

Chapitre 1

Rappel des principaux résultats de la théorie du signal

1. Introduction
2. Définition d'un signal
3. Signaux particuliers
4. Transformée de Fourier
5. Produit de convolution
6. Transformée de Laplace
7. Notion de système
8. Notion de bruit

1. Introduction

Connaitre la différence entre la théorie du signal et le traitement du signal.

-Théorie du signal : son objectif principal est la description mathématique des signaux (elle fournit sous forme mathématique les principales caractéristiques d'un signal, on peut connaitre s'il est causal, déterministe, continu ou discret....). C'est la théorie sur laquelle repose le traitement du signal.

-Traitement du signal : est une discipline qui développe et étudie les techniques de traitement, d'analyse et d'interprétation des signaux afin d'en tirer le maximum d'informations.

1.1. Principales fonctions du traitement du signal

Pour manipuler l'information contenue dans le signal, on peut effectuer plusieurs opérations de traitement du signal, parmi lesquelles on peut citer

-Analyse : isoler les composantes (paramètres) essentielles d'un signal

Complexe afin d'en mieux comprendre sa nature.

- Mesure : mesurer un signal c'est essayer d'estimer la valeur d'une grandeur

Caractéristique qui lui est associée.

- Filtrage : fonction bien connue, qui consiste à éliminer d'un signal certaines

Composantes indésirables.

-Regénération : c'est une opération qui consiste à redonner à un signal ayant

subi certaines distorsions, sa forme initiale.

-Détection : c'est l'opération qui essaye d'extraire un signal utile du bruit de

Fond qui lui est superposé.

- Identification : c'est un procédé qui permet d'effectuer un classement du

signal.

- Codage : traduit le signal en un langage numérique.

- Synthèse : opération inverse de l'analyse, elle essaye de recréer le signal en procédant à une combinaison de ses paramètres.

- **Modulation et le changement de fréquence** : sont essentiellement des moyens permettant d'adapter un signal aux caractéristiques fréquentielles d'une voie de transmission.

1.2 Domaines d'application du traitement du signal

Le domaine d'application du TDS est très vaste

- Traitement de la parole : reconnaissance de la parole, du locuteur.
- Aéronautique, automobile.
- Télécommunications :téléphonie mobile, communications optiques, satellitaires.
- Biologie et médecine : électrocardiographie, échographie ultrasonore.
- Radar et Sonar.
- etc.....

2. Définition d'un signal

Un signal est une grandeur physique variant en fonction du temps et véhiculant une information, par exemple : un courant électrique, une onde acoustique, une onde lumineuse.... Dans la pratique, un signal est généralement délivré par un capteur mesurant une grandeur physique (son, parole, température, pression...) sous forme d'un courant ou une tension électrique.

Mathématiquement, un signal est défini par une fonction du temps $t \rightarrow f(t)$

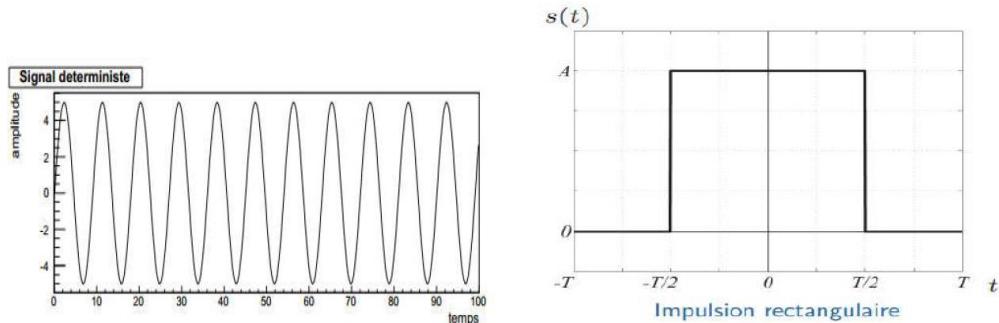
t : est une variable réelle représentant le temps.

