tilde{B}=\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_{n-1}\end{bmatrix},\qquad \tilde{C}=[0\ \ 0\dots 0\ \ 0\ \ 1]$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle ouverte:

$$D_{BO}(S)=S^n+a_{n-1}\,S^{n-1}+\dots+\ a_1S+a_0$$

La matrice d'évolution de l'observateur dans la base observable est :

$$\tilde{A}_{ob}=\tilde{A}-\tilde{L}\tilde{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tilde{l}_0\\ \tilde{l}_1\\ \tilde{l}_2\\ \vdots\\ \tilde{l}_{n-1}\end{bmatrix}[0\ \ 0\dots\ \ 0\ \ 1]$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & -(a_0+\tilde{l}_0)\\ 1 & 0 & \dots & 0 & -(a_1+\tilde{l}_1)\\ 0 & 1 & \dots & 0 & -(a_2+\tilde{l}_2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(a_{n-1}+\tilde{l}_{n-1})\end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de l'observateur en boucle fermée :

$$D_{BF}^{obs}(s)=s^n+(a_{n-1}+\tilde{l}_{n-1})\,s^{n-1}+\dots+\ (a_1+\tilde{l}_1)s+(a_0+\tilde{l}_0)$$

En imposant n pôles pour l'observateur en boucle fermée : $p'_1\cdots p'_n$

Le polynôme caractéristique désiré de l'observateur en boucle fermée s'écrit :

$$D_{BF-d}^{obs*}(S)=(s-p'_1)(s-p'_2)\cdots(s-p'_n)$$

En développant, on obtient :

$$D_{BF}^{obs*}(s)=s^n+\beta_{n-1}\,s^{n-1}+\dots+\ \beta_1s+\beta_0$$

En identifiant (6.13) et (6.14) terme à terme, il vient :

$$\begin{cases}\alpha_0=a_0+\tilde{l}_0\\ \alpha_1=a_1+\tilde{l}_1\\ \quad\vdots\\ \alpha_{n-1}=a_{n-1}+\tilde{l}_{n-1}\end{cases}\qquad\Rightarrow\begin{cases}\tilde{l}_0=\beta_0-a_0\\ \tilde{l}_1=\beta_1-a_1\\ \quad\vdots\\ \tilde{l}_{n-1}=\beta_{n-1}-a_{n-1}\end{cases}$$

D'une manière générale :

$$\tilde{l}_i=\beta_i-a_i\quad avec: i=0\dots n-1$$

où : a_i sont les coefficients de l'équation caractéristique du système en boucle ouverte. β_i sont les coefficients de l'équation caractéristique désirée de l'observateur en boucle fermée.

Retour à la base initiale (calcul de L en fonction de $\tilde{L}$)

La matrice d'évolution de l'observateur dans la base canonique observable est : $\tilde{A}_{obs}=\tilde{A}-\tilde{L}\tilde{C}$. A partir de cette matrice, on veut arriver à la matrice d'évolution exprimée dans la base initiale soit :

$$A_{obs}=A-LC$$

avec :

$$L=\left(M^{*-1}\right)^T\tilde{L}$$

d) Résume: algorithme de synthèse d'un observateur d'état (cas des systèmes SISO)

Soit un système à commander :

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)$$

L'observateur en BF est défini par :

$$\dot{\hat{x}}(t)=A\hat{x}(t)+Bu(t)+L(y-\hat{y})$$
$$\hat{y}(t)=C\hat{x}(t)$$

L'on dispose d'un spectre désiré pour l'observateur (n pôles désirés de l'observateur en BF)

Etape 1 : *Vérification de l'observabilité du système : calcul du* $det(Q_o)$
Etape 2 : *Mettre le système sous forme compagne observable :*

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

Etape 3 : *Détermination du polynôme caractéristique en BO :*

$$D_{BO}(S) = S^n + a_{n-1}\,S^{n-1} + \cdots + \ a_1 S + a_0$$

Etape 4 : *Détermination du polynôme caractéristique désiré de l'observateur en BF:*

$$D_{BF}^{obs*}(S) = S^n + \beta_{n-1}\,S^{n-1} + \cdots + \ \beta_1 S + \beta_0$$

Etape 5 : *Calcul du vecteur* $\tilde{L} = [\tilde{l}_0\ \tilde{l}_1 \cdots \tilde{l}_{n-1}]^T$ *dans la base canonique compagne d'observabilité.*

$$\tilde{l}_i = \beta_i - a_i \quad avec: i = 0 \ldots n-1$$

Etape 6 : *Calcul du vecteur* $L = [l_0\ l_1 \cdots l_{n-1}]^T$ *, c-à-d, retour à la base initiale :*

$$L = \left(M^{*-1}\right)^T \tilde{L}$$

Exemple 4.2: Soit un système donné :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -4\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y(t) = [1 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Concevoir un observateur d'état ayant en boucle fermée le pôle double $p = -5$.

Etape 1 : Vérification de l'observabilité du système : calcul du $det(Q_o)$

$$det(Q_o) = [C \quad CA]^T = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1$$

Etape 2 : Mettre le système sous forme compagne observable :

Système dual: $A^T = \begin{bmatrix}-2 & 2\\ -4 & 5\end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, B^T = [-1 \quad 1]$

Mettre le système dual sous forme compagne de commandabilité

$Q_c^* = [C^T \quad A^T C^T] = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, Q_c^{*-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$M^{*-1}(1) = Q_c^{*-1}(2) = [-1 \quad 1]$

$M^{*-1}(2) = Q_c^{*-1}(1)A = [-2 \quad 3]$

$M^{*-1} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}, M^* = \begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

Système dual sous forme compagne de commandabilité

$\tilde{A}^T = M^{*-1}A^T M^* = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}, \tilde{C}^T = M^{*-1}C^T = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, \tilde{B}^T = B^T M^* = [1 \quad 0]$

Alors, la forme compagne d'observabilité du système est :

$\tilde{A} = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, \tilde{C} = [0 \quad 1]$

Etape 3 : Détermination du polynôme caractéristique en BO :

$$D_{BO}(S) = S^2 - 3\,S - 2 \ \Rightarrow a_0 = 2, a_1 = -3$$

Etape 4 : Détermination du polynôme caractéristique désiré de l'observateur en BF:

$$D_{BF}^{obs*}(S) = (S+5)(S+5) = S^n + 10\,S + 25 \ \Rightarrow \beta_0 = 25, \beta_1 = 10$$

Etape 5 : Calcul du vecteur $\tilde{L} = [\tilde{l}_0\ \tilde{l}_1]^T$ *dans la base canonique compagne d'observabilité*

$$\tilde{l}_0 = \beta_0 - a_0 = 27$$
$$\tilde{l}_1 = \beta_1 - a_1 = 13$$

Etape 6 : Calcul du vecteur $L = [l_0\ l_1]^T$ *, c-à-d, retour à la base initiale :*

$$L = \left(M^{*-1}\right)^T \tilde{L} = \begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}27\\ 13\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-53\\ 66\end{bmatrix}$$