Chapitre 2

Analyse et Synthèse des filtres analogiques

1. Introduction
2. Définition d'un filtre linéaire
3. Fonction de transfert d'un filtre
4. Réponses d'un filtre linéaire
5. Types de filtres
6. Filtres passifs
7. Analyse des filtres analogiques

1. Introduction

Le filtrage est une forme de traitement de signal, obtenu en envoyant le signal à travers un ensemble de circuits électroniques, qui modifient son spectre de fréquence et/ou sa phase et donc sa forme temporelle. Il peut s‘agir soit

- d’éliminer ou d’affaiblir des fréquences parasites indésirables.

- d’isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquences utiles.

Le filtrage dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel peut être défini comme l’opération qui consiste à prélever, interrompre ou seulement atténuer un signal

Le filtre peut être analogique ou numérique, les filtres analogiques sont destinés à recevoir essentiellement des signaux continus en temps, ils peuvent aussi recevoir des impulsions. Ils sont réalisés à partir de composants passifs (résistance, inductance, condensateur) ou actifs. Les filtres numériques reçoivent uniquement des signaux discrets. Ils sont réalisés à partir de structures intégrées micro programmables.

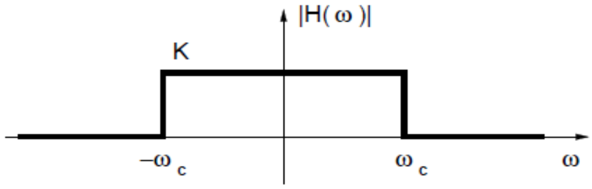
2. Définition d’un filtre linéaire

Un filtre linéaire est un système linéaire et invariant dans le temps (stationnaire) qui laisse passer certaines fréquences et arrête ou atténue le reste c'est-à-dire, il permet de diviser le spectre afin de conserver une ou plusieurs parties (bandes) de ce spectre.

Un filtre idéal permet de transmettre sans distorsions une partie du spectre (bande passante) et bloque toutes les autres parties (bande coupée).

Un filtre idéal présente :
- un affaiblissement nul dans la bande de fréquence que l’on désire conserver (Bande passante).

- un affaiblissement infini dans la bande que l'on désire éliminer (Bande atténuée).



Filtre Passe Bas (PB) idéal

Il est impossible pratiquement de réaliser de tels filtres, seulement nous pouvons réaliser des filtres qui s'approchent de l'idéal avec un temps de réponse long.

Un filtre est caractérisé par sa réponse impulsionnelle, notée h(t) et donc sa fonction de transfert H(f) ou H(p).

La réalisation des filtres peut être faite à base de résistances, condensateurs et inductances, on parle alors de **filtres passifs**, en opposition avec les **filtres actifs** qui comportent en plus, des composants actifs comme les amplificateurs opérationnels ou les transistors.

3. Fonction de transfert d'un filtre

Soit e(t) : un signal d'entrée d'un filtre linéaire.

s(t) : un signal de sortie d'un filtre linéaire.

Le rapport $H(f) = \frac{S(f)}{E(f)}$ ou $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ est appelé fonction de transfert du filtre.

La fonction de transfert d'un filtre s'écrit avec les notations complexes (jw) ou de Laplace (P) comme le rapport de deux polynômes

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_0 + a_1P + a_2P^2 + \cdots + a_mP^m}{b_0 + b_1P + b_2P^2 + \cdots b_nP^n}$$

3.1 Propriétés de la fonction de transfert

- L'ordre d'un filtre est donné par le degré du polynôme du dénominateur (n) de la fonction de transfert.

- Pour tout système réel, le degré du dénominateur (n) doit être supérieur ou égal au degré du numérateur(m) : $n \geq m$.
- Les racines du numérateur de H(P) sont appelés « zéros » de la fonction de transfert.
- Les racines du dénominateur de H(P) sont appelés « pôles » de la fonction de transfert.
- Toutes les fonctions de transfert peuvent être décomposées comme le produit de fonctions de transfert du 1^{er} et du $2^{ème}$ ordre.
- La transformée inverse de H(P) est la réponse impulsionnelle du filtre.
- Pour qu'un filtre soit stable, il faut que tous les pôles de la fonction de transfert soient à partie réelle négative ou h(t) $\rightarrow 0$ si t $\rightarrow \infty$.