2.1 Classification des signaux

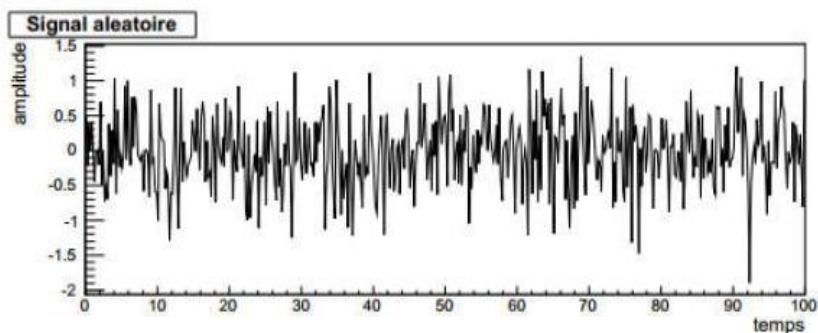
- **Classification temporelle ou phénoménologique**

Les signaux déterministes : leurs évolutions dans le temps peuvent être parfaitement décrites par des modèles mathématiques simples. Ces signaux sont définis

- Soit par des fonctions réelles ou des fonctions complexes.
- Soit par des distributions comme les impulsions de Dirac.



Les signaux aléatoires : Il s'agit de signaux dont le modèle mathématique n'est pas connu, leur évolution dans le temps est imprévisible et dont on ne peut pas prédire la valeur à l'instant t . Leur description est basée sur leurs propriétés statistiques (variance, moyenne, lois de probabilités).

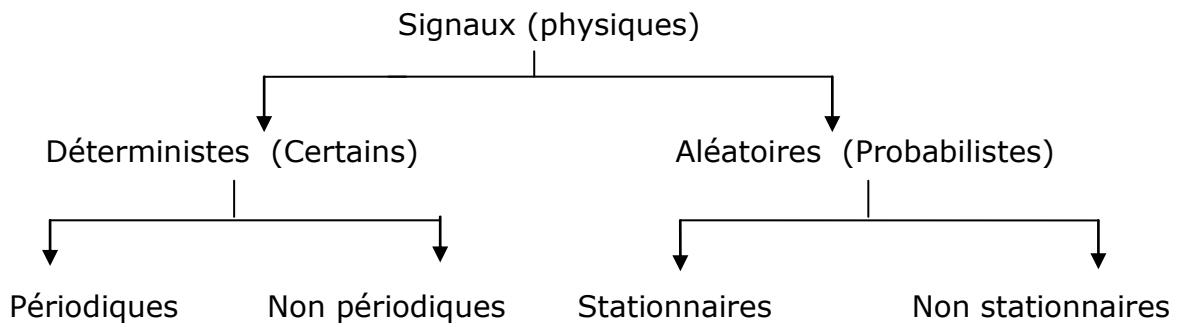


Parmi les signaux déterministes, on cite

- Les signaux périodiques dont la forme se répète régulièrement.
- Les signaux non périodiques.

Parmi les signaux aléatoires, on distingue

- Les signaux stationnaires dont les caractéristiques statistiques ne changent pas au cours du temps.
- Les signaux non stationnaires dont le comportement statistique évolue au cours du temps.



- **Classification morphologique**

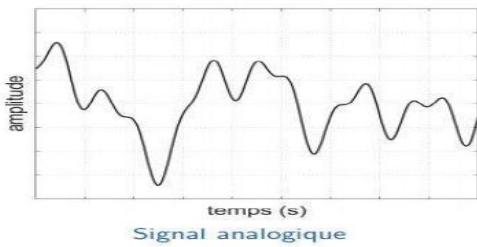
Selon que le signal $x(t)$ ou la variable t est continu ou discret ($t=kT$) on distingue quatre types de signaux :

Signal analogique : signal à amplitude et temps continu.

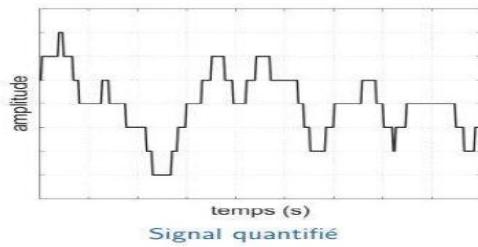
Signal quantifié : signal à amplitude discrète et à temps continu.

Signal échantillonné : signal à amplitude continue et à temps discret (les valeurs du signal sont disponibles uniquement à certains instants).

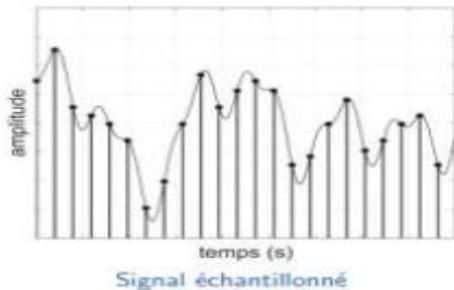
Signal numérique : signal à amplitude et temps discrets (c'est un signal échantillonné dont les valeurs sont codées).



