

CHAPITRE 1

1. INTRODUCTION :

Les machines à fluide sont, d'une manière générale, des appareils permettant un échange d'énergie entre le fluide et un dispositif mécanique convenable. L'énergie échangée est toujours une énergie mécanique ; le fluide utilisé est généralement de l'eau, mais il peut être un liquide quelconque : pétrole, huile, mercure, métal en fusion, ou un gaz comme l'air, pourvue que les variations de pression mises en jeu soient faibles devant la valeur absolue de la pression.

2. NOTIONS SUR MACHINES HYDRAULIQUES PNEUMATIQUES :

On a maintes fois considéré des machines au sein desquelles s'opérait un échange de travail avec le milieu extérieur (compresseurs, turbines). Parmi celles-ci, on a identifié deux grandes familles :

2.1 Machines volumétriques :

Dans ce type de machines, on fait subir au fluide actif une évolution temporelle au sein d'un système fermé, et l'échange de travail se fait par action des contraintes de pression sur une frontière mobile du système. L'exemple le plus emblématique et le plus répandu est celui des dispositifs à cylindres et pistons, mais il en existe d'autres (p. ex. les capsulismes, comme le moteur rotatif Wankel).

2.2 Machines à circulation de fluide ou machine dynamique :

On appelle Machine Hydraulique Pneumatique un ensemble mécanique de révolution comportant une ou plusieurs roues (rotors) mobiles munies d'aubes (aubages, ailettes) qui ménagent entre elles des canaux à travers lesquels le fluide s'écoule. L'échange d'énergie s'effectue dans le rotor et résulte du travail des forces aérodynamiques sur les aubes produites par l'écoulement du fluide autour de celles-ci, et qui résultent principalement de la différence de pression entre les deux faces des aubes. Remarquons que, bien que le travail soit produit cette fois encore par les contraintes de pression, il se fait sans déformation de la frontière du système comme pour les machines volumétriques, mais simplement par rotation des aubes. Il existe un grand nombre d'applications nécessitant un transfert d'énergie. Essentiellement, on distingue trois types d'applications :

- ✓ **Production d'électricité**, turbines à gaz, turbines à vapeur, turbines hydrauliques ;
- ✓ **Propulsion**, turbines à gaz d'aviation compresseurs de locomotives, turbines à gaz de navires ;
- ✓ **Industrie lourde**, compresseurs centrifuges, turbocompresseur pour moteur diesel, turbines à vapeur, turbines à gaz, pompes et ventilateurs.

3. CLASSIFICATION DES MACHINES HYDRAULIQUES PNEUMATIQUES

Il existe plusieurs façons de classifier les turbomachines.

La première concerne **le sens du transfert d'énergie**. On divise alors les turbomachines en deux catégories principales :

- ✓ **les Machines qui fournissent de l'énergie au fluide (génératrice -enthalpie)**. Dans ce groupe on trouve les compresseurs, les ventilateurs et les pompes ;
- ✓ **-Les Machines dans lesquelles on retire de l'énergie du fluide (réceptrice)** pour l'utiliser comme un travail mécanique. Dans ce cas, on parle alors de turbines.

