CHAPITRE V

COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT DES SYSTEMES MULTIVARIABLES

V.1. INTRODUCTION

La commande par retour d'état des systèmes multivariables est une généralisation de la commande par retour d'état des systèmes monovariables. En effet, Le placement de pôles est la méthode utilisée pour la correction des systèmes linéaires multivariables. Son principe consiste à déterminer une loi de commande (un régulateur) par retour d'état de façon à ce que le système en boucle fermée ait des pôles spécifiés par l'opérateur, cette approche assure la stabilité du système bouclé d'une manière naturelle et permet également d'obtenir le comportement dynamique désiré par un choix approprié des modes (pôles) du système en boucle fermée.

V.2. COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT SYSTEMES MULTIVARIABLES

Soit le système multivariable de dimension n :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

avec : $A(n \times n), B(n \times m),\ C(p \times n)$

La loi de commande par retour d'état est :

$$u = -K\,x + g\,y_c$$

y_c : est le vecteur regroupant les consignes (sorties desirées) de dimension $(p \times 1)$

g : est un matrice de préreglage de dimension $(m \times p)$.

K : est une matrice de dimension $(m \times n)$ appelé matrice des gains du retour d'état.

V.2.1. Système complètement commandable par r (r<m) entrées

On décompose le système en r sous-systèmes commandables, chacun par une seule entrée, alors, on pose $x = M\tilde{x}$, il vient :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

Où $\tilde{A} = M^{-1}A\,M$, $\tilde{B} = M^{-1}B$, $\tilde{C} = CM$, $u = -\tilde{K}\tilde{x} + g\,y_c$ avec : $\tilde{K} = KM$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix}
\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^1 & -a_1^1 & \dots & -a_{n_1-1}^1 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{11}} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^2 & -a_1^2 & \dots & -a_{n_2-1}^2 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{22}} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} & \dots & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^r & -a_1^r & \dots & -a_{n_r-1}^r \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{rr}}
\end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}=\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{0 \quad 0 \quad 0}}^{r}\ \overbrace{\hphantom{B_1^*}}^{m-r} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & B_1^* \\ 1 & * & * & \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & B_2^* \\ 0 & 1 & * & \\ & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & B_r^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \updownarrow n_1 \\ \\ \\ \\ \updownarrow n_2 \\ \\ \\ \\ \updownarrow n_r \\ \\ \end{array}$$

L'equation caracteristique du système global en boucle ouverte s'ecrit comme :

$$D_{BO}(s)=\left|sI-\tilde{A}\right|=\prod_{i=1}^{r}\left|sI-\tilde{A}_{ii}\right|=\prod_{i=1}^{r}\left(s^{n_i}+a_{n_{i-1}}^{i}s^{n_i-1}+\cdots+a_1^i s+a_0^i\right)$$

On désigne par n_i l'indice de commandabilité de u_i qui est la dimension du sous-système i, donc chaque entrée u_i commande un sous-système composé de n_i états.

$$u=-\tilde{K}\tilde{x}+gy_c$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \\ \hline u_{r+1} \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}}_{u} = \begin{array}{c} \updownarrow r \\ \\ \updownarrow m-r \end{array} \underbrace{\left[\begin{array}{ccccccccccccc} \tilde{k}_0^1 & \tilde{k}_1^1 & \dots & \tilde{k}_{n_1-1}^1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{k}_0^2 & \tilde{k}_1^2 & \dots & \tilde{k}_{n_2-1}^2 & \dots & & \vdots & \\ & \vdots & & & \vdots & & & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & \tilde{k}_0^r & \tilde{k}_1^r & \dots & \tilde{k}_{n_r-1}^r \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]}_{\tilde{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n_1} \\ \tilde{x}_{n_1+1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n_1+n_2} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n_1+n_2+\cdots+n_{r-1}} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n_1+n_2+\cdots+n_r} \end{bmatrix}}_{\tilde{x}} + gy_c$$

En remplaçant la loi de commande (5.15) dans (5.14), il vient :