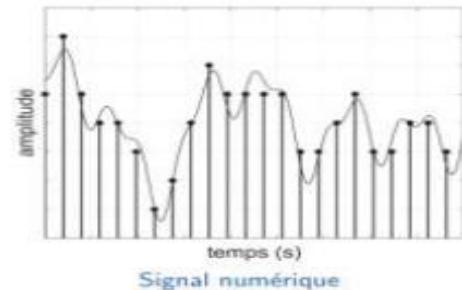
Signal analogique



Signal quantifié



Signal échantillonné



Signal numérique

- **Classification énergétique**

Il existe deux grandes classes des signaux (déterministes)

- Les signaux à énergie finie

$$0 < \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

- Les signaux à puissance moyenne finie

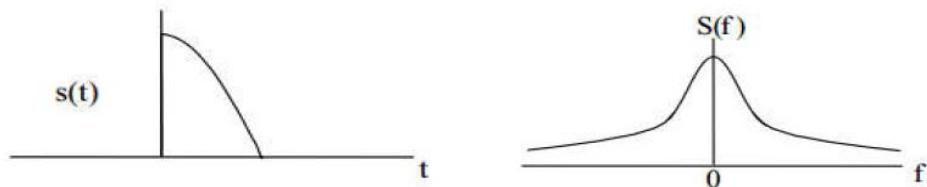
$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt < \infty$$

La première catégorie comprend les signaux de type transitoire qu'ils soient déterministes ou aléatoires (exemple une impulsion carré ou gaussienne).

La deuxième catégorie englobe les signaux de type permanent, périodique, déterministe et les signaux aléatoires permanents.

- **Classification fréquentielle ou spectrale**

Spectre d'un signal : le spectre d'un signal est la représentation de son amplitude, de sa phase, de son énergie ou de sa puissance en fonction de sa fréquence f en Hertz (Hz).

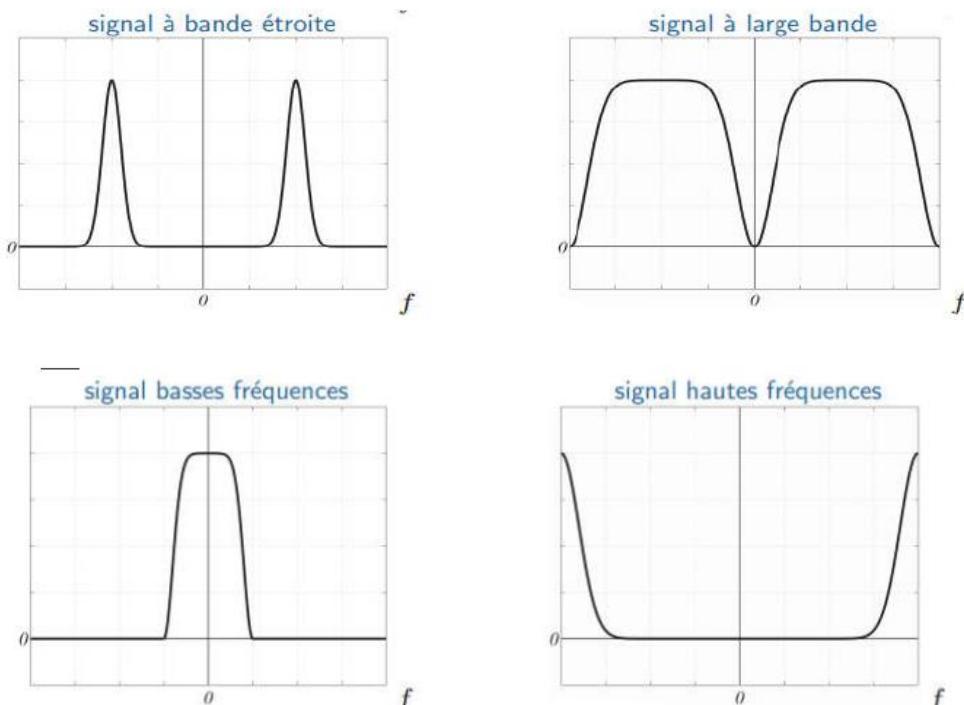


Largeur de bande ou largeur spectrale : c'est le domaine des fréquences occupées par le spectre d'un signal. On appelle largeur de bande