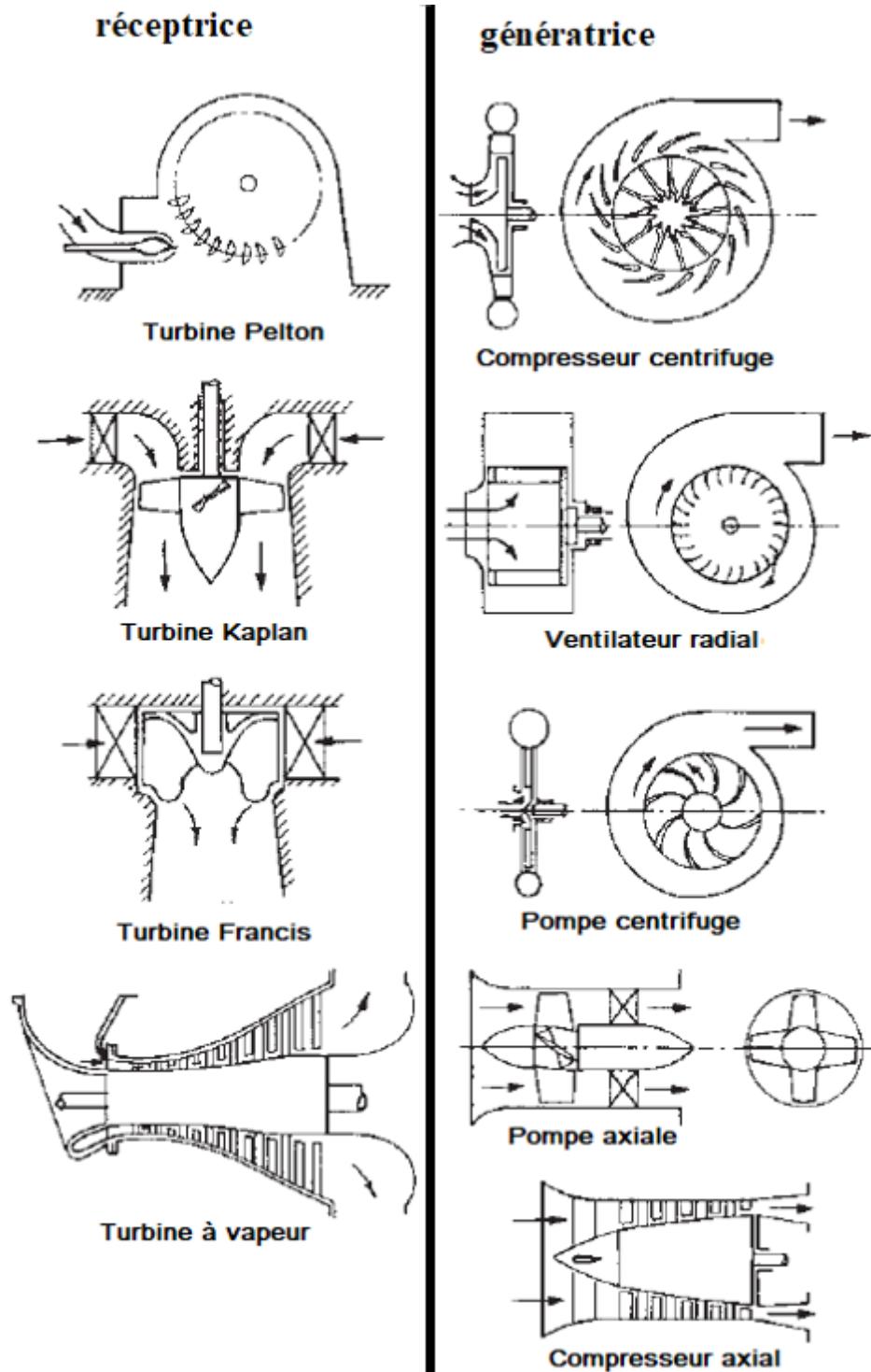


Figure 1 : types et formes des machines hydrauliques et pneumatiques(MHP)

On trouve **une seconde classification** des **MHP** en fonction de la direction principale de l'écoulement par rapport à l'axe de rotation de la machine.

Selon ce critère on a :

- ✓ **les Machines axiales** dans lesquelles la direction de l'écoulement est parallèle à l'axe de rotation de la machine ;
- ✓ **les Machines radiales ou centrifuges** dans lesquelles une partie importante de l'écoulement à l'entrée ou à la sortie est dans la direction normale à l'axe de rotation ou radiale ;

- ✓ **les Machines mixtes** dans lesquelles la direction de l'écoulement, à l'entrée ou à la sortie, comporte de composantes axiales et radiales

Une **troisième classification** peut être faite en **fonction de la nature du transfert énergétique**. En particulier on trouve :

- ✓ **les Machines à impulsion ou à action** dans lesquelles le fluide subit seulement un changement d'impulsion lors du passage dans le rotor sans aucune variation de pression ;
- ✓ **les Machine à réaction** dans lesquelles l'échange énergétique entre le fluide et le rotor entraîne une chute de pression sans aucune variation de vitesse ;
- ✓ **les Machines** de type combiné dans lesquelles le fluide subit un changement de pression et de vitesse lors de son passage par le rotor.

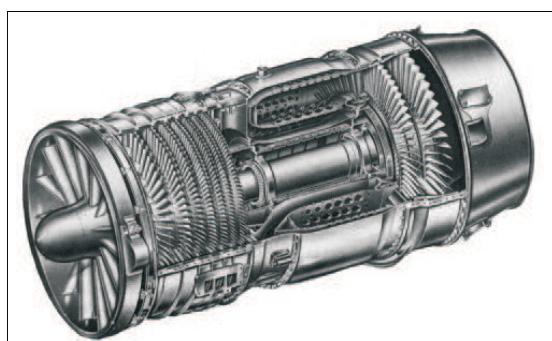
Enfin, on peut **re-classifier** les (MHP) en **fonction du type d'installation**.

On distingue deux types :

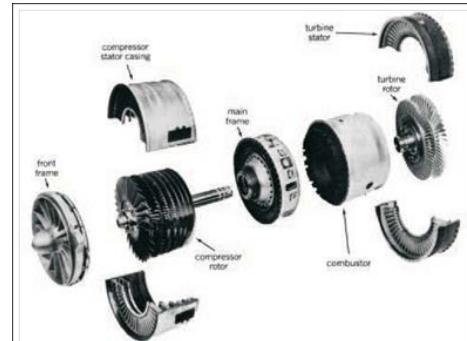
- ✓ **les Machines encastrées** telles que les pompes centrifuges, les turbines à gaz etc., où le fluide circule à l'intérieur de conduits ;
- ✓ **les Machines en veine libre** telles que les éoliennes, les hélices d'avion ou de navire.

4. CONSTITUTION DES MACHINES HYDRAULIQUES PNEUMATIQUES

Une machine ne comportant qu'un seul rotor est dite à simple étage ou encore monocellulaire. Les machines comportant plusieurs étages sont également appelées multicellulaires.



a)



b)

Figure 2 : les différentes composantes d'une turbine à gaz

a) : une turbine à gaz composée d'un compresseur axial ayant 7 étages et d'une turbine axiale ayant 2 étages...