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\underbrace{\left(\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K}\right)}_{\tilde{A}_{BF}}\tilde{x}+gy_c \qquad \text{où} \quad \tilde{A}_{BF}=\left(\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K}\right)$$

$$\tilde{B}\tilde{K}=\begin{bmatrix} \begin{matrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ \tilde{k}_0^1 & \tilde{k}_1^1 \ \dots & \tilde{k}_{n_1-1}^1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ & \ddots & \\ \begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} & \vdots & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ \tilde{k}_0^r & \tilde{k}_1^r \ \dots & \tilde{k}_{n_r-1}^r \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{BF}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \\ -(a_0^1+\tilde{k}_0^1) & -(a_1^1+\tilde{k}_1^1) & \dots & -(a_{n_1-1}^1+\tilde{k}_{n_1-1}^1) \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -(a_0^r+\tilde{k}_0^r) & -(a_1^r+\tilde{k}_1^r) & \dots & -(a_{n_r-1}^r+\tilde{k}_{n_r-1}^r) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique du système global en boucle fermée est :

$$D_{BF}(s)=\left|sI-\tilde{A}_{BF}\right|=\prod_{i=1}^{r}\left(s^{n_i}+(a_{n_{i-1}}^{i}+\tilde{k}_{n_{i-1}}^{i})S^{n_i-1}+\cdots+(a_1^i+\tilde{k}_1^i)s+(a_0^i+\tilde{k}_0^i)\right)$$

Le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée est :

$$D_{BF}{}^{d}(s) = \left|sI - \tilde{A}_{BF}^{d}\right| = \prod_{i=1}^{r}\left|sI - \tilde{A}_{ii}{}_{BF}^{d}\right| = \prod_{i=1}^{r}\left(s^{n_i} + \alpha_{n_i-1}^{i}s^{n_i-1} + \cdots + \alpha_1^i\, s + \alpha_0^i\right)$$

Par identification de (5.16) et (5.17), il vient (pour $i = 1 \ldots r$) :

$$\begin{array}{lcl} \alpha_0^i = a_0^i + \tilde{k}_0^i & & \tilde{k}_0^i = \alpha_0^i - a_0^i \\ \alpha_1^i = a_1^i + \tilde{k}_1^i & \Rightarrow & \tilde{k}_1^i = \alpha_1^i - a_1^i \\ \quad\vdots & & \quad\vdots \\ \alpha_{n_i-1}^i = a_{n_i-1}^i + \tilde{k}_{n_i-1}^i & & \tilde{k}_{n_i-1}^i = \alpha_{n_i-1}^i - a_{n_i-1}^i \end{array}$$

où

a_j^i sont les coefficients de l'équation caractéristique en boucle ouverte du sous-système i.

α_j^i sont les coefficients de l'équation caractéristique désirée en boucle fermée du sous-système i.

Finalement, on retourne à la base réel :

$$K = M^{-1}\tilde{K}$$

- ***Résumé : Algorithme de placement de pôles – décomposition en r (r<m) sous-systèmes commandables***

Soit un système à commander :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

On dispose de n pôles désirés en boucle fermée.
La commande par retour d'état à appliquer au système est : $u(t) = g\, y_c(t) - K\, x(t)$

Etape 1 *: Décomposer le système en r (r<m) s. s. commandables :* $x = M\tilde{x}$ *(calcul de* M *et* M^{-1}*)*

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u \qquad \textit{Avec :}\ \tilde{A} = M^{-1}A\,M\,, \tilde{B} = M^{-1}B\,, \tilde{C} = CM$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

Etape 2 *: Détermination du polynôme caractéristique du système global en BO :*

$$D_{BO}(S) = \left|sI - \tilde{A}\right| = \prod_{i=1}^{r}\left|sI - \tilde{A}_{ii}\right| = \prod_{i=1}^{r}\left(s^{n_i} + a_{n_{i-1}}^{i}s^{n_i-1} + \cdots + a_0^i\right)$$