$$\Delta f = f_{\max} - f_{\min}$$

Différents types de signaux se distinguent

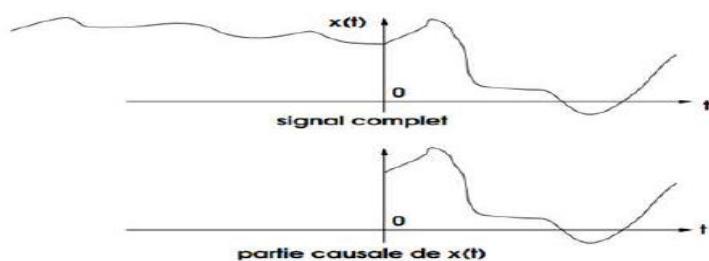
- Les signaux à bande étroite dont la largeur de bande est relativement petite ($f_{\max} \approx f_{\min}$).
- Les signaux à bande large dont la largeur de bande est relativement grande voir infinie ($f_{\max} \gg f_{\min}$).
- Les signaux de basses fréquences (BF) dont la largeur de bande est centrée sur des fréquences relativement faibles.
- Les signaux de hautes fréquences (HF) dont la largeur de bande est centrée sur des fréquences relativement importantes.



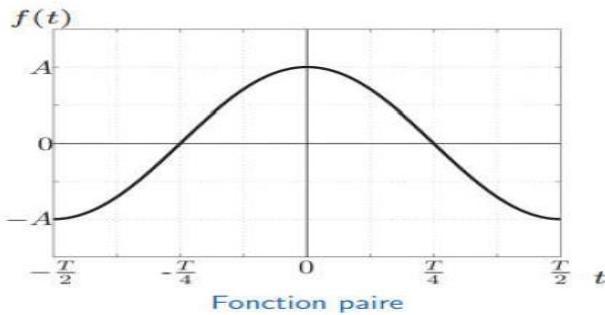
Un signal dont le spectre est nul en dehors d'une bande de fréquences spécifiée B est appelé signal à bande limité ou spectre à support borné.

2.2 Propriétés des signaux

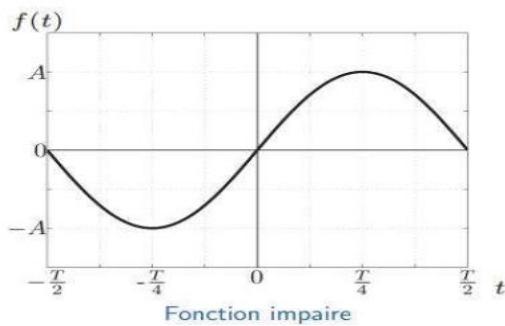
- **Causalité :** un signal $f(t)$ est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative de t



- **Parité :** un signal réel est pair si pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(-t) = f(t)$. Il présente une symétrie horizontale par rapport à l'axe des ordonnées.

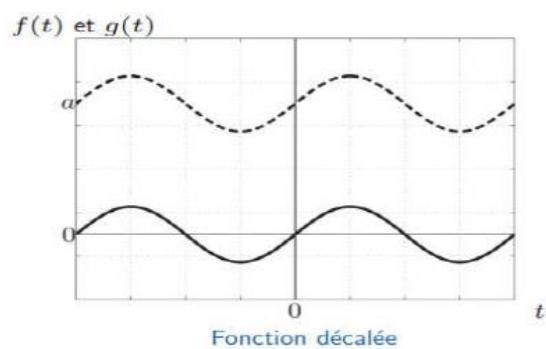


- **Signal impair :** un signal réel est impair si pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(-t) = -f(t)$ ou $f(t) = -f(-t)$. Il présente une symétrie par rapport à l'origine.