4. Réponses d'un filtre linéaire

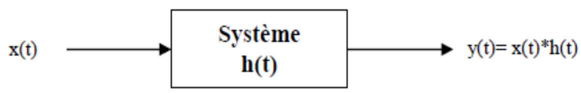
A partir de la fonction de transfert, on peut avoir le spectre du signal de sortie :

$$\mathrm{H(f)} = \frac{\mathrm{S(f)}}{\mathrm{E(f)}} \rightarrow \mathrm{S(f)} = \mathrm{H(f).E(f)}$$

La réponse d'un filtre linéaire à un signal d'entrée quelconque peut être obtenue

-Soit en appliquant la TF^{-1} (ou TL^{-1}) au spectre du signal de sortie S(f) ; c'est la méthode indirecte : $s(t) = TF^{-1}[S(f)] = TF^{-1}[H(f).E(f)]$.

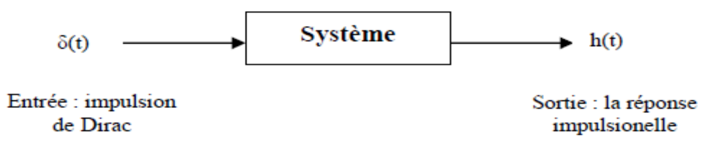
-Soit en appliquant le théorème de la convolution, il s'agit de la méthode directe



$$\mathbf{Y(t) = x(t) * h(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau).h(\tau).d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau).d\tau$$

❖ Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est définie comme étant la réponse d'un système linéaire à une impulsion de Dirac : $x(t) = \partial(t) \rightarrow X(P) = 1,\ H(P) = Y(P)$.



Mathématiquement, la réponse impulsionnelle s'obtient par transformation inverse de sa fonction de transfert.

❖ Réponse indicielle

C'est la réponse d'un système à l'échelon unité : x(t) = U(t).

$$x(t) = u(t);\ \ X(P) \overset{TL}{\rightarrow} \frac{1}{P}$$

$$S(P) = H(P).E(P) = H(P).\frac{1}{P}$$

❖ Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle consiste à étudier la réponse du système lorsqu'il est soumis aux entrées sinusoïdales de fréquences différentes c'est à dire déterminer la variation de l'amplitude et de la phase entre la sinusoïde de sortie par rapport à celle de l'entrée.

Si $e(t) = A.\cos 2\pi f_0 t = \frac{A}{2}\, e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}$

$alors\ E(f) = \frac{A}{2}\, \delta\,(f + f_0) + \delta\,(f - f_0)$

$S(f) = H(f).E(f)$

Si on peut écrire $\quad H(f) = \left| H(f)\, e^{j\varphi(f)} \right|$

Alors $\quad S(f) = \frac{A}{2}\,|H(f)|\,e^{j\varphi(f)}\,\delta\,(f + f0) + \frac{A}{2}\,|H(f)|\,e^{j\varphi(f)}\,\delta\,(f - f0)$

$s(t) = A\,|H(f_0)|\,.\cos(2\pi f_0 t + \varphi(f_0))$.

La réponse permanente d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale de fréquence f_0 est une sinusoïde de même fréquence mais avec une amplitude et une phase modifiées.

L'amplitude $A\,|H(f)|$ du signal de sortie est égale au produit de l'amplitude de l'entrée A et le module de la fonction de transfert $|H(f_0)|$, aussi le déphasage $\varphi(f)$ entre sortie et entrée est égal à l'argument de la fonction de transfert $H(f)$; ainsi l'étude de la réponse fréquentielle se résume à l'étude de la fonction de transfert $H(f)$ et donc de tracer les courbes du module et de l'argument.

