Université Mohammed Seddik Benyahia-Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Topologies des espaces de fonctions

Cours destiné aux étudiants de la deuxième année master
Mathématiques Fondamentales et Discrètes
Année 2020- 2021

Prof. Abderrahmane Bouchair

Chapitre 1

Espaces Topologiques et Métriques

1.1 Notions de base

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble non vide. On appelle topologie sur X toute famille τ de parties de X vérifiant les conditions suivantes :*

1. $X, \phi \in \tau$.
2. $\forall U_1, U_2 \in \tau, U_1 \cap U_2 \in \tau$.
3. $\forall (U_i)_{i\in I} \subset \tau, \bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau$.

Si τ est une topologie sur X, alors (X,τ) est appelé un espace topologique et les éléments de τ sont appelés ***les ouverts*** *de cet espace.*

Exemple 1.1.1

1. $\tau = \{\phi, X\}$ *est une topologie sur X, appelée topologie grossière.*

2. $\tau = \mathcal{P}(X)$ *est une topologie sur X, appelée topologie discrète.*

3. *La famille τ de tous les intervalles ouverts et réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$, appelé la topologie usuelle.*

Remarque 1.1.1 *Pour un espace topologique (X,τ) donné, on appelle fermé de X toute partie dont le complémentaire est un ouvert de X.*

Définition 1.1.2 *Soient (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$. On appelle topologie induite par X sur A la famille $\tau_A = \{O \cap A : O \in \tau\}$.*

Définition 1.1.3 *Soit X un ensemble non vide. On appelle distance sur X toute application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y, \forall x, y \in X$.
2. $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$.
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in X$.

Si d une distance sur X, alors (X,d) est appelé un espace métrique.

Exemple 1.1.2

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+.$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = |x - y|.$$

est une distance sur $\mathbb{R}$ appelée la distance usuelle.

Définition 1.1.4 *Soient (X,d) un espace métrique, $x_0 \in X$, et $r > 0$. On appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r l'ensemble :*

$$\mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in X, d(x, x_0) < r\}.$$

Définition 1.1.5 *Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$. On dit que A est ouvert dans (X,d) si*

$$\forall x \in A, \exists r \in \mathbb{R}_+^* : \mathcal{B}(x,r) \subset A.$$

La famille τ_d de tous les ouverts de (X,d) est une topologie sur X, appelée la topologie associée à d.

Exemple 1.1.3 *La topologie associée à la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ est la topologie usuelle.*

Définition 1.1.6 *Soit (X,τ) un espace topologique. On dit que τ est **métrisable**, s'il existe une distance d sur X telle que : $\tau_d = \tau$.*

Exemple 1.1.4

1. *$\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est métrisable.*
2. *Soit X un ensemble constitué de plus de deux éléments. Alors la topologie grossière sur X n'est pas métrisable. En effet. Si d une distance sur X et $x \neq y \in X$ alors $y \notin \mathcal{B}(x, d(x,y))$, donc $\mathcal{B}(x, d(x,y)) \neq X$.D'où $\{\phi, X\} \subsetneq \tau_d$, pour toute distance d sur X.*

3. *La topologie discrète est métrisable. On prend la distance d donnée par :*
   $d(x,x) = 0$ *et* $d(x,y) = 1$ *si* $x \neq y$.

Définition 1.1.7 *Soit* X *un ensemble et* τ_1, τ_2 *deux topologies sur* X. *On dit que* τ_1 *est moins fine que* τ_2 *(ou bien* τ_2 *est plus fine que* τ_1*) si* $\tau_1 \subset \tau_2$. *On écrit :*

$$(X, \tau_1) \leq (X, \tau_2).$$

Exemple 1.1.5 *La topologie grossière est moins fine que la topologie discrète sur* X.

Définition 1.1.8 *Soit (*X,τ*) un espace topologique et* $x \in X$. *On dit qu' un sous ensemble* $V \subset X$ *est un* ***voisinage*** *de* x, *s'il existe* $\Omega \in \tau$ *tel que :*

$$x \in \Omega \subset V.$$

On note $\mathcal{V}(x)$ *la famille de tous les voisinages de* x.

Proposition 1.1.1 *Soit* X *un espace topologique et* $x \in X$.