b) : les différentes composantes de cette même turbine à gaz

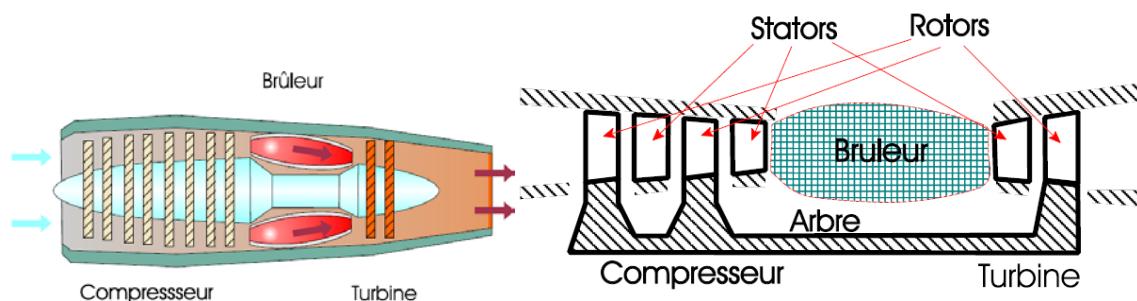


Figure 3 : coupe axiale d'une turbine gaz

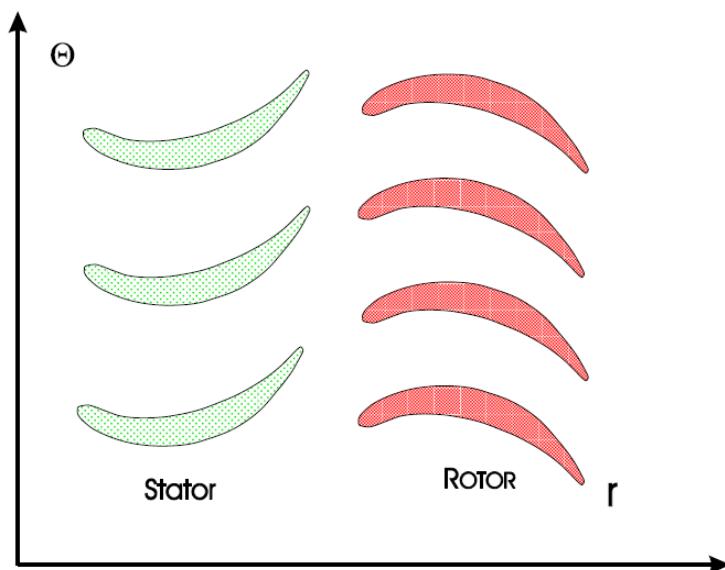


Figure 4 : Représente une coupe circonférentielle

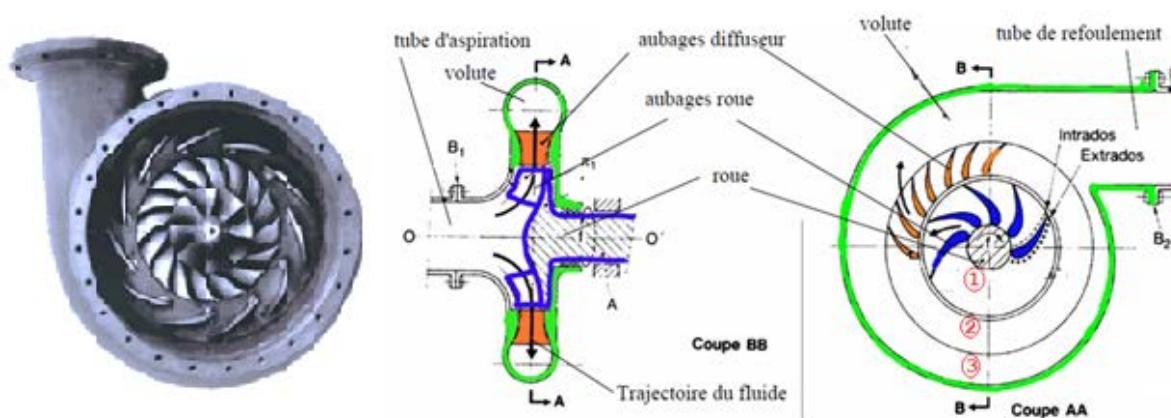


Figure 5 : Coupe axiale ($r - z$) d'une machine radiale

Une machine monocellulaire complète se compose de trois organes distincts que le fluide traverse successivement :

- ✓ **Le distributeur** dont le rôle est de conduire le fluide depuis la section d'entrée de la machine [identifiée par l'indice 0] à la section d'entrée du rotor [identifiée par l'indice 1] en lui donnant une vitesse et une direction appropriées. Ces aubes sont parfois orientables afin de régler le débit.
- ✓ **Le rotor** au sein duquel s'effectue l'échange d'énergie par travail des forces aérodynamiques sur les aubes en rotation.

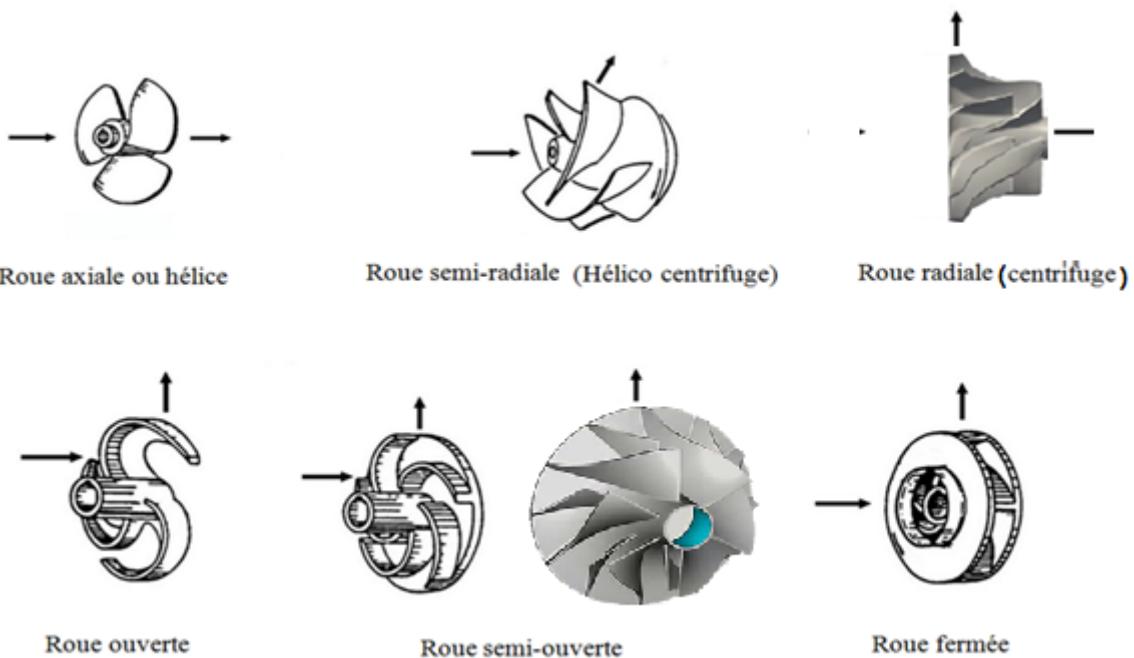


Figure 6 : Les différents types et formes du rotor

- ✓ **Le diffuseur** dont le rôle est de collecter le fluide à la sortie du rotor [identifiée par l'indice 2] et l'amener à la section de sortie de la machine [identifiée par l'indice 3]. Le distributeur et le diffuseur ne sont pas toujours présents, ou sont parfois réduits à un tronçon de canalisation. C'est notamment le cas pour les hélices et éoliennes.