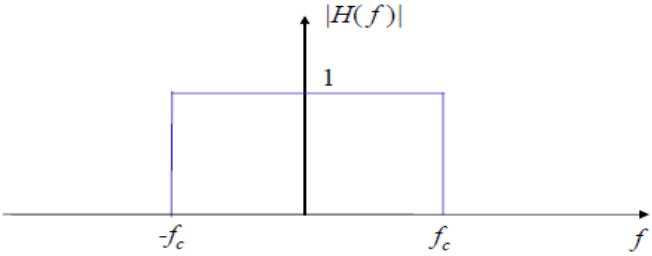
5. Types de filtres

5.1 Filtres idéals

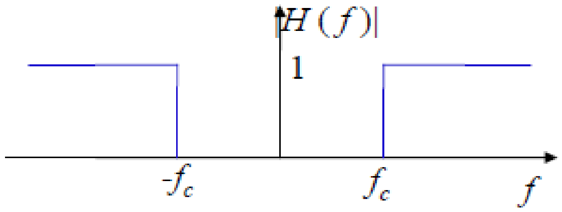
Il s'agit de filtres qui possèdent des fonctions de transfert, ayant des réponses d'amplitudes constantes dans une certaine bande de fréquence appelée **« Bande transmise ou Bande passante »** et nulles pour les autres fréquences **« Bande rejetée ou Bande coupée»**. Ils permettent le transfert sans distorsions de toutes les composantes du signal d'entrée dans la bande passante et atténuent toutes les autres.

Il existe plusieurs types de filtres linéaires réalisables

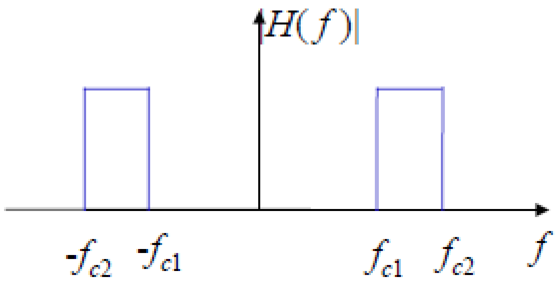
- ❖ Les filtres passe-bas laissent passer les basses fréquences comprises dans la bande passante $[-f_c,\ f_c\,]$ et élimine totalement les hautes fréquences comprises dans les bandes $]-\infty,\ -f_c] \ \cup\ [f_c, +\infty\,[$.



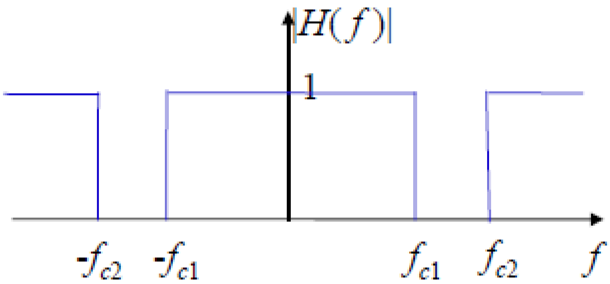
- Les filtres passe-haut laissent passer les hautes fréquences comprises dans la bande passante $]-\infty, -f_c] \cup [f_{c,} +\infty[$ et coupent les basses fréquences comprises dans la bande $[-f_{c,}\ f_c]$



- Les filtres passe-bande ne laissent passer qu'une bande limitée de fréquences comprises entre $[-f_{c2},\ -f_{c1}] \cup [f_{c1},\ f_{c2}]$.



- Les filtres coupe-bande, à l'inverse des filtres passe bande, laissent passer toutes les fréquences comprises dans la bande passante $]-\infty,\ -f_{c2}\ ] \cup [-f_{c1},\ f_{c1}] \cup [f_{c2},\ \infty[$.



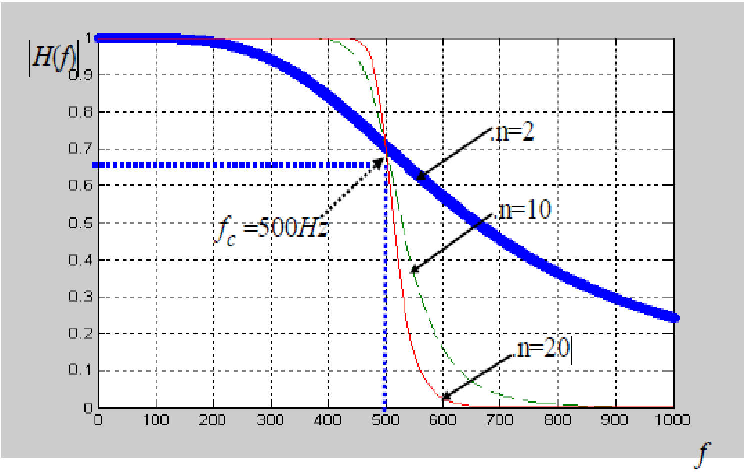
5.2 Filtres de Butterworth et de Tchebychev