1. *L'intersection finie de voisinages d'un point* x *est un voisinage de ce point.*
2. x *appartient à tous ses voisinages.*
3. V *est un ouvert si et seulement s'il est voisinage de tous ses points.*

Définition 1.1.9 *Soit* (X, τ) *un espace topologique, et soient* $A \subset X, x \in X$. *On dit que* x *est un point adhérent à* A, *si l'intersection de* A *avec tout voisinage de* x *est non vide. L'ensemble de tous les points adhérents à* A *est appelé l'adhérence de* A *et noté* $\bar{A}$, *i.e. :*

$$x \in \bar{A} \Longleftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \phi).$$

Proposition 1.1.2 *Soit* (X, τ) *un espace topologique et soient* $A, B \subset X$. *Alors :*

1. $\bar{A}$ *est le plus petit fermé qui contient* A.
2. $\bar{\phi} = \phi$.
3. $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$.
4. A *fermé* $\Leftrightarrow A = \bar{A}$.
5. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
6. $A \subset \bar{A}$.
7. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Remarque 1.1.2 *Soient X et Y deux espaces topologiques tel que $Y \subset X$, et A un sous ensemble de Y. On note par $\bar{A}^Y$ l'adhérence de A dans Y.*

Proposition 1.1.3

Soient X un ensemble et $\sim: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ un opérateur qui associe à chaque partie $A \subset X$ une partie $\widetilde{A} \subset X$, et possède es propriétés suivantes :

1. $\widetilde{\emptyset} = \emptyset$;
2. $A \subset \widetilde{A}$;
3. $\widetilde{A \cup B} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$;
4. $\widetilde{\widetilde{A}} = \widetilde{A}$.

Alors la famille $\tau = \{\Omega : C^{\Omega} = \widetilde{C^{\Omega}}\} = \{C^{\Omega} : \Omega = \widetilde{\Omega}\}$ est une topologie sur X. De plus, pour tout $A \subset X$, l'ensemble $\widetilde{A}$ est la ferméture de A dans (X, τ).

Démonstration. Montrons que la famille τ est une topologie sur X. On a :

1. $\emptyset = \widetilde{\emptyset}$; donc $C^{\emptyset} = X \in \tau$.
   $X \subset \widetilde{X}$; donc $X = \widetilde{X}$ ce qui implique que $C^X = \emptyset \in \tau$.
2. Soient $\Omega_1, \Omega_2 \in \tau$. Donc $\widetilde{C^{\Omega_1}} = C^{\Omega_1}$ et $\widetilde{C^{\Omega_2}} = C^{\Omega_2}$; d'autre part
   $$\widetilde{C^{\Omega_1}} \cup \widetilde{C^{\Omega_2}} = \widetilde{C^{\Omega_1} \cup C^{\Omega_2}} = \widetilde{C^{\Omega_1 \cap \Omega_2}}.$$
   Et on a aussi
   $$\widetilde{C^{\Omega_1}} \cup \widetilde{C^{\Omega_2}} = C^{\Omega_1} \cup C^{\Omega_2} = C^{\Omega_1 \cap \Omega_2}.$$
   Donc
   $$\widetilde{C^{\Omega_1 \cap \Omega_2}} = C^{\Omega_1 \cap \Omega_2}.$$
   finalement, on obtient
   $$\Omega_1 \cap \Omega_2 \in \tau.$$
3. Soit $(\Omega_i)_{i \in I} \subset \tau$, on va montrer que $C^{\cup \Omega_i} = \widetilde{C^{\cup \Omega_i}}$, pour tout $i \in I$. D'après la condition (2) on a $C^{\cup \Omega_i} \subset \widetilde{C^{\cup \Omega_i}}$ pour tout $i \in I$.
   Inversement. On doit tout d'abord montrer que si $A \subset B$, alors $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$. Soit $A \subset B$ donc $A \cup B = B$, donc $\widetilde{A \cup B} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B} = \widetilde{B}$, d'où $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$.
   D'autre part on a :
   $$\bigcap_{i \in I} C^{\Omega_i} \subset C^{\Omega_i} \text{ pour tout } i \in I$$

alors

$$\widetilde{\bigcap_{i\in I} C^{\Omega_i}} \subset \widetilde{C^{\Omega_i}} = C^{\Omega_i}, \text{ pour tout } i \in I$$

donc

$$\widetilde{\bigcap_{i\in I} C^{\Omega_i}} \subset \cap C^{\Omega_i}.$$

D'où

$$\widetilde{C^{\cup_{i\in I}\Omega_i}} \subset C^{\cup_{i\in I}\Omega_i}.$$

Donc par double inclusion $C^{\cup\Omega_i} = \widetilde{C^{\cup\Omega_i}}$, pour tout $i \in I$, d'où $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \tau$. Donc τ est une topologie sur X.