- **Décalage (translation verticale) :** un décalage est la transformation qui fait correspondre à toute fonction $f(t)$, une fonction $g(t)$ telle que

$$g(t) = f(t) + a \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$



- **Fonction retardée ou (translation horizontale)** : la fonction $g(t)$ est la fonction $f(t)$ retardée de t_0 ($t_0 > 0$) si pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$g(t) = f(t - t_0)$$

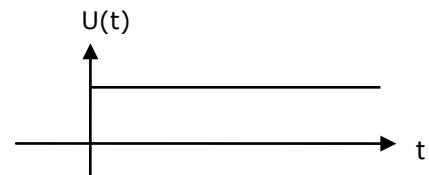
- si $t_0 < 0$, $g(t) = f(t + t_0)$

- si $t_0 > 0$, $g(t) = f(t - t_0)$

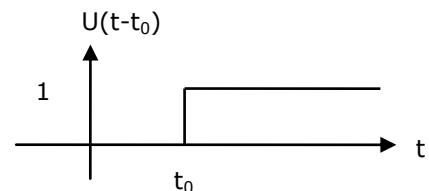
3. Signaux particuliers

❖ Echelon unité

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

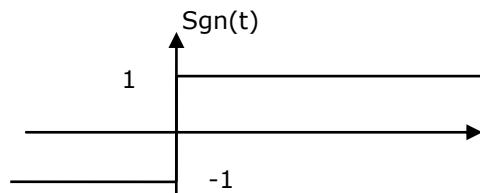


Version décalée $U(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t > t_0 \\ 0 & \text{pour } t < t_0 \end{cases}$



❖ Fonction Signe

$$\text{Sgn}(t) = \frac{t}{|t|} = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

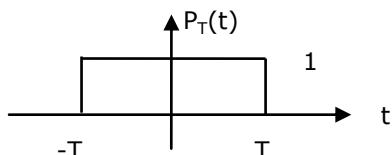


On peut définir l'échelon unité à partir de la fonction sgn(t)

$$U(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \quad \text{et} \quad \text{Sgn}(t) = U(t) - U(-t)$$

❖ Fonction porte (Impulsion rectangulaire) $P_T(t)$

$$P_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -T < t < T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

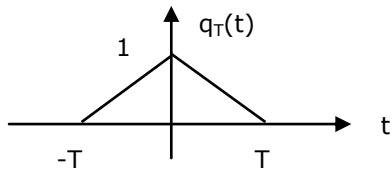


On peut définir la fonction rectangulaire à partir de l'échelon unité par

$$P_T(t) = U(t + T) - U(t - T)$$

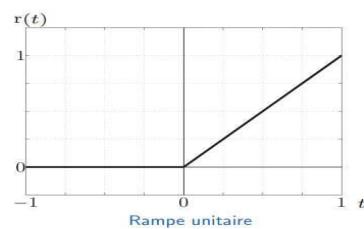
❖ **Fonction triangulaire $q_T(t)$**

$$q_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{si } |t| > T \end{cases}$$



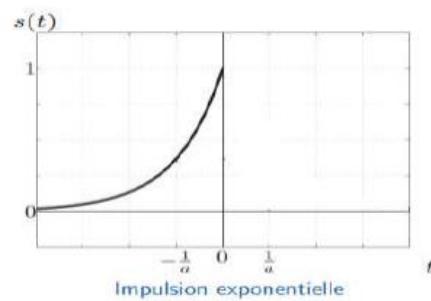
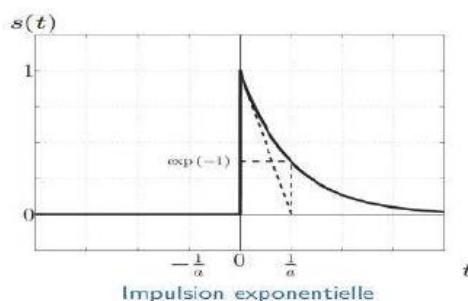
❖ **Fonction rampe $r(t)$**

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



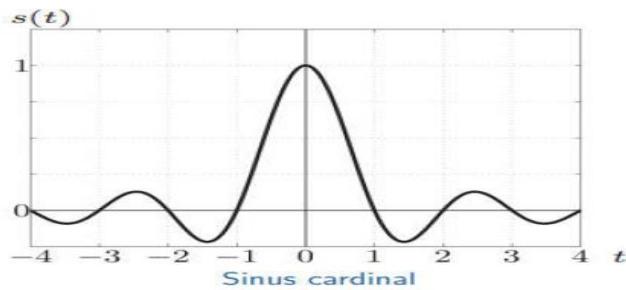
❖ **Signal exponentiel**

Sa forme générale peut s'écrire : $f(t) = B e^{at}$. B et a sont des paramètres réels. Si $a > 0$, l'exponentielle est croissante si $a < 0$, l'exponentielle est décroissante.