Les filtres de Butterworth et de Tchebychev s'approchent des filtres idéaux.

- **Filtres de Butterworth**

On donne comme exemple de filtre passe bas, le filtre qui a pour fonction de transfert $H(f) = \frac{1}{\sqrt{1+ (\frac{f}{f_c})^{2n}}}$

f_c est la fréquence de coupure et n le rang du filtre, nous pouvons remarquer que plus n est élevé plus le filtre s'approche du filtre idéal.



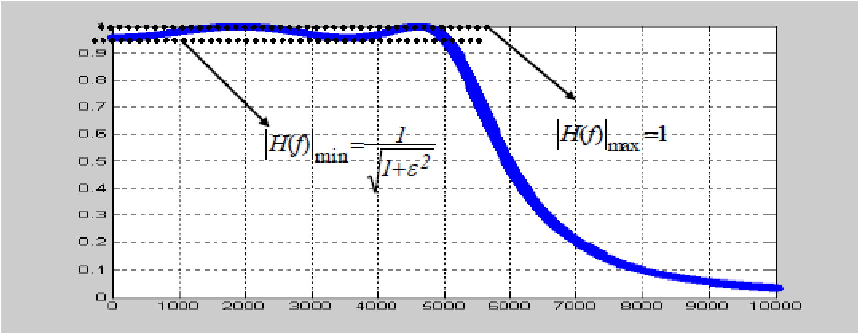
❖ **Filtres de Tchebychev**

La fonction de transfert de ces filtres est liée à un facteur ε et à un polynôme T_n qui dépend de la fréquence variable f et de la fréquence de coupure f_c, par exemple pour un filtre passe bas $H(f) = \frac{1}{\sqrt{1+ \varepsilon^2\, T_n^2(f/f_c)}}$

Où ε est une constante réelle positive $\varepsilon < 1$, et $T_n(f/f_c)$ est le *polynôme de Tchebbychev.*

$T_n(x) = 2x.\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ *Avec* n = 2,3, … *et*

$T_1(x) = x\,;\, T_0(x) = 1;$ *et* $T_n(x) < 1$



$\varepsilon = 0.3$

Dans la bande passante, on remarque des ondulations qui oscillent entre $H(f)_{max}$ et $H(f)_{min}$.

On a $H(f)_{max} = H(0) = 1$ et $H(f)_{min} = H(fc) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

- **Autres filtres**

On peut citer d'autres filtres dont on donne la fonction de transfert

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^{2n}}}$$

$\lambda = \frac{f}{f_c}$ pour un Passe Haut.

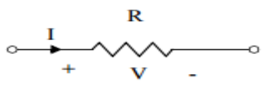
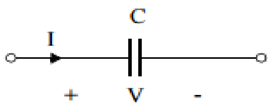
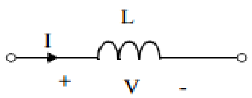
$\lambda = \frac{-f_c}{f}$ pour un Passe Bas.

$\lambda = \frac{f^2 - f_h.f_b}{f(f_h - f_b)}$ pour un Passe Bande.

6. Filtres passifs

Les composants qui sont à la base des filtres passifs sont les résistances, les condensateurs et les bobines.