Maintenant, on doit montrer que $\widetilde{F} = \bar{F}$ pour tout $F \subset X$.

Selon la condition (4) on a $\widetilde{\widetilde{F}} \subset \widetilde{F}$ est un fermé de X. Comme $F \subset \widetilde{F}$, alors $\bar{F} \subset \widetilde{F}$ puisque $\bar{F}$ est le plus petit fermé contenant F.

Soit B un fermé de X tel que $F \subset B$. Alors $\widetilde{F} \subset \widetilde{B} = B$. Donc

$$\widetilde{F} \subset \bigcap\{B : B = \bar{B} \text{ et } F \subset B\} = \widetilde{F}$$

et donc cela prouve que $\bar{F} = \widetilde{F}$.

■

Définition 1.1.10 *Soit (X,τ) un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \tau$. On dit que $\mathcal{B}$ est une base de τ, si tout élément de τ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.*

Exemple 1.1.6

1. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{]a,b[, a,b \in \mathbb{R}\}$ *est une base de la topologie usuelle sur* $\mathbb{R}$.
2. *Soit X un ensemble. Alors $\mathcal{B} = \{\{x\}, x \in X\}$ est une base pour la topologie discrète sur X.*

Proposition 1.1.4 *Toute base $\mathcal{B}$ d'un espace topologique X jouit des deux propriétés suivantes :*

$B_1)$ $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in U_1 \cap U_2, \exists U \in \mathcal{B} : x \in U \subset U_1 \cap U_2.$

$B_2)$ $\forall x \in X, \exists U \in \mathcal{B} : x \in U.$

Proposition 1.1.5 *$\mathcal{B}$ est une base de la topologie τ, si et seulement si pour tout point $x \in X$, et tout ouvert V contenant x, il existe un ouvert $U \in \mathcal{B}$, tel que $x \in U \subset V$.*

Définition 1.1.11 *Soit (X,τ) un espace topologique et $\mathcal{B}_0 \subset \tau$. On dit que $\mathcal{B}_0$ est* ***une sous base*** *de τ, si la famille $I(\mathcal{B}_0)$ de toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}_0$ forme une base pour τ, i.e. :*

$$I(\mathcal{B}_0) = \{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n / A_i \in \mathcal{B}_0, i = 1, 2, ..., n\}.$$

Exemple 1.1.7 *La famille $\mathcal{B} = \{]-\infty, a[,]b, +\infty[, a, b \in \mathbb{R}\}$ est une sous base pour $(\mathbb{R}, |.|)$ puisque $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset I(\mathcal{B})$.*

Proposition 1.1.6 *Soit X un ensemble, et $\mathcal{B}$ une famille de sous ensembles de X qui a les propriétés (B_1) et (B_2) de la Proposition (1.1.4) , soit $\mathcal{O}$ la famille de tous les sous ensembles de X qui sont des unions de sous familles de $\mathcal{B}$, c'est à dire :*

$$U \in \mathcal{O} \Longleftrightarrow U = \bigcup \mathcal{B}_0 \text{ pour } \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}.$$

La famille $\mathcal{O}$ est une topologie sur X et la famille $\mathcal{B}$ est une base pour l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$.

Démonstration. Montrons que la famille $\mathcal{O}$ forme une topologie sur X.

