Forme analytique du théorème de Hahn-Banach

Le théorème d'Hahn-Banach est un théorème de prolongement d'une forme linéaire continue définie sur un sous-espace d'un espace vectoriel normé à l'espace normé tout entier. Il en existe deux formes, l'une analytique, l'autre géométrique. Rappelons tout d'abord quelques notions de la théorie des ensembles

Définition 0.1. *Un **ensemble partiellement ordonné** E est un ensemble muni d'une relation d'odre partiel noté $\leq$, i.e., la relation $\leq$ est*

1. ***Réflexive*** *:* $\forall x \in E, x \leq x$,
2. ***Anti-symétrique*** *:* $\forall x \in E,\ x \leq y$ *et* $y \leq x \Rightarrow x = y$,
3. ***Transitive*** *:* $\forall x, y, z \in E,\ x \leq y$ *et* $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Définition 0.2. *Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre (partiel), $Q \subset E$ est **totalement ordonné** si pour tout couple a, b de Q on a (au moins) l'une des relations $a \leq b$ ou $b \leq a$.*

Définition 0.3. *Soit G un sous ensemble de E on dit que $c \in E$ est un **majorant** de E si pour tout $a \in G$ on a : $a \leq c$.*

Définition 0.4. *On dit que $m \in E$ est **un élément maximal** de E si pour tout $x \in E$ tel que $m \leq x$ on a nécessairement $x = m$.*

Définition 0.5. *On dit que E est **inductif** si tout sous ensemble totalement ordonné de E admet un majorant.*

Lemme 0.6. *(**Zorn**) Tout ensemble non vide, ordonné et inductif admet un élément maximal.*

Théorème 0.7. *(**Forme analytique du théorème de Hahn-Banach**)*
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et soit p une application de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y),\ \forall x, y \in E$$

$$p(\lambda x) = \lambda p(x),\ \forall x \in E,\ \forall \lambda > 0.$$

Soient G un sous-espace vectoriel de E et $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant

$$\varphi(x) \leq p(x),\ \forall x \in G.$$

Alors, il existe une forme linéaire $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge φ, i. e.,

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x), \forall x \in G,$$

et

$$\tilde{\varphi}(x) \leq p(x), \forall x \in E.$$

Démonstration. La preuve de ce théorème dépend du lemme de Zorne. On considère l'ensemble

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{array}{c} h : D(h) \subset E \to \mathbb{R} : D(h)\ un\ s.\ e.\ v\ de\, E,\ h\, linéaire\, G \subset D(h), \\ h\, prolonge\ \varphi\ et\ h(x) \leq p(x),\ \forall x \in D(h) \end{array} \right\}.$$

On munit $\mathcal{H}$ de la relation d'ordre définie par

$$h_1 \leq h_2 \Longleftrightarrow D(h_1) \subseteq D(h_2)\ \ et\ \ h_2\ prolonge\ h_1,$$

comme $\varphi \in \mathcal{H}$, alors $\mathcal{H} \neq \emptyset$. $\mathcal{H}$ est inductif. En effet, soit $Q = (h_i)_{i \in I}$ un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{H}$, on définit l'application h par

$$D(h) = \cup_{i \in I} D(h_i)\ \ et\ \ h(x) = h_i(x),\ \forall x \in D(h_i).$$

On peut vérifier facilement que h a bien un sens, que $h \in \mathcal{H}$ et que h est un majorant de $\mathcal{H}$. Il en résulte du lemme de Zorne que $\mathcal{H}$ admet un élément maximal noté $\tilde{\varphi}$. Prouvons que $D(\tilde{\varphi}) = E$, ce qui achèvera la démonstration du Théorème 0.7. Raisonnons par l'absurde, supposons que $D(\tilde{\varphi}) \neq E$, soit $x_0 \notin D(\tilde{\varphi})$, posons $D(h) := D(\tilde{\varphi}) + \mathbb{R}x_0$ et $y = x + tx_0 \in D(h)$ $(x \in D(\tilde{\varphi}))$, $h(y) = \tilde{\varphi}(x) + \alpha t$ où α est une constante qui sera fixée ultérieurement de manière à ce que $h \in \mathcal{H}$. On doit donc s'assurer que $h(y) \leq p(y)$ pour tout $y \in D(h)$, e.i.,

$$\tilde{\varphi}(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0), \forall x \in D(\tilde{\varphi}), \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

l'inégalité (1) est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\varphi}(x) + \alpha \leq p(x + x_0) & \forall x \in D(\tilde{\varphi}), \\ \tilde{\varphi}(x) - \alpha \leq p(x - x_0) & \forall x \in D(\tilde{\varphi}). \end{array} \right.$$