Les composants passifs

Composant passif	**Notation temporelle**	**Notation de Laplace**
	$v(t) = R\,i(t)$	$V(P) = R\,I(P)$
	$i(t) = C\,\dfrac{dv(t)}{dt}$	$I(P) = C[PU(P) - u(0)]$ $u(0) = CI = \text{tension à } t = 0$
	$v(t) = L\,\dfrac{di(t)}{dt}$	$U(P) = L[PI(P) - i(0)]$ $i(0) = CI = \text{courant à } t = 0$

7. Analyse des filtres analogiques

Application à la résolution d’équations linéaires

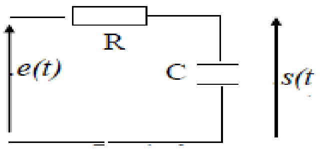
Les filtres analogiques forment une classe importante des systèmes linéaires et stationnaires à constantes localisées. Ces constantes localisées peuvent être des résistances, des selfs (bobines), des capacités ou des amplificateurs opérationnels. Ceci conduit à représenter les filtres par des équations différentielles à coefficients constants.

Exemples : -Système d’ordre 1

1-Soit le circuit RC suivant, c’est un filtre PB du 1er ordre.

Calcul de la réponse impulsionnelle et indicielle du circuit RC.

On suppose y(0) = 0.



Dans la capacité, le courant et la tension sont liés par la relation : $\mathrm{i(t) = C\,\frac{ds(t)}{dt}}$

L'équation des mailles donne

$$\mathrm{e(t) = Ri(t) + s(t)}$$

$$\mathrm{e(t) = RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t)}$$

$$TL\{e(t)\} = RC\;TL\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} + TL\{s(t)\}$$

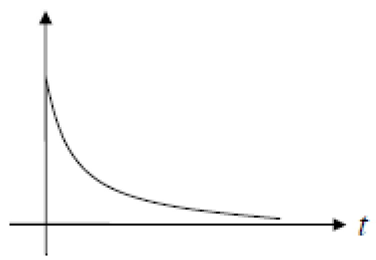
$$\mathrm{S(P) = RCPY(P) - y(0) + Y(P) = Y(P)[1 + RCP]}$$

$$\mathrm{\frac{S(P)}{E(P)} = \frac{1}{1 + RCP} = \frac{1}{RC}\,\frac{1}{P + \frac{1}{RC}} = H(P) = fonction\ de\ transfert}$$

- Réponse impulsionnelle

$$e(t) = \partial(t) \overset{TL}{\rightarrow} E(P) = 1$$

$$S(P) = \frac{1}{\mathrm{RC}}\,\frac{1}{\mathrm{P} + \frac{1}{\mathrm{RC}}}.1 \;\rightarrow\; s(t) = TL^{-1}\{S(P)\} = \frac{1}{RC}\,e^{\frac{-t}{RC}}$$



- Réponse indicielle

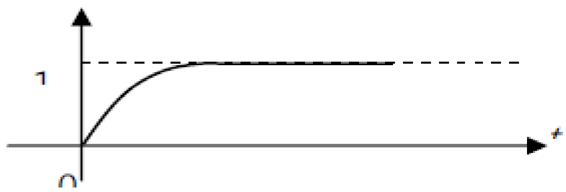
$$e(t) = U(t) \overset{TL}{\rightarrow} E(P) = \frac{1}{P}$$

$$S(P) = \frac{1}{\mathrm{RC}}\frac{1}{\mathrm{P} + \frac{1}{\mathrm{RC}}}\cdot\frac{1}{P} = \frac{A}{P} + \frac{B}{P + \frac{1}{RC}}$$

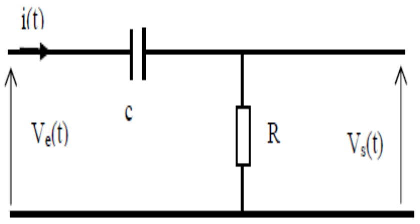
$$A = P\,S(P)|(P = 0) = 1$$

$$B = \left(P + \frac{1}{\mathrm{RC}}\right)\mathrm{S(P)}\,\Big|P = \left(\frac{-1}{RC}\right) = -1$$

$$S(P) = \frac{1}{P} - \frac{1}{P + \frac{1}{RC}} \xrightarrow{TL^{-1}} s(t) = U(t) - U(t)e^{\frac{-t}{RC}} = U(t)[1 - e^{\frac{-t}{RC}}]$$