❖ **Sinus cardinal $\text{sinc}(t)$** défini par

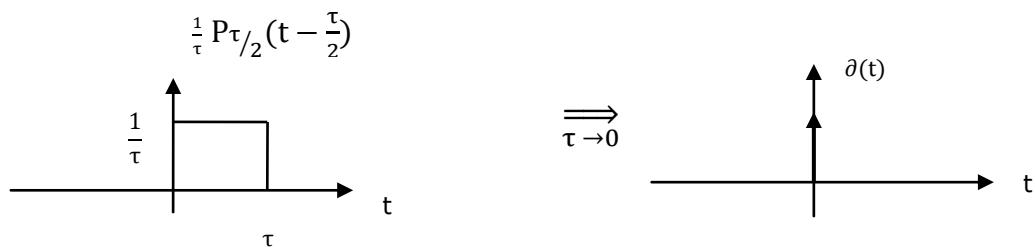
$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$



❖ **Impulsion de Dirac $\delta(t)$**

Obtenue à partir d'une impulsion rectangulaire de durée τ et d'amplitude $\frac{1}{\tau}$ auquel on fait tendre τ vers zéro.

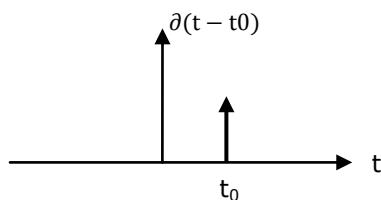
$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} P_{\tau/2}(t - \frac{\tau}{2})$$



Il s'agit d'une fonction qui est nulle partout sauf à l'origine où elle est égale à l'infini.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Sa version décalée est



Propriétés de l'impulsion de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} A \delta(t) dt = A$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

$$\delta(a \cdot t) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (\text{C'est la dérivée de l'échelon unité})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t) dt = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t) f(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \quad (\delta(t) \text{ est l'élément neutre de la convolution})$$

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$$

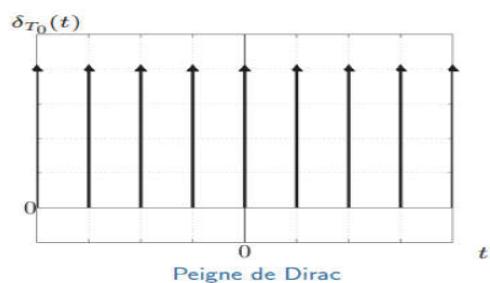
$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$$

$$\delta^{(n)}(t - t_1) * \delta^{(m)}(t - t_2) = \delta^{(n+m)}(t - t_1 - t_2)$$

❖ Peigne de Dirac

Le peigne de Dirac est une succession d'impulsions de Dirac. T est la période du peigne. Cette fonction est parfois appelée train d'impulsions de Dirac ou fonction d'échantillonnage.

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0), \quad k \in \mathbb{N}.$$



4. Transformée de Fourier

$f(t)$ est un signal déterministe

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \text{TF}\{f(t)\} \quad \text{ou} \quad F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

La transformée de Fourier inverse

$$f(t) = \text{TF}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{ou} \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df$$

4.1 Propriétés de la transformée de Fourier

On suppose que $f(t)$ est complexe de la forme $f(t) = f_1(t) + jf_2(t)$

Donc $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = |A(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$

$|A(\omega)|$: spectre d'amplitude de $f(t)$. $|A(\omega)| = \sqrt{R(\omega)^2 + X(\omega)^2}$

$\phi(\omega)$: spectre de phase de $f(t) = \arg F(\omega) = \arctg\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right)$

$A^2(\omega)$: spectre d'énergie de $f(t)$.

Les principales propriétés de la TF

- Linéarité : $f_1(t) \xrightarrow{\text{TF}} F_1(\omega)$ et $f_2(t) \xrightarrow{\text{TF}} F_2(\omega)$

$$a_1f_1(t) + a_2f_2(t) + \dots + a_nf_n(t) \xrightarrow{\text{TF}} a_1F_1(\omega) + a_2F_2(\omega) + \dots + a_nF_n(\omega)$$

- Symétrie : si $f(t) \xrightarrow{\text{TF}} F(\omega)$; alors $F(t) \xrightarrow{\text{TF}} 2\pi f(-\omega)$;

