Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes
et Informatique
Département de Mathématiques

Master E.D.P. et applications
**Analyse fonctionnelle**
02/01/ 2021

## **Travaux dirigés**

**Exercice 1:** Soient $E$ un espace vectoriel normé, $A$, $B$ deux parties de $E$.

1. Montrer que $\overline{nA} = n\overline{A}$ et $Int(nA) = nInt(A)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.
2. Montrer que si $A$ est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
3. Montrer que si $A$ est fermé, $B$ est compact alors $A + B$ est fermé.
4. Mobtrer que si $C$ est convexe, alors $C + C = 2C$.
5. Montrer que si $C$ est convexe, alors $Int(C)$ est $\overline{C}$ sont convexes.
6. Montrer que si $x \in C$ et $y \in Int(C)$, alors $tx + (1-t)y \in Int(C)$ pour tout $t \in ]0, 1[$.

**Exercice 2:** Soit $E$ un espace vectoriel normé et soit $x \in E \setminus \{0\}\}$. Montrez qu'il existe une forme linéaire continue $f$ telle que

$$\|f\| = 1 \; et \; f(x) = \|x\|.$$

**Exercice 3:** Soit $E$ un espace vectoriel normé. On définit $i : E \to E''$ de la faÃ§on suivante: pour tout $x \in E$, l'élément $i(x) \in E'' = \mathcal{L}(E', \mathbb{K})$ est l'application

$$\begin{aligned} &E' \to \mathbb{K} \\ &\varphi \mapsto i(x)\varphi = \varphi(x). \end{aligned}$$

1. Montrer que i(x) est une application lináire continue.
2. Montrer que l'application canonique $i : E \to E''$ est linéaire et isométrique, c'est à dire, $\|i(x)\| = \|x\|$. (Utiliser l'exercice 2 ).