Il suffit donc de choisir

$$\sup_{x \in D(\tilde{\varphi})} \{\tilde{\varphi}(x) - p(x - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{y \in D} \{p(y + x_0) - \tilde{\varphi}(y)\}$$

ce qui est possible car pour tous x, $y \in D(\tilde{\varphi})$ on a

$$\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(x+y) \leq p(x+y),$$

car $\tilde{\varphi} \in H$. De plus, pour tous $x, y \in E$ on a

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y),$$

alors

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(y) &\leq p(x - x_0 + x_0 + y) \\ &\leq p(x - x_0) + p(y + x_0),\end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{\varphi}(x) - p(x - x_0) \leq p(y + x_0) - \tilde{\varphi}(y).$$

Comme $h \in \mathcal{H}$ et puisque h prolonge $\tilde{\varphi}$, et $D(\tilde{\varphi}) \subset D(h)$ on en déduit donc que $\tilde{\varphi}$ est majorée par h, i.e., $\tilde{\varphi} \leq h$, et puisque $\tilde{\varphi} \neq h$ ceci contredit la maximalité de $\tilde{\varphi}$, d'où

$$D(\tilde{\varphi}) = E.$$

■

Indiquons maintenant quelques applications simples du théorème de Hahn-Banach lorsque E est un espace vectoriel normé.

Notation : *On désigne par E' le dual topologique de E, i.e., l'espace des forme linéaires continues sur E. E' est muni de la norme dual*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E,\, \|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \in E,\, \|x\| \leq 1} f(x)$$

Corollaire 0.8. *Toute forme linéaire continue sur un sous ecpace vectoriel G de E se prolonge en une forme linéaire continue sur E tout entier, avec la même norme, i.e., pour $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire et continue de norme*

$$\|\varphi\|_{G'} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|.$$

Alors, il existe $\tilde{\varphi} \in E'$ qui prolonge φ et telle que $\|\tilde{\varphi}\|_{E'} = \|\varphi\|_{G'}$

Démonstration. Il suffit de prendre $\varphi \in G'$, $P(x) = \|\varphi\|_{G'}\|x\|$ et de montrons que toutes les hypothèses du Théorème 0.7 sont satisfaites. ■

Corollaire 0.9. *Pour tout $x_0 \in E \backslash \{0\}$, il existe $\varphi_0 \in E'$ telle que $\|\varphi_0\| = \|x_0\|$ et $\varphi_0(x_0) = \|x_0\|^2$*

Démonstration. Pour démontrer ce corollaire, il suffit d'appliquer le Corollaire 0.8 avec $G = \mathbb{K}x_0$ et $\varphi(tx_0) = t\|x_0\|^2$ de sorte que $\|\varphi_0\|_{G'} = \|x_0\|$. ■

Corollaire 0.10. *Pour tout $x \in E$ on a*

$$\|x\| = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |\varphi(x)| = \max_{\|\varphi\|\leq 1} |\varphi(x)|.$$

Démonstration. Supposons que $x \neq 0$, nous avons

$$\langle f, x\rangle \leq \|f\|\|x\|,$$

pour $\|f\| \leq 1$, on obtient

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|x\|,$$

et par suite

$$\sup_{\|f\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq \|x\|.$$

D'autre part, d'après le Corollaire 0.9, il existe $f_0 \in E'$ telle que

$$\|f_o\| = \|x\|,$$

et

$$\langle f_0, x\rangle = \|x\|^2.$$

Posons $f = \|x\|^{-1} f_0$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \|f_0\| & = & \|x\|^{-1}\|f_0\| \\ & = & \dfrac{\|x\|}{\|x\|} \\ & = & 1, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \langle f, x\rangle & = & \langle \|x\|^{-1} f_0, x\rangle \\ & = & \|x\|^{-1}\langle f_0, x\rangle \\ & = & \|x\|^{-1}\|x\|^2 \\ & = & \|x\|. \end{array}$$