- Translation temporelle : si $f(t) \xrightarrow{\text{TF}} F(\omega)$; alors $f(t \mp t_0) \xrightarrow{\text{TF}} F(\omega) e^{\mp j\omega t_0}$;

- Translation fréquentielle : si $f(t) \xrightarrow{\text{TF}} F(\omega)$; alors $f(t)e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} F(\omega - \omega_0)$;

- Changement d'échelle : si $f(t) \xrightarrow{\text{TF}} F(\omega)$; alors $f(a.t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$;

- Dérivation temporelle : si $f(t) \xrightarrow{\text{TF}} F(\omega)$; alors $\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xrightarrow{\text{TF}} (j\omega)^n F(\omega)$;

- Dérivation fréquentielle : si $f(t) \xrightarrow{\text{TF}} F(\omega)$; alors $(-jt)^n f(t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$;

- Fonction conjuguée : si $f(t) \xrightarrow{\text{TF}} F(\omega)$; alors $f^*(t) \xrightarrow{\text{TF}} F^*(-\omega)$;

- Convolution temporelle : $f_1(t) * f_2(t) \xrightarrow{\text{TF}} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$;

- Convolution fréquentielle : $f_1(t) \cdot f_2(t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$;

- Théorème de Parseval : $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

4.2 Transformées de Fourier de quelques signaux

Signal	Sa TF
$\delta(t)$	1
$U(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$ ou $(\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f))$
$P_T(t)$	$2T \text{sinc} \omega T$ ou $(2T \text{sinc} 2\pi f T)$
$q_T(t)$	$T \text{sinc}^2 \left(\omega \frac{T}{2} \right)$ ou $(T \text{sinc}^2 \pi f T)$
$\text{Sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$ ou $(\frac{1}{j2\pi f})$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$ ou $(\frac{1}{a + j2\pi f})$

4.3 Transformée de Fourier d'un signal périodique

La transformée de Fourier d'un signal périodique est obtenue à partir de son développement en série de Fourier complexe.

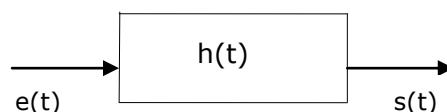
La série de Fourier complexe est de la forme : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$ $\omega_0 = 2\pi f_0$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Sa TF est : $F(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_0(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)$ ou

$$F(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_0(nf_0) \delta(f - nf_0)$$

5. Convolution ou produit de convolution



$$s(t) = h(t) * e(t)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

6. Transformée de Laplace

$f(t)$ une fonction du temps.

$$F(p) = TL\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad P : \text{variable complexe} = \alpha + j\omega.$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\omega}^{\alpha+j\omega} F(p) e^p dp$$

6.1 Propriétés de la TL

- Linéarité

$$L\{a f_1(t) + b f_2(t)\} = a L\{f_1(t)\} + b L\{f_2(t)\} = a F_1(p) + b F_2(p)$$

- Changement d'échelle

$$f(a \cdot t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

- Translation

$$f(t - a) \xrightarrow{TL} F(p) e^{-ap}$$

$$f(t) e^{bt} \xrightarrow{TL} F(p - b)$$

- Déivation temporelle

$$T L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = P^n F(P) - \sum_{k=1}^n P^{n-k} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(0) \quad f^{(n)}(0) = CI$$

- Déivation fréquentielle

$$(-1)^n t^n f(t) \xrightarrow{TL} \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

- Intégration

$$L\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{F(P)}{P}$$

- Valeurs limites

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{P \rightarrow \infty} P F(P)$$

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{P \rightarrow 0} P F(P)$$

- Convolution

$$TL\{ f(t) \otimes g(t) \} = F(p) \cdot G(p)$$

Voici quelques transformées

f(t)	F(p)	f(t)	F(p)
$\delta(t)$	1	$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(p+a)^3}$
$U(t)$	$\frac{1}{p}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$		

6.2 TL d'une fonction périodique

$$F(P) = \frac{F_0(P)}{1 - e^{-PT}} = \frac{\int_0^T f_0(t) e^{-PT} dt}{1 - e^{-PT}}$$

6.3 Transformée inverse

$F(p)$ est une fraction constituée de deux polynômes $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$.

Les racines de ces deux polynômes sont importantes pour l'analyse de l'évolution des signaux ou du comportement des systèmes.