1. La condition (1) est satisfaite car $\emptyset = \bigcup \mathcal{B}_0$ pour $\mathcal{B}_0 = \emptyset$, et par (B_2) on a $X = \bigcup \mathcal{B}_0$ pour $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$.
2. Montrons que la condition (2) est satisfaite. Prenons $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$, alors $U_1 = \bigcup_{s \in S} V_s$ et $U_2 = \bigcup_{t \in T} W_t$ où $(V_s), (W_t) \subset \mathcal{B}$ pour $s \in S$ et $t \in T$. On a

   $$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{s \in S, t \in T} V_s \cap W_t.$$

   Pour cela il suffit de prouver que $V_s \cap W_t$ est l'union d'une sous famille de $\mathcal{B}$. D'après (B_1), pour chaque $x \in V_s \cap W_t$, il existe $\Omega(x) \in \mathcal{B}$ tel que :

   $$x \in \Omega(x) \subset V_s \cap W_t.$$

   Et cela implique que

   $$V_s \cap W_t = \bigcup \mathcal{B}_0 \text{ pour } \mathcal{B}_0 = \{\Omega(x) : x \in V_s \cap W_t\}.$$

3. La condition (3) est satisfaite par définition de la famille $\mathcal{O}$.

Donc $\mathcal{O}$ est une topologie sur X. Clairement, $\mathcal{B}$ est une base de X. ■

Définition 1.1.12 *Soit E un ensemble. On appelle* ***cardinal*** *de E, noté $|E|$, le nombre d'éléments distincts de E.*
On note le cardinal de $\mathbb{N}$ par $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. et le cardinal de $\mathbb{R}$ par $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

Définition 1.1.13 *Soit E un ensemble non vide. On dit que E est* ***dénombrable*** *s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, et on note $|E| = \aleph_0$.*
On dit que E est au plus dénombrable s'il est dénombrable ou fini, , et on note $|E| \leq \aleph_0$.

Exemple 1.1.8 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *sont des ensembles dénombrables.*

Définition 1.1.14 *Soit X un espace topologique. On dit que X satisfait au deuxième axiome de dénombrabilité s'il admet une base dénombrable.*

Exemple 1.1.9 $\mathcal{B} = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[: x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*\}$ *est une base dénombrable pour $(\mathbb{R}, |.|)$. Donc $\mathbb{R}$ vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité.*

Définition 1.1.15 *Soit $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$. On dit que $\mathcal{B}(x)$ est un système fondamentale de voisinages de* ***x****, noté SFV de x, si :*

$$\forall V \subset \mathcal{V}(x), \exists U \in \mathcal{B}(x) : U \subset V.$$

Proposition 1.1.7 *Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace topologique X. Alors la famille :*

$$\mathcal{B}(x) = \{\Omega \in \mathcal{B} / x \in \Omega\}$$

est un SFV de x.

Exemple 1.1.10

1. *Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ la famille $\{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}^*\}$ est un SFV de x.*
2. *Si (X, d) est un espace métrique et $x \in X$, alors la famille $\{\mathcal{B}(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est un SFV de x.*
3. *Si X est un espace discret, alors $\mathcal{B}(x) = \{\{x\} : x \in X\}$ est un SFV de x.*

Proposition 1.1.8 *Soient X un espace topologique, et $A \subset X$. Alors :*

$$x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{B}(x), U \cap A \neq \phi.$$

Remarque 1.1.3 *Soit (X, τ) un espace topologique. Si $\mathcal{B}(x)$ est un SFV ouvert d'un point $x \in X$, alors $\bigcup_{x\in X} \mathcal{B}(x)$ est une base pour la topologie τ.*

Définition 1.1.16 *Soit X un espace topologique. On dit que X satisfait le premier axiome de dénombrabilité, si tout point de X admet un système fondamental de voisinages fini ou dénombrable.*

Exemple 1.1.11 *Tout espace métrique satisfait le premier axiome de dénombrabilité puisque la famille $\{\mathcal{B}(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est un SFV dénombrable de x, pour tout $x \in X$.*

Proposition 1.1.9 *Soit X un espace topologique. Si X vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité, alors il vérifie aussi le premier axiome de dénombrabilité.*

Démonstration. Supposons que X vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité et soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable de X. Alors

$$\mathcal{B}(x) = \{\Omega \in \mathcal{B}/x \in \Omega\}$$

est un système fondamental de voisinages dénombrable de x, pour tout $x \in X$. ■

Définition 1.1.17 *Soit X un espace topologique, et soit $A \subset X$. On dit que que A est* ***dense*** *ou bien partout dense dans X, si $\bar{A} = X$.*

Définition 1.1.18 *Un espace topologique X est dit séparable s'il admet un sous ensemble dénombrable $A \subset X$ partout dense, c'est à dire $\bar{A} = X$.*