Dans les machines multicellulaires, chaque étage ne comprend généralement que deux éléments, à savoir un distributeur et un rotor pour les turbines, et un rotor et un diffuseur pour les pompes et compresseurs.

5. PROPRIETES DES FLUIDES

5.1 Définition d'un fluide

Si l'on regarde ces matières d'un point de vue moléculaire (voir Figure suivant), on s'aperçoit que le solide (acier, béton...) a des molécules rapprochées de façon très dense avec des forces de cohésion intermoléculaires très grandes et qui permettent au solide de maintenir sa forme initiale. En revanche, pour des liquides (eau, huile...), les molécules sont plus espacées, les forces intermoléculaires sont plus faibles que dans le cas des solides et les molécules ont la liberté de mouvement. Par conséquent, les liquides peuvent être facilement déformés (sans avoir la possibilité d'être très fortement comprimés comme pour les gaz) mais peuvent, par exemple, être versés dans des récipients ou s'écouler dans un tube. Les gaz (air, oxygène...) ont un espace entre les molécules encore plus grandes et ont des forces intermoléculaires de cohésion extrêmement petites et par conséquent ils sont très facilement déformables et compressibles (ils peuvent remplir complètement le volume d'un récipient quelconque dans lequel ils sont placés).

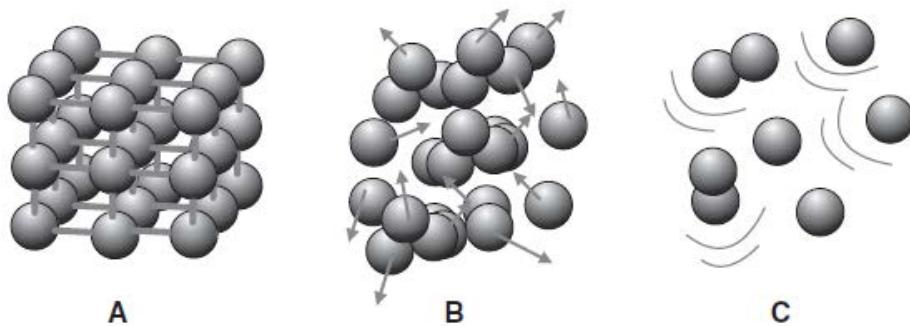


Figure 7 : Structures moléculaires. A : solide, B : liquide, C : gaz.

5.2 Masse volumique

La masse volumique est définie comme la masse par unité de volume : $\rho = \frac{dm}{dV} \left[\text{kg} / \text{m}^3 \right]$

La masse volumique d'un gaz change avec la pression mais celle d'un liquide peut être considérée comme constante en général.

L'inverse de la masse volumique par unité de masse est appelé **volume spécifique** (ou **volume massique**) et est défini par :

$$\dot{m} = \frac{1}{\rho} \left[\text{m}^3 / \text{kg} \right]$$

5.3 Le poids spécifique est défini comme le produit de la masse volumique par l'accélération de la pesanteur :

$$\gamma = \rho g \left[\text{N} / \text{m}^3 \right] \text{ Pour un liquide}$$

5.4 La densité d est sans dimension et est définie comme la masse volumique du fluide étudié

rapportée à la masse volumique de l'eau : $d = \frac{\rho}{\rho_{\text{eau}}}$

$$\text{5.5 La viscosité cinématique} \nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\text{m}^2 / \text{s} \right] \quad 1 \text{ cm}^2 / \text{s} = 1 \text{ St (Stokes)} = 10^{-4} \text{ m}^2 / \text{s}$$

5.6 viscosité dynamique $\mu = \rho \nu$ qui dépend en général de la pression et de la température

Lorsque le fluide est parfait (fluide idéal, non visqueux) alors $\mu = 0$.

La région loin de la paroi peut être considérée comme non-visqueuse car les effets visqueux ne se font plus ressentir loin de cette paroi.

5.7 Le nombre de Mach (M_a)

Le nombre de Mach (M_a) c'est le rapport de la vitesse du fluide (c) au point considéré par la vitesse locale (a) du son. $M_a = \frac{c}{a}$ Un processus **réversible et adiabatique** est aussi un processus **isentropique**.