Etape 3 *: Détermination du polynôme caractéristique désiré en BF :*

$$D_{BF}^{d}(S) = \left|sI - \tilde{A}_{BF}^{d}\right| = \prod_{i=1}^{r}\left|sI - \tilde{A}_{ii}{}_{BF}^{d}\right| = \prod_{i=1}^{r}\left(s^{n_i} + \alpha_{n_i-1}^{i}s^{n_i-1} + \cdots + \alpha_1^i\, s + \alpha_0^i\right)$$

Etape 4 *: Calcul du retour d'état* $\tilde{K}$ *dans la base canonique compagne de commandabilité pour* $i = 1 \ldots r$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_0^1 & \tilde{k}_1^1 & \ldots & \tilde{k}_{n_1-1}^1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & & \tilde{k}_0^2 & \tilde{k}_1^2 & \ldots & \tilde{k}_{n_2-1}^2 & \ldots & & \vdots \\ & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & & 0 & \ldots & 0 & & \tilde{k}_0^r & \tilde{k}_1^r \ \ldots & \tilde{k}_{n_r-1}^r \\ 0 & \ldots & 0 & & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \ldots & 0 & & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_j^i = \alpha_j^i - a_j^i \quad \textit{avec}: j = 0 \ldots n_i - 1$$

Etape 5 *: Calcul de la matrice des gains K du retour d'état dans la base initiale :* $K = \tilde{K}M^{-1}$

Exemple : Soit le système :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}x$$

Calculer le retour d'état K permettant d'avoir en boucle fermée les pôles :

$$p_1 = -1, p_2 = -2,\ p_3 = -3,\ p_4 = -4.$$

V.2.2. Système *complètement commandable par « m » entrées*

On décompose le système en $m = rang(B)$ sous systèmes commandables.
On pose $x = M\tilde{x}$, il vient :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

où :
$\tilde{A} = M^{-1}A\,M\,, \tilde{B} = M^{-1}B, \tilde{C} = CM,\ u = -\tilde{K}\tilde{x} + g\,y_c$ avec : $\tilde{K} = KM$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^1 & -a_1^1 & \dots & -a_{n_1-1}^1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} & \cdots &
\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^2 & -a_1^2 & \dots & -a_{n_2-1}^2 \end{bmatrix} & \cdots &
\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{bmatrix} & \cdots &
\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^m & -a_1^m & \dots & -a_{n_m-1}^m \end{bmatrix}
\end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1m} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Cette fois-ci la matrice $\tilde{A}$ n'est pas triangulaire par bloc, ceci va compliquer le calcul de l'équation caractéristique en boucle ouverte. Cependant, on peut choisir une matrice des gains K de façon que la matrice $\tilde{A}_{BF}$ soit triangulaire.
Pour des raisons de simplicité et de lisibilité des expressions, on se limite au cas où le système est décomposé en deux sous systèmes (*m*=2).

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ [& & a_{11} & &] \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [& & a_{12} & &] \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [& & a_{21} & &] \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ [& & a_{22} & &] \end{bmatrix}
\end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & r_{12} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{BF} = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ [& & a_{11} - \tilde{k}_{11} - r_{12}\tilde{k}_{21} & &] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [& & a_{12} - r_{12}\tilde{k}_{22} & &] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [& & a_{21} - \tilde{k}_{21} & &] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ [& & a_{22} - \tilde{k}_{22} & &] \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^{d}_{BF} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ [& & \alpha_{11} & &] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [& & \alpha_{12} & &] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [& & \alpha_{21} & &] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ [& & \alpha_{22} & &] \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Pour avoir une matrice $\tilde{A}_{BF}$ triangulaire, on prend $\alpha_{21} = [0 \quad \dots \quad 0]$.