Exemple 1.1.12

1. *$(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ est séparable. En effet, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ est dénombrable.*
2. *$(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ n'est pas séparable puisque pour tout $A \subset \mathbb{R}, \bar{A} = A \neq \mathbb{R}$.*

Proposition 1.1.10 *Tout espace a base dénombrable est séparable.*

Démonstration. Soit X un espace topologique a base dénombrable, et $\mathcal{B} = \{\Omega_n/n \in \mathbb{N}\}$ une base de X.
Choisissons arbitrairement pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un point $x_n \in \Omega_n$ et posons $A = \{x_n/n \in \mathbb{N}\}$. Il est clair que A est dénombrable.
Soit U un ouvert de X. Alors $U = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ tels que $\Omega_i \in \mathcal{B}$, $I \subset \mathbb{N}$, alors $x_i \in U$, pour tout $i \in I$. Donc $x_i \in A \cap U, \forall i \in I$, alors $A \cap U \neq \phi$. D'où $\bar{A} = X$. ■

Proposition 1.1.11 *Si X un espace métrique, alors X est séparable si et seulement si X a une base dénombrable.*

Définition 1.1.19 *Soit (X,d) un espace métrique, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. On dit que $(x_n)_n$ **converge** vers $x \in X$ si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \epsilon.$$

On écrit $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$.

Proposition 1.1.12 *Soit (X,d) un espace métrique, si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est convergente. Alors sa limite est unique.*

Définition 1.1.20 *Soit (X,d) un espace métrique, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. On dit que $(x_n)_n$ est **une suite de Cauchy** si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon.$$

Proposition 1.1.13 *Soit (X,d) un espace métrique. Alors toute suite convergente dans X est une suite de Cauchy.*

Remarque 1.1.4 *L'inverse de cette proposition est faux.*

Exemple 1.1.13 *Soient $X =]0,1]$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que $(x_n) = \frac{1}{n}, 0 < \frac{1}{n} \leq 1$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin X.$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans X.
Pour montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy on prend $p = n + q$, donc

$$\begin{aligned} |x_p - x_q| < \epsilon &\Leftrightarrow |x_{n+q} - x_q| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow |\frac{1}{n+q} - x_q| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow |\frac{q-n-q}{q(n+q)}| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{q(n+q)} < \epsilon. \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{n}{n+q} < 1 \Rightarrow \frac{n}{q(n+q)} < \frac{1}{q} < \epsilon.$$

alors il suffit de prendre $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$.
Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Définition 1.1.21 *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est **complet** si toute suite de Cauchy de points de X est convergente.*

Exemple 1.1.14 $(\mathbb{R}, |.|)$ *est un espace métrique complet.*

1.2 Applications continues

Définition 1.2.1 *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors f est continue si pour tout $x_0 \in X$ et tout voisinage V de $f(x_0)$ dans Y, il existe un voisinage U de x_0 dans X, tel que $f(U) \subset V$. Ou encore, si pour tout ouvert(resp. fermé) V de Y, $f^{-1}(V)$ est un ouvert (resp. fermé) de X.*

Proposition 1.2.1 *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application . Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *f est continue.*
2. *Si $\mathcal{B}$ une base de Y, alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X, pour tout $U \in \mathcal{B}$.*
3. *Si $\mathcal{S}$ une sous base de Y, alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X, pour tout $V \in \mathcal{S}$.*

Proposition 1.2.2 *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alorsles conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue.*
2. $\forall A \subset X, f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
3. $\forall B \subset Y, \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$.

Démonstration.
(1) $\Rightarrow$ (2). Soit $A \subset X$. Puisque f est continue, alors $f^{-1}(\overline{f(A)})$ est un fermé de X et contient $f^{-1}(f(A))$. Alors on a :

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$$

alors

$$\bar{A} \subset \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})} = f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

D'où

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

$(2) \Rightarrow (3)$. Soit $B \subset Y$. D'après la relation précédente ; on a :

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \bar{B}.$$

D'où

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B}).$$

■

Proposition 1.2.3 *Soient X un espace discret et Y espace topologique. Alors toute application de X dans Y est continue.*

Définition 1.2.2 *Une application $f : X \longrightarrow Y$ est **ouverte** (resp **fermée**) si l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert (resp fermé) de Y.*