De la connaissance de la physique, de la vitesse du son (a) est liée à des changements de pression et de la densité du milieu fluide à travers l'équation $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ Pour les gaz subissant un processus isentropique $a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}}$ et faisant usage de gaz parfaits, et en utilisant l'équation caractéristique il s'ensuit.

$$p = \rho RT \quad a = \sqrt{kRT} \quad R = 287 \text{ J / kg.K} : \text{cte du gaz parfait}$$

Exemple

pour l'air à 15 ° C sont $T = 288 \text{ K}$, avec $k = 1,4$ et $R = 287 \text{ J / kg.K}$ $a = \sqrt{kRT}$
 $a = \sqrt{1.4 \times 287 \times 288} = 340 \text{ m/s}$

Le rapport de la vitesse du fluide (**c**) à la vitesse locale du son (**a**) est donné par le nombre de Mach et est représenté par M_a

$$M_a = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{kRT}}$$

Sur la base de cette définition, le flux compressible peut être classé comme

Subsonique $M_a < 1$,

Supersonique $M_a > 1$,

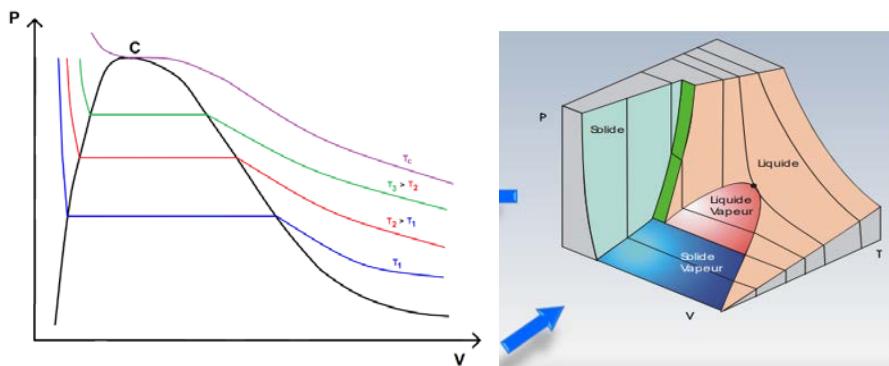
Transsonique $M_a = 1$ correspond aux quantités critiques(*)

Hypersonique $M_a > 5$.

L'air peut être considéré comme **incompressible** si $M_a < 0,3$ ou vitesse de l'air **autour de 100 m** / l'air est considéré comme incompressible si la variation **de densité est faible**, par exemple, **moins de 3%**.

6. THERMODYNAMIQUE DES FLUIDES

6.1 Surface d'état P-V-T



On voit que l'isotherme est horizontale lors du changement d'état quand la pression est constante.

6.2 Les transformations pour un gaz parfait

- Transformation est **isobare** si elle s'effectue à pression constante
- Transformation est **isochore** si elle s'effectue à volume constante
- Transformation est **isotherme** si elle s'effectue à température constante

- Transformation **adiabatique** si elle s'effectue sans échange de chaleur.

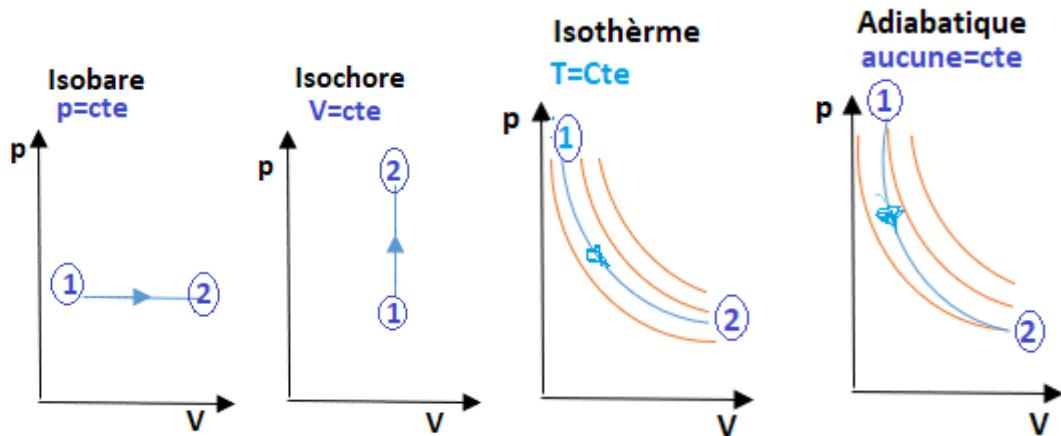


Figure 9 : Diagramme p-V des transformations (isobare, isochore, isotherme et adiabatique)

6.3 Transformations d'un gaz parfait

Isobare ($p = cte$)
 $h_2 - h_1 = Q$
 $Q = nC_p(T_2 - T_1)$
 $W = -p(V_2 - V_1)$

isochore ($V = cte$)
 $(e_{in2} - e_{in1}) = Q$
 $Q = nC_v(T_2 - T_1)$
 $W = 0$

isotherme ($T = cte$)
 $(e_{in2} - e_{in1}) = 0$
 $Q = -W$
 $W = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

adiabatique $pV^k = cte$
 $(e_{in2} - e_{in1}) = W$
 $Q = 0$
 $W = \frac{(p_2V_2 - p_1V_1)}{k-1}$

Transformations Polytropique (général)

$pV^n = cte \Rightarrow$ transformation polytropique

1) $n=1 \Rightarrow pV^1 = cte \Rightarrow$ transformation isotherme

2) $n=\infty \Rightarrow pV^\infty = cte \Rightarrow V = \frac{cte}{p} = cte \Rightarrow$ transformation isochore

3) $n=0 \Rightarrow pV^0 = cte \Rightarrow p = cte \Rightarrow$ transformation isobare

4) $n=k \Rightarrow pV^k = cte \Rightarrow$ transformation adiabatique

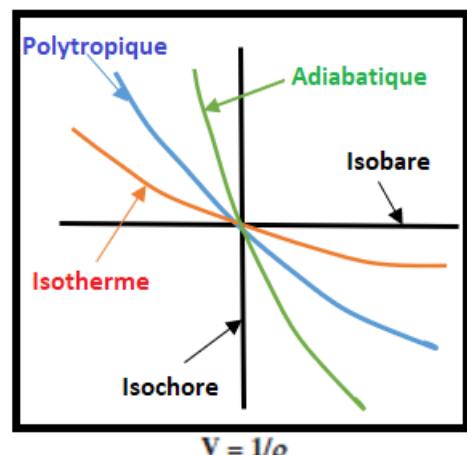


Figure 8 : Représentation des différentes transformations thermodynamique

- Une transformation **polytropique** est une modification de l'état thermodynamique d'un système avec un échange thermique partiel entre ce dernier et son environnement.
- Un état **polytropique** se classe donc entre le cas **isotherme** et le cas **adiabatique**

$$pV^n = cte \Rightarrow p_1V_1^n = p_2V_2^n \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1^n}{V_2^n} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^n \quad (1)$$