Par identification de $\tilde{A}_{BF}$ et $\tilde{A}^{d}_{BF}$ terme à terme, il vient :

$$\begin{aligned} \alpha_{22} &= a_{22} - \tilde{k}_{22} \\ a_{21} - \tilde{k}_{21} &= 0 \\ \alpha_{11} &= a_{11} - \tilde{k}_{11} - r_{12}\tilde{k}_{21} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{k}_{22} &= a_{22} - \alpha_{22} \\ \tilde{k}_{21} &= a_{21} \\ \tilde{k}_{11} &= a_{11} - r_{12}\tilde{k}_{21} - \alpha_{11} \end{aligned}$$

Dans le cas général :

$$\tilde{k}_{mm} = a_{mm} - \alpha_{mm}$$
$$\tilde{k}_{ij} = a_{ij} \quad i > j$$
$$\tilde{k}_{ii} = a_{ii} - \alpha_{ii} - \sum_{j=i+1}^{m} r_{ij}\tilde{k}_{ji}$$

Finalement : $K = \tilde{K}M^{-1}$

Résumé : Algorithme de placement de pôles – décomposition en m sous-systèmes commandables

Soit un système à commander :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

On dispose de n pôles désirés en BF
La commande par retour d'état à appliquer au système est : $u(t) = g\, y_c(t) - K\, x(t)$

***Etape 1** : Décomposer le système en « m » s. s. commandables :* $x = M\tilde{x}$ *(calcul de* M *et* M^{-1}*)*

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B}u \qquad \text{Avec : } \tilde{A} = M^{-1}A\,M\,, \tilde{B} = M^{-1}B\,, \tilde{C} = CM$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

Etape 2 *: Détermination des vecteurs* a_{ij} *et des scalaires* r_{ij}

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}[\tilde{A}_{11}] & \cdots & [\tilde{A}_{1m}]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ [\tilde{A}_{m1}] & \cdots & [\tilde{A}_{mm}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ \underbrace{[-a_0^1 & -a_1^1 & \dots & -a_{n_1-1}^1]}_{a_{11}}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \underbrace{[* & \cdots & \cdots & *]}_{a_{1m}}\end{bmatrix}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \begin{bmatrix}0 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \underbrace{[* & \cdots & \cdots & *]}_{a_{m1}}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0 & 1 & \dots 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ \underbrace{[-a_0^m & -a_1^m & \dots & -a_{n_m-1}^m]}_{a_{mm}}\end{bmatrix}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & r_{12} & r_{1m}\\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & & 1\end{bmatrix}$$

Etape 3 *: Détermination des vecteurs :* α_{ij} *, On veut une matrice* $\tilde{A}_{BF}^{d}$*triangulaire, donc*

$$D_{BF}^{d}(S)=\prod_{i=1}^{m}(sI-p_i)=\prod_{i=1}^{m}\left(s^{n_i}+\alpha_{n_i-1}^{i}s^{n_i-1}+\cdots+\alpha_1^i\,s+\alpha_0^i\right)$$

$$=\underbrace{\left(s^{n_1}+\alpha_{n_1-1}^{1}s^{n_1-1}+\cdots+\alpha_0^1\right)}_{\downarrow\ \tilde{A}_{11}^{d}}\times\ldots\times\underbrace{\left(s^{n_m}+\alpha_{n_m-1}^{m}s^{n_m-1}+\cdots+\alpha_0^m\right)}_{\downarrow\ \tilde{A}_{mm}^{d}}$$

$$\tilde{A}_{BF}^{d}=\begin{bmatrix}[\tilde{A}_{11}^{d}] & \cdots & [*]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ [0] & \cdots & [\tilde{A}_{mm}^{d}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ \underbrace{[-\alpha_0^1 & -\alpha_1^1 & \dots & -\alpha_{n_1-1}^1]}_{\alpha_{11}}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \underbrace{[* & \cdots & \cdots & *]}_{\alpha_{1m}}\end{bmatrix}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \begin{bmatrix}0 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \underbrace{[0 & \cdots & \cdots & 0]}_{\alpha_{m1}}\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0 & 1 & \dots 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ \underbrace{[-\alpha_0^m & -\alpha_1^m & \dots & -\alpha_{n_m-1}^m]}_{\alpha_{mm}}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