Donc

$$\|x\| = \langle f, x\rangle = f(x) \leq \sup_{\|f\|\leq 1} \langle f, x\rangle,$$

et par suite

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \langle f, x \rangle.$$

■

Corollaire 0.11. *Pour tout espace vectoriel normé E le dual E' sépare les points de E*

Démonstration. Soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$ donc $x - y \neq 0$ d'après le Corollaire 0.9, il existe $\varphi \in E'$ telle que

$$\varphi(x-y) = \|x-y\|^2$$

puisque $x - y \neq 0$, alors $\|x-y\|^2 \neq 0$ d'où

$$\varphi(x-y) \neq 0,$$

d'aprés la linéarité de φ on obtient

$$\varphi(x) - \varphi(y) \neq 0,$$

et par suite

$$\varphi(x) \neq \varphi(y),$$

■

Corollaire 0.12. *Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, F un sous espace vectoriel fermé de E et $x_0 \in E, x_0 \notin F$, il existe $\varphi \in E'$ telle que*

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = 1, \\ \varphi(x) = 0, \ \forall x \in F. \end{cases}$$

Autrement dit, $\varphi(x_0) \geq 1$ et $F \subseteq \ker \varphi$.

Démonstration. Prenons $G = F + \mathbb{K}\{x_0\}$, tout élément $y \in G$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $y = x + \lambda x_0$ où $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Définissons φ_0 sur G par la formule $\varphi_0(y) = \lambda$ et par suite

$$|\varphi_0(y)| \quad = \quad \frac{\|y\|}{\|x_0 - \frac{-x}{\lambda}\|}.$$

Comme F est un sous espace vectoriel, alors $\dfrac{-x}{\lambda} \in F$ et par conséquent

$$|\varphi_0(y)| = \frac{\|y\|}{\|x_0 - \frac{-x}{\lambda}\|} \leq \frac{\|y\|}{dist(x_0, F)}$$

Prenons $P(y) = \frac{1}{\delta}\|y\|$ avec $\delta = dist(x_0, F)$ et montre que toutes les hypothèse du théorème de Hahn-Banach sint satisfaites. Soient $y_1, y_2 \in G$, $y \in G$, $t \in \mathbb{R}$ et$t > 0$ alors

En appliquant donc le théorème de Hahn-Banach (Théorème 0.7) pour $P(y) = \frac{1}{\delta}\|y\|$ avec $\delta = dist(x_0, F)$, il existe une application linéaire continue φ telle que

$$\varphi(x) = \varphi_0(x), \forall x \in G,$$
$$\varphi(x) \leq P(x).$$

Par conséquent si

1. Si $y \in F$ alors $\lambda = 0$
   et par suite
$$\varphi(x) = 0.$$
2. Si $y = x_0$ alors
$$\varphi(y) = \varphi(x_0) = 1.$$

■

Corollaire 0.13. *Soit E un espace de Banach, G un sous espace vectoriel sur E. Alors G est non dense dans l'espace E si est seulement si l'on trouve une fonction linéaire continue $f \neq 0$ telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. Soit $\overline{G} \neq E$, il existe donc un élément $x_0 \in E$ telle que $dist(x_0, G) = d > 0$, en vertu donc du Corollaire 0.12, il existe une forme linéaire f définie partout dans E telle que $f(x_0) = 1$, i.e., $f \not\equiv 0$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in G$.
Supposons maintenant qu'il existe une fonction linéaire continue $f \neq 0$ telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in G$ et montrons que G n'est pas dense dans E, i.e., montrons que $\overline{G} \neq E$. Raisonons par l'absurde, supposons que $\overline{G} = E$, pour tout $x \in E$, il existe alors une suite $(x_n)_n \subset G$ telle que $x_n \longrightarrow x$ lorsque $n \to \infty$. D'après les hypothèses, il existe une fonction continue $f \neq 0$ qui s'annule sur G, et par conséquent

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0,$$

puisque f est arbitrairement choisit, on conclut donc que $f \equiv 0$, ce qui est en contradiction avec les hypothèses et donc $\overline{G} \neq E$. ■