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{pV}{T} = nR = cte \quad R = 287 \left[J / kg.K \right]$$

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} = cte \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2V_2}{p_1V_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad (2)$$

La relation (1) dans (2)

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^n \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^n \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{-1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \quad (3)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^n \quad \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/n} \quad (4)$$

La relation (4) dans (3)

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

7.1 Premier principe de la thermodynamique

a) System fermé

On considère un système à **masse constante**. Si une quantité de **chaleur dQ est ajoutée au système** à travers la frontière de ce système et si **dW est le travail effectué sur le système par l'environnement extérieur** alors la **variation d'énergie interne** peut s'écrire (en supposant que le système **est sans variation d'énergie cinétique et potentielle**) :

$$d(e_{in} + e_c + e_p) = \delta Q + \delta W$$

Ici, **d** est la différentielle exacte et sa valeur dépend seulement des **états initial et final du système**. En revanche, **δQ et δW** dépendent des différents états successifs d'échange de chaleur et de travail à travers les limites du système.

Systèmes les plus fermés rencontrés dans la pratique sont stationnaires ; c'est-à-dire qu'ils n'impliquent aucun changement leur vitesse ou l'élévation de leurs centres de gravité au cours d'un processus. Ainsi, pour les systèmes fermés fixes, les changements de l'énergie cinétique et potentiel sont négligeables (c'est-à-dire $\Delta e_c = \Delta e_p = 0$, et la première relation de loi est

réduit au $Q_{1-2} + W_{1-2} = (e_{in2} - e_{in1})$ avec $(Q_{1-2} + W_{1-2})$: somme algébriques

Si les états initial et final sont spécifiés, les énergies internes 1 et 2 peuvent facilement

être déterminé à partir des tables de propriétés ou de certaines relations thermodynamiques.

Pour les machines l'utilisation des puissances est plus agréable que les termes des lois

physiques $\delta\dot{Q} - \delta\dot{W} = \frac{de_{in}}{dt}$ où \dot{Q} est le taux de transfert de chaleur net, \dot{W} la puissance et $\frac{de_{in}}{dt}$ est le taux de variation d'énergie interne

b) L'équation de l'énergie à écoulement constant (système ouvert)

La première loi de la thermodynamique peut être appliquée à un système pour trouver le changement dans l'énergie du système lorsqu'il subit un changement d'état. L'énergie totale E

d'un système, peut s'écrire : $E = e_{in} + e_c + e_p$

$E =$ Énergie interne + Énergie cinétique + Énergie potentielle

où e_{in} est l'énergie interne. Puisque les termes comprenant E sont des fonctions ponctuelles, nous pouvons écrire cette dernière équation sous la forme suivante $dE = de_{in} + de_c + de_p$

La première loi de la thermodynamique pour un changement d'état d'un système peut donc être écrit comme suit

$$\delta Q + \delta W = d(e_{in} + e_c + e_p)$$

Soit l'indice 1 représente le système dans son état initial et 2 représente le système dans son état final, l'équation énergétique à l'entrée et à la sortie de tout appareil a system ouvert peut être écrite sous la forme

$$\delta Q_{1-2} + \delta W_{1-2} + d(p_1 V_1 - p_2 V_2) = d \left((e_{in2} - e_{in1}) + \frac{(c_2^2 - c_1^2)}{2} + g(z_2 - z_1) \right)$$

Énergie interne et enthalpie

Un gaz est composé d'un ensemble de particules en mouvement aléatoire. L'énergie d'une particule consiste en une énergie de translation, une énergie de rotation, une énergie de vibration ainsi qu'une énergie électrique. Toutes ces énergies additionnées sur l'ensemble des particules du gaz forment l'énergie interne, e_{in} , du gaz.

L'enthalpie massique h est définie par $h = e_{in} + pV$

$$\delta Q_{1-2} + \delta W_{1-2} = d \left(\underbrace{(e_{in2} + p_2 V_2)}_{h_2} - \underbrace{(e_{in1} + p_1 V_1)}_{h_1} + \frac{(c_2^2 - c_1^2)}{2} + g(z_2 - z_1) \right)$$

$$\delta Q_{1-2} + \delta W_{1-2} = d \left((h_2 - h_1) + \frac{(c_2^2 - c_1^2)}{2} + g(z_2 - z_1) \right)$$

l'enthalpie de stagnation est définie par : $h_0 = h + \frac{c^2}{2}$ et en supposant que $g(z_2 - z_1)$ est

Négligeable, plus l'utilisation des puissances $W_{1-2} = \frac{\dot{W}}{\dot{m}}$ et $Q_{1-2} = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$

L'équation de l'énergie en flux constant devient $\dot{Q} + \dot{W} = \dot{m}(h_{02} - h_{01})$

La plupart des processus d'écoulement des turbomachines **sont adiabatiques, donc $\dot{Q}=0$** .