Etape 4 *: Calcul du retour d'état* $\tilde{K}$*dans la base canonique compagne de commandabilité.*

$$\tilde{K}=\begin{bmatrix}\tilde{k}_{11} & 0 & \dots & 0\\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ \tilde{k}_{m1} & \tilde{k}_{m2} & \dots & \tilde{k}_{mm}\end{bmatrix}_{(m\times n)}\qquad avec:\qquad \begin{array}{l}\tilde{k}_{mm}=a_{mm}-\alpha_{mm}\\ \tilde{k}_{ij}=a_{ij}\ \ pour\ \ i>j\\ \tilde{k}_{ii}=a_{ii}-\alpha_{ii}-\displaystyle\sum_{j=i+1}^{m}r_{ij}\tilde{k}_{ji}\end{array}$$

Etape 5 *: Calcul de la matrice des gains K du retour d'état dans la base initiale :* $K=\tilde{K}M^{-1}$

***Exemple 5.3* :** Soit le système

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} u,\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

Calculer le retour d'état K permettant d'avoir en boucle fermée les pôles : $p_1 = -1, p_2 = -2,\ p_3 = -3,\ p_4 = -4$.

V.3. COMMANDE PAR RETOUR DE SORTIE DES SYSTEMES MULTIVARIABLES

Comme pour cas monovariable, en utilise le théorème de séparation, la matrice K(gain de commande) et la matrice L (gain d'observateur) se calculent indépendamment (séparément).

Calcul de K (déjà fait au chapitre précèdent)
Calcul de L :
Dans la base initiale, on a

$$\text{Système : } \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\text{Observateur: } \begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

$A_{obs} = A - LC$ est la matrice d'évolution de l'observateur, où $L(nxp)$

Afin de faciliter les calculs, on décompose le système en p sous-systèmes observables.

$$\text{Système : } \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u(t) \\ y = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases}$$

$$\text{Observateur :} \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C})\hat{x}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{L}y \\ \hat{y}(t) = \tilde{C}\hat{x}(t) \end{cases}$$

La matrice d'évolution de l'observateur : $\tilde{A}_{obs} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$, où : $\tilde{L}(nxp)$

Alors, en suivant l'algoritme suivant, on décompose le système en p sous-systèmes observables :

$$\underbrace{S(A,B,C)}_{systeme\ initial} \xrightarrow{systeme\ dual} S^*(A^T, C^T, B^T) \xrightarrow[\text{(calcul de } M^{*^{-1}} \text{ et } M^*)]{\substack{d\acute{e}composition\ en\ "p" \\ \text{sous systemes} \\ \text{commandables:} \\ x = M^*\tilde{x}}} \tilde{S}^*(\tilde{A}^T, \tilde{C}^T, \tilde{B}^T) \xrightarrow{systeme\ dual} \underbrace{\tilde{S}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})}_{\substack{syst\grave{e}me\ d\acute{e}compos\acute{e} \\ en \\ "p"sous\ systemes \\ observables}}$$

Le système sous forme compagne observable:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$
$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

$\tilde{A}^T = M^{*^{-1}} A^T M^*$, $\tilde{C}^T = M^{*^{-1}} C^T$,$\tilde{B}^T = B^T M^*$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & -a_0^1 \\ 1 & 0 & & -a_1^1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n_1-1}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & -a_0^2 \\ 1 & 0 & & -a_1^2 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n_2-1}^2 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & -a_0^p \\ 1 & 0 & & -a_1^p \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n_p-1}^p \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} [0 & \dots & 1] & [0 & \dots & 0] & \dots & [0 & \dots & 0] \\ [0 & \dots & r_{12}] & [0 & \dots & 1] & \dots & [0 & \dots & 0] \\ & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ [0 & \dots & r_{1p}] & [0 & \dots & r_{1p}] & \dots & [0 & \dots & 1] \end{bmatrix}$$

Cette fois-ci la matrice $\tilde{A}$ n'est pas triangulaire par bloc, ceci va compliquer le calcul de l'équation caractéristique en boucle ouverte. Cependant, on peut choisir une matrice des gains L de façon que la matrice $\tilde{A}_{obs} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$ soit triangulaire.
Pour des raisons de simplicité et de lisibilité des expressions, on se limite au cas où le système est décomposé en deux sous systèmes observables ($p = 2$).