-Pour des pôles simples $F(p)$ s'écrit

$$F(P) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(P - P_k)} = \frac{A_1}{(P - P_1)} + \frac{A_2}{(P - P_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(P - P_n)}$$

Les coefficients A_k sont appelés résidus des pôles P_k

$$A_k = (P - P_k)F(P)|_{P=k}$$

- Pour des pôles multiples :

Le dénominateur $D(P)$ de $F(P)$ possède des pôles simples et des pôles multiples. P_i d'ordre s . $F(P)$ peut se mettre sous la forme

$$F(P) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(P - P_k)} + \sum_{k=1}^s \frac{C_k}{(P - P_i)^k}$$

$$C_k = \frac{1}{(s-1)!} \left\{ \frac{d^{s-k}}{dP^{s-k}} [(P - P_i)^s F(P)] \right\}_{P=P_i}$$

- Pour des pôles complexes

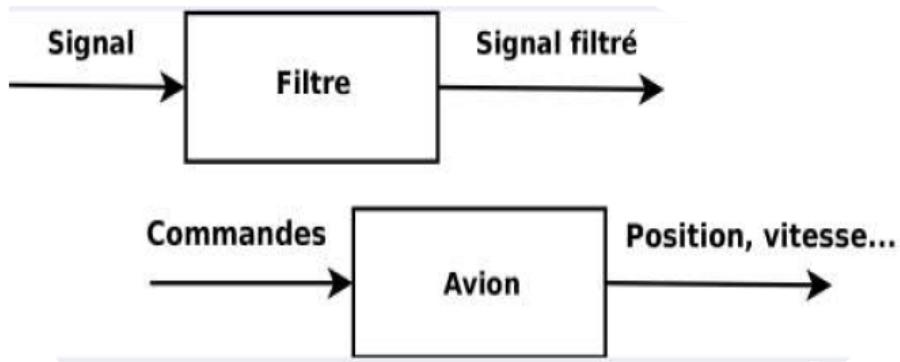
$F(P)$ doit être mise sous la forme

$$F(P) = \frac{\alpha P + \beta}{(P + a)^2 + \omega^2}$$

7. Notion de système

C'est un ensemble organisé de composants dont l'utilité est la réalisation d'une ou plusieurs tâches. Il établit un lien de cause à effet entre des signaux d'entrée (excitations) et des signaux de sortie (réponses).

Exemples de systèmes



7.1 Système linéaire et invariant dans le temps

- ❖ **Système linéaire** : un système est dit linéaire s'il satisfait au principe de superposition c'est-à-dire s'il vérifie la relation

$$a_1e_1(t) + a_2e_2(t) \rightarrow a_1s_1(t) + a_2s_2(t)$$

- ❖ **Système invariant** : un système est dit invariant ou stationnaire lorsque les paramètres du modèle mathématique ne varient pas au cours du temps durant toute sa vie. D'une autre manière, si l'on décale l'entrée de τ , la sortie sera décalée de la même quantité τ .

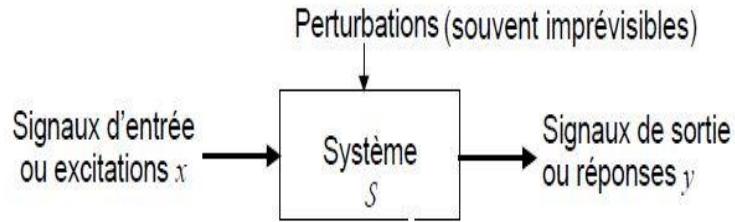
$$\text{à } e(t) \rightarrow s(t)$$

$$\text{à } e(t - \tau) \rightarrow s(t - \tau)$$

- ❖ **Système causal** : c'est un système qui ne répond pas avant d'être excité. Si l'entrée est nulle pour $t < 0$, la sortie l'est aussi. Tous les systèmes physiques sont causaux.
- ❖ **Système dynamique** : un système est dit dynamique si son comportement évolue au cours du temps. Un système dynamique est linéaire s'il est décrit par une équation différentielle linéaire.

8. Notion de bruit

C'est un phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal.



8.1 Rapport signal sur bruit

Pour mesurer la qualité d'un signal affecté par un bruit, on fait une mesure appelée rapport signal sur bruit (SNR), c'est le rapport entre la puissance du signal et la puissance du bruit.

$$\text{SNR} = \frac{P_s}{P_n}$$

Ce rapport est exprimé le plus souvent en dB

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_n}$$