2-Filtre passe haut PH du 1er ordre : x(0) = y(0) = 0



L'équation des mailles donne : $\mathrm{v_e(t)} = \mathrm{v_c(t)} + \mathrm{v_s(t)}$ et $\mathrm{v_s(t)} = \mathrm{R\,i(t)}$

$\mathrm{i(t)} = \mathrm{C}\,\frac{\mathrm{dv_c(t)}}{\mathrm{dt}}$; $\mathrm{v_c(t)} = \mathrm{v_e(t)} - \mathrm{v_s(t)}$

$$\mathrm{i(t)} = \mathrm{C}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[\mathrm{v_e(t)} - \mathrm{v_s(t)}]$$

$$\mathrm{v_s(t)} = \mathrm{R\,i(t)} = \mathrm{RC}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{v_e(t)} - \mathrm{RC}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{v_s(t)} \xrightarrow{\mathrm{TL}} V_s(P) + RCP\,V_S(P) =$$

$$V_s(P)[1 + RCP] = RCP\,V_e(P)$$

$$\frac{\mathrm{V_s(P)}}{\mathrm{V_e(P)}} = \frac{\mathrm{RCP}}{1 + \mathrm{RCP}} = \mathrm{H(P)} = \text{fonction de transfert}$$

❖ Réponse impulsionnelle

$$H(P) = \frac{RCP + 1 - 1}{1 + RCP} = \frac{RCP + 1}{1 + RCP} - \frac{1}{1 + RCP} = 1 - \frac{\frac{1}{RC}}{P + \frac{1}{RC}}$$

$$\xrightarrow{TL^{-1}} h(t) = \partial(t) - \frac{1}{RC}\, e^{\frac{-t}{RC}}\, U(t)$$

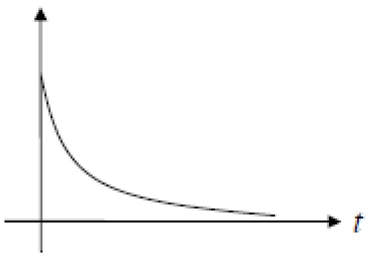
Graphe

❖ Réponse indicielle

$V_e(P) = \frac{1}{P}$ et $H(P) = \frac{V_S(P)}{V_e(P)}$

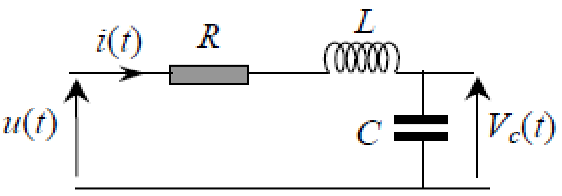
$$V_s(P) = H(P).V_e(P) = \frac{RCP}{1 + RCP} \cdot \frac{1}{P} = \frac{RC}{1 + RCP} = \frac{1}{P + \frac{1}{RC}}$$

$$\xrightarrow{TL^{-1}} \quad v_s(t) = e^{\frac{-t}{RC}}.U(t)$$



-Système d'ordre 2

L'exemple type d'un système d'ordre 2 est le filtre PB RLC.



Il est décrit par l'équation différentielle suivante en considérant des conditions initiales nulles

$$v_e(t) = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_c(t)$$

$$V_c(t) = v_s(t) = \frac{1}{c}\int i(t)dt$$

$$\xrightarrow{TL} V_e(P) = RI(P) + LPI(P) + V_C(P)$$

$$V_C(P) = v_s(P) = \frac{I(P)}{CP} \rightarrow I(P) = CPV_S(P)$$

$$V_e(P) = RCP\,V_S(P) + LPCP\,V_S(P) + V_S(P) = V_S(P)[RCP + LCP^2 + 1]$$

La fonction de transfert $H(P) = \frac{V_S(P)}{V_e(P)} = \frac{1}{1+RCP\,LCP^2}$

Sous forme normalisée

$$H(P) = \frac{\omega_n^2}{P^2 + 2\gamma\omega_n P + \omega_n^2}$$

$$H(P) = \frac{LC}{P^2 + \frac{R}{L}P + \frac{1}{LC}}$$

Le dénominateur admet deux pôles, l'étude sera faite selon la nature de ces deux pôles.