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \left[\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \quad a_{11} \right] & \left[\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \quad a_{12} \right] \\ \left[\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \quad a_{21} \right] & \left[\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \quad a_{22} \right] \end{bmatrix};$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} [0 & \dots & 1] & [0 & \dots & 0] \\ [0 & \dots & r_{21}] & [0 & \dots & 1] \end{bmatrix}; \qquad \tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{12} \\ 0 & \tilde{l}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{obs} = \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} = \begin{bmatrix} \left[\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \quad a_{11} - \tilde{l}_{11} - r_{21}\tilde{l}_{12} \right] & \left[\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \quad a_{12} - \tilde{l}_{12} \right] \\ \left[\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \quad a_{11} - r_{21}\tilde{l}_{12} \right] & \left[\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \quad a_{22} - \tilde{l}_{22} \right] \end{bmatrix}$$

$$A_{obs}^{d}=\begin{bmatrix}\left[\begin{matrix}0&0&\dots&0\\1&0&\dots&0\\0&1&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\dots&1\end{matrix}\;\middle|\;\alpha_{11}\right] & \left[\begin{matrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\end{matrix}\;\middle|\;\alpha_{12}\right]\\ \left[\begin{matrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\end{matrix}\;\middle|\;\alpha_{21}\right] & \left[\begin{matrix}0&0&\dots&0\\1&0&\dots&0\\0&1&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\dots&1\end{matrix}\;\middle|\;\alpha_{22}\right]\end{bmatrix}$$

Pour avoir une matrice $\tilde{A}_{obs}$ triangulaire, on prend $\alpha_{12}=[0 \quad \dots \quad 0]^T$.

Par identification de $\tilde{A}_{obs}$ et $\tilde{A}_{obs}^{d}$ terme à terme, il vient :

$$\begin{aligned}\alpha_{22}&=a_{22}-l_{22}\\ a_{21}-\tilde{l}_{21}&=0\\ \alpha_{11}&=a_{11}-\tilde{l}_{11}-r_{12}\tilde{l}_{21}\end{aligned}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{aligned}\tilde{l}_{22}&=a_{22}-\alpha_{22}\\ \tilde{l}_{21}&=a_{21}\\ \tilde{l}_{11}&=a_{11}-r_{12}\tilde{l}_{21}-\alpha_{11}\end{aligned}$$

Dans le cas général :

$$\begin{aligned}\tilde{l}_{pp}&=a_{pp}-\alpha_{pp}\\ \tilde{l}_{ij}&=a_{ij}\quad j>i\\ \tilde{l}_{ii}&=a_{ii}-\alpha_{ii}-\sum_{j=i+1}^{p} r_{ji}\tilde{l}_{ij}\end{aligned}$$

Finalement : $L=\left(M^{*-1}\right)^T\tilde{L}$

Résumé : Algorithme de calcul de l’observateur L – décomposition en p sous-systèmes observables

Soit un système donné:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\ y&=Cx\end{aligned}$$

L’on dispose de n pôles désirés pour l’observateur d’état : $\dot{\hat{x}}(t)=A\hat{x}(t)+Bu(t)+L(y-\hat{y})$

__Etape 1__ *: Décomposer le système en p sous-systèmes observables : (calcul de M^{*-1} et M^{*})*

$$\underbrace{S(A,B,C)}_{systeme\ initial}\xrightarrow{dual}S^*(A^T,C^T,B^T)\xrightarrow[\ ]{\substack{en\ "p"\ sous-systèmes\ commandables\\ \tilde{A}^T=M^{*-1}A^TM^*,\tilde{C}^T=M^{*-1}C^T,\tilde{B}^T=B^TM^*}}\tilde{S}^*(\tilde{A}^T,\tilde{C}^T,\tilde{B}^T)\xrightarrow{dual}\underbrace{\tilde{S}(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C})}_{p\ SS\ obs^{bles}}$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}&=\tilde{A}\,\tilde{x}+\tilde{B}u\\ y&=\tilde{C}\tilde{x}\end{aligned}$$