- $\dot{W} > 0$ pour les machines qui fournissent un travail (**turbine**), $\dot{W} = \dot{m}(h_{01} - h_{02})$
- $\dot{W} < 0$ Pour les machines absorbant un travail (**compresseurs**), $-\dot{W} = \dot{m}(h_{02} - h_{01})$

7.2 Chaleurs massiques

Dans le cas où les **chaleurs massiques à volume constant (C_v) et à pression constante (C_p)** sont constantes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas de la **température**, alors :

$$\begin{cases} e_{in2} - e_{in1} = C_v(T_2 - T_1) \\ h_2 - h_1 = C_p(T_2 - T_1) \end{cases}$$

$$C_p - C_v = R$$

$$k = \frac{C_p}{C_v}$$

$$\begin{cases} C_v = \frac{R}{k-1} \\ C_p = \frac{kR}{k-1} \end{cases}$$

Une transformation **polytropique** est une modification de l'état thermodynamique d'un système avec un **échange thermique partiel** entre ce dernier et son environnement. Un état polytropique se classe donc entre un état isotherme et un état adiabatique (figure 8)

7.3 Entropie et second principe de la thermodynamique

Le premier principe ne nous dit rien sur la direction des échanges (c'est-à-dire un corps chaud par rapport à son environnement va-t-il chauffer ou refroidir ?).

L'entropie massique par : $ds = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$

Pour une transformation irréversible, on écrit : $ds = \frac{\delta Q}{T} + ds_{irrev}$

Le changement d'entropie durant une transformation est égal à la chaleur ajoutée au système divisée par la température plus une contribution des phénomènes dissipatifs d'ordre irréversible. Les phénomènes dissipatifs accroissent toujours l'entropie, c'est-à-dire que :

$$ds_{irrev} > 0$$

La direction d'un processus est telle que le changement d'entropie du système avec l'environnement doit être toujours positive ou nulle pour une transformation réversible.

Une **transformation isentropique** est une **combinaison** d'une **transformation adiabatique** (**pas de chaleur** ajoutée ou enlevée du système) et d'un **processus réversible** (se déroulant à travers des états successifs). Dans une transformation isentropique, **l'entropie du système est constante** et pour un gaz idéal, avec l'aide de l'équation de Gibbs $Tds = dh + Vdp$,

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad ds = \frac{dh}{T} - \frac{dp}{\rho T} \quad dh = C_p dT \quad \rho T = \frac{p}{R} \quad ds = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

On peut obtenir les relations suivantes pour la variation d'entropie entre deux états 1-2 :

$$\int_1^2 ds = C_p \int_1^2 \frac{dT}{T} - R \int_1^2 \frac{dp}{p}$$

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad C_p = cte \quad C_v = cte$$

Processus **isentropique** $s_1 = s_2$, $C_p = cts$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k \quad \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \frac{p}{\rho^k} = \text{cte}$$

7.4 Rothalpie

La Rothalpie est obtenue de la combinaison des équations d'Euler et de l'énergie

L'équation d'énergie, valable pour un écoulement adiabatique et dans l'absence de termes sources, peut s'écrire comme : $h_{02} - h_{01} = c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1$ $h_{02} - c_{2u}u_2 = h_{01} - c_{1u}u_1$

et en général : $h_{02} - c_{2u}u_2 = h_1 + \frac{1}{2}c_1^2 - c_{1u}u_1$

Le terme $h_0 - c_u u$: est appelé Rothalpie R_{th} . A partir de cette dernière équation, on peut définir l'enthalpie de stagnation relative. Notamment par :

$$R_{th} = \underbrace{h + \frac{1}{2}c^2}_{h_0} - c_u u + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u^2 = h + \left(\frac{1}{2}c^2 - \frac{2}{2}c_u u + \frac{1}{2}u^2 \right) - \frac{1}{2}u^2 = h + \frac{1}{2} \underbrace{\left(c^2 - 2c_u u + u^2 \right)}_{w^2} - \frac{1}{2}u^2$$

$$R_{th} = \underbrace{h + \frac{1}{2}w^2}_{\substack{\text{enthalpie de stagnation} \\ \text{relative}}} - \frac{1}{2}u^2$$

L'équation d'énergie dans le système relatif est donc : $R_{th} = h + \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{2}u^2 = \text{cte}$

La rothalpie correspond à la généralisation du cas stationnaire ($u = 0, w = c$) pour lequel

$$R_{th} = \underbrace{h + \frac{1}{2}c^2}_{h_0} = h_0$$

Pour une machine axiale $u = \text{cte}$. Alors, $h + \frac{w^2}{2} = \text{cte}$

$$R_{th} = h + \frac{1}{2}w^2 - \underbrace{\frac{1}{2}u^2}_{\substack{\text{machine axial}}} = \text{cte}$$

$$R_{th} = h_2 + \frac{1}{2}w_2^2 = h_3 + \frac{1}{2}w_3^2$$

La Rrothalpie se conserve à travers le rotor

7.5 Température totale

À partir de l'enthalpie totale $h_0 = h + \frac{c^2}{2}$, on peut trouver la température totale

$$\int_h^{h_0} dh = \int_T^{T_0} C_p dT \underset{C_p = \text{cte}}{\Leftrightarrow} h_0 - h = C_p (T_0 - T) = \cancel{h} + \frac{1}{2}c^2 - \cancel{h} = C_p (T_0 - T)$$

$$\frac{1}{2}c^2 = C_p (T_0 - T) \quad T_0 = T + \frac{c^2}{2C_p}$$

La température totale d'arrêt ou de stagnation T_0 est conservée pour tout écoulement adiabatique.