__Etape 2__ *: Détermination des vecteurs a_{ij} et des scalaires r_{ij}*

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}[\tilde{A}_{11}] & \cdots & [\tilde{A}_{1p}]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ [\tilde{A}_{p1}] & \cdots & [\tilde{A}_{pp}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots 0 & -a_0^1\\ 1 & 0 & \ddots & -a_1^1\\ 0 & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & -a_{n_1-1}^1\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots 0 & *\\ \vdots & & & *\\ 0 & 0 & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & *\end{bmatrix}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots 0 & *\\ \vdots & & & *\\ 0 & 0 & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & *\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots 0 & -a_0^p\\ 1 & 0 & \ddots & -a_1^p\\ 0 & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & -a_{n_p-1}^p\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}=\begin{bmatrix}[0 & \dots & 1] & [0 & \dots & 0] & \dots & [0 & \dots & 0]\\ [0 & \dots & r_{21}] & [0 & \dots & 1] & \dots & [0 & \dots & 0]\\ & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ [0 & \dots & r_{p1}] & [0 & \dots & r_{p2}] & \dots & [0 & \dots & 1]\end{bmatrix}$$

Etape 3 *: Détermination des vecteurs : α_{ij} , On veut une matrice $\tilde{A}_{obs}^d$ triangulaire, donc :*

$$D_{obs}^d(s)=\prod_{i=1}^{n}(sI-p_i)=\prod_{i=1}^{p}\left(s+\alpha_{n_i-1}^i s^{n_i-1}+\cdots+\alpha_1^i s+\alpha_0^i\right)$$

$$=\underbrace{\left(s^{n_1}+\alpha_{n_1-1}^1 s^{n_1-1}+\cdots+\alpha_0^1\right)}_{\tilde{A}_{obs\,11}^d}\times\dots\times\underbrace{\left(s^{n_p}+\alpha_{n_p-1}^p s^{n_p-1}+\cdots+\alpha_0^p\right)}_{\tilde{A}_{obs\,pp}^d}$$

$$\tilde{A}_{obs}^d=\begin{bmatrix}[\tilde{A}_{obs\,11}^d] & \dots & [0]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ [*] & \dots & [\tilde{A}_{obs\,pp}^d]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots 0 & -\alpha_0^1\\ 1 & 0 & \ddots & -\alpha_1^1\\ 0 & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & -a_{n_1-1}^1\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots 0 & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots 0 & *\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & *\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots 0 & -\alpha_0^p\\ 1 & 0 & \ddots & -\alpha_1^p\\ 0 & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & -a_{n_p-1}^p\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

Etape 4 *: Calcul du retour d'état $\tilde{L}$ dans la base canonique compagne d'observabilité*

$$\tilde{L}=\begin{bmatrix}\tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{12} & \dots & \tilde{l}_{1p}\\ 0 & \tilde{l}_{22} & \dots & \tilde{l}_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \tilde{l}_{pp}\end{bmatrix}_{(n\times p)}\qquad avec:\quad \begin{aligned}&\tilde{l}_{pp}=a_{pp}-\alpha_{pp}\\ &\tilde{l}_{ij}=a_{ij}\quad si\ j>i\\ &\tilde{l}_{ii}=a_{ii}-\alpha_{ii}-\sum_{j=i+1}^{p} r_{ji}\tilde{l}_{ij}\end{aligned}$$

Etape 5 *: Calcul de la matrice des gains L de l'observateur dans la base initiale : $L=\left(M^{*-1}\right)^T\tilde{L}$.*