7.5 Rapport de température

$$M_a = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{kRT}} \text{ et } C_p = \frac{kR}{(k-1)}$$

$$T_0 = T + \frac{1}{2C_p} c^2 = T + \frac{M_a^2 (k-1) T}{2} \quad T_0 = T \left(1 + \frac{(k-1)}{2} M_a^2 \right) \quad \frac{T_0}{T} = \left(1 + \frac{(k-1)}{2} M_a^2 \right)$$

7.6 Rapport de pression et de densité

La pression de stagnation dans un flux est la pression statique mesurée si le débit est porté isentropique se repose de l'équation.

$$Tds = dh + Vdp, \text{ pour un processus isentropique} \quad dh = Vdp = \frac{dp}{\rho}, dh = C_p dT = \frac{dp}{\rho}. \text{ Si cela}$$

est combiné avec l'équation d'état d'un gaz parfait, $\rho = \frac{p}{RT}$ l'équation suivante est obtenue :

$$\frac{dp}{p} = \frac{C_p}{R} \frac{dT}{T} = \frac{k}{k-1} \frac{dT}{T}$$

Cela peut être intégré entre les conditions statiques et stagnation de donner le sens de l'écoulement compressible suivant entre la stagnation et la pression statique :

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_a^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

L'équation peut également être intégrée le long d'une ligne de courant entre deux points arbitraires 1 et 2 dans un flux isentropique. Dans ce cas, les températures de stagnation et les

$$\text{pressions sont liées : } \frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

S'il n'y a pas de transfert de chaleur ou de travail à l'écoulement, $T_0 = \text{constante}$.

Par conséquent, cette dernière relation montre que, dans l'écoulement isentropique sans transfert de travail, $p_{02} = p_{01} = \text{constante}$, qui a été montré à être le cas pour l'écoulement incompressible dans l'équation. ($p_{02} = p_{01} = p_0$). La combinaison de l'équation d'état,

$p = \rho RT$, la relation correspondante de la densité de stagnation est obtenue :

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_a^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

8. EQUATION DE CONTINUITÉ

8.1 Le débit massique

Pour un écoulement régulier à travers une turbomachine, le débit massique \dot{m} reste constant. Si A_1 et A_2 sont les sections d'écoulement 1 et 2 le long d'un passage respectivement.

$$\dot{m} = \rho_1 c_1 A_1 = \rho_2 c_2 A_2 = \text{constant}$$

où ρ_1 , est la densité à la section 1, ρ_2 la densité à la section 2, c_1 , la vitesse à la section 1, et c_2 , est la vitesse à la section 2

8.2 Équation non linéaire du débit massique

On peut dire que la relation la plus importante d'écoulement compressible pour turbomachines est celui de débit massique sans dimension, parfois appelé capacité. Il est obtenu en combinant des équations passées avec l'équation de continuité.

$$\dot{m} = \rho_1 c_1 A_1 = \rho_2 c_2 A_2 = \rho c A$$

$$\dot{m} = \rho c A = \frac{p}{RT} c A = \frac{p}{kRT} k c A = \frac{p}{kRT} k c \frac{a}{a} A = \frac{p}{kRT} k a M_a A = \frac{p}{kR.T} k \sqrt{kRT} M_a A$$

$$\dot{m} = \frac{p}{\sqrt{kRT} \sqrt{kRT}} k \sqrt{kRT} M_a A = \frac{p}{\sqrt{kRT}} k M_a A$$

$$\dot{m} = \frac{p}{\sqrt{kRT}} k M_a A = \frac{p}{\sqrt{k} \sqrt{RT}} \sqrt{k} \sqrt{k} M_a A = \frac{p}{\sqrt{RT}} \sqrt{k} M_a A$$

$$\dot{m} = \frac{p}{\sqrt{RT}} \sqrt{k} M_a A \Rightarrow \frac{\dot{m} \sqrt{RT}}{p A} = \sqrt{k} M_a$$

Si on connaît les conditions de **stagnation** au lieu des conditions **statiques** on trouve

$$\left(\frac{T_0}{T} \right) = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_a^2 \right), \quad \left(\frac{T_0}{T} \right) = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}}, \quad \frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\frac{k-1}{k}}, \quad C_p = \frac{kR}{k-1} \Rightarrow R = \frac{C_p(k-1)}{k}$$

$$\frac{\dot{m} \sqrt{kRT_0}}{p_0 A \sqrt{k}} = M_a \sqrt{k} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_a^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad \text{et} \quad \sqrt{kR} = \sqrt{C_p(k-1)}$$

$$\frac{\dot{m} \sqrt{C_p(k-1)T_0}}{p_0 A \sqrt{k}} = \sqrt{k} M_a \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

L'équation non linéaire du débit massique est :

$$\frac{\dot{m} \sqrt{RT_0}}{p_0 A} - \sqrt{k} M_a \left(1 + \frac{k-1}{2} M_a^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = 0$$

L'utilisation de cette équation pour le calcul du débit massique est simple et directe. Par contre, elle prend la forme d'une équation non linéaire, de la forme $f(M_a) = 0$, lorsque l'inconnue c'est le nombre de Mach. Dans ce cas, la solution requiert d'outils de calcul numérique, tel que la méthode d'un point fixe ou la méthode itérative de Newton. Pour faciliter la solution de cette équation anciennement on procérait par l'utilisation de tables.

8.3 Conditions critiques (Ma=1)

Les quantités critiques correspondent à un point lorsque $Ma = 1$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \frac{T^*}{T_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right) \quad \frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} = \sqrt{\frac{2}{k+1}}$$

Symbole

W et Q : Travail et chaleur reçus (algébriquement)

C_p et C_v : Capacité thermique à pression et volume constante

k : Rapport des capacités thermiques

e_{in} : Énergie interne

s : Entropie

* : condition critique

Ma : le nombre de Mach

A_1 et A_2 sont les sections d'écoulement 1 et 2

V : Volume

\dot{W} : Puissance

W : Travail

Q : quantité de chaleur

h : enthalpie

h_0 : enthalpie total

R_{th} : Rothalpie

$R = 287 \text{ J / kg.K}$: cte du gaz parfait

a : la vitesse du son

c : la vitesse du fluide

w : la vitesse relative

u : la vitesse du périphérique

γ : Le poids spécifique

T : température en kelvin