Théorème 1.2.4 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application et soit $\mathcal{B}$ une base de X. Alors :*

$$f \text{ ouverte} \iff f(U) \text{ est un ouvert de } Y \text{ pour tout } U \in \mathcal{B}.$$

Définition 1.2.3 *Une application $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme si elle est bijective continue et f^{-1} est continue.*

Proposition 1.2.5 *Soient X, Y deux espaces topologique et $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme. Alors :*

1. *f est ouverte.*
2. *f est fermée.*
3. *$f(A)$ est un ouvert (fermé) de $Y \iff A$ est un ouvert (fermé) de X.*
4. *$f^{-1}(B)$ est un ouvert (fermé) de $X \iff B$ est un ouvert (fermé) de Y.*

1.3 Topologie produit

Soient $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, et $X = \prod_{i\in I} X_i$.

Définition 1.3.1 *On appelle **projecteur de X sur** X_j, $j \in I$, l'application $P_j : X \longrightarrow X_j$ qui à un élément $x = (x_i)_{i\in I}$ de X associe $P_j(x) = x_j$.*

Définition 1.3.2 *On appelle **topologie produit**, la topologie la moins fine sur X qui rend continue les applications $P_j : X \longrightarrow X_j$ pour $j \in I$. C'est à dire si $\mathcal{O}_j$ est un ouvert de X_j, alors on veut que $P^{-1}(\mathcal{O}_j)$ soit un ouvert de X.*

Proposition 1.3.1 *La topologie produit est la topologie engendré par les ensembles*

$$\{P^{-1}(\mathcal{O}_j), \mathcal{O}_j \in \tau_j, j \in I\}.$$

Proposition 1.3.2 *Une base $\mathcal{B}$ de la topologie produit est constituée des parties de X de la forme $\prod_{j\in I} \Omega_j$, où chaque Ω_j est égale à X_j sauf pour un nombre fini d'indices, qui peuvent être seulement des ouverts.*

Proposition 1.3.3 *Chacune des projections P_i est une application surjective, continue et ouverte.*

Démonstration.

1. La surjectivité est évidente.
2. Soient P_i une projection et V un ouvert de X_i. On a $P_i^{-1}(V) = \prod_{j\neq i} \Omega_j$, où

$$\Omega_j = X_j \; si \; j \neq i \text{ et } \Omega_i = V$$

   qui est un ouvert élémentaire, donc P_i est continue.

3. Soit $U = \prod_{j\in I} U_j$ un ouvert élémentaire, $P_i(U) = U_i$ est un ouvert de X_i. P_i est donc une application ouverte.

■

Proposition 1.3.4 *Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $\phi \neq A_i \subset X_i$, pour tout $i \in I$. Alors :*

1. $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \bar{A}_i$.

2. $\prod_{i\in I} A_i$ *est fermé dans* $\prod_{i\in I} X_i$ *si et seulement si* A_i *est fermé dans* X_i*, pour tout* $i \in I$.

Démonstration.

1. Soit $x \in \overline{\prod_{i\in I} A_i}$, tel que $x = (x_i)_{i\in I}$. Alors :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap \prod_{i\in I} A_i \neq \phi.$$

On a $V \in \mathcal{V}(x)$ alors $V = \prod_{i\in I} V_i$ tel que $V_i \in \mathcal{V}(x_i), \forall i \in I$.

Donc

$$\begin{aligned}
V \cap \prod_{i\in I} A_i = (\prod_{i\in I} V_i) \cap (\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I}(V_i \cap A_i) \neq \phi. \\
\Longleftrightarrow V_i \cap A_i \neq \phi, \forall V_i \in \mathcal{V}(x_i), \forall i \in I. \\
\Longleftrightarrow x_i \in \bar{A}_i, \forall i \in I. \\
\Longleftrightarrow x \in \prod_{i\in I} \bar{A}_i.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\prod_{i\in I} A_i \text{ fermé } &\Longleftrightarrow \prod_{i\in I} A_i = \overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \bar{A}_i. \\
&\Longleftrightarrow A_i = \bar{A}_i, \forall i \in I. \\
&\Longleftrightarrow A_i \text{ fermé }, \forall i \in I.
\end{aligned}$$

■

1.4 Axiomes de séparation

Définition 1.4.1 *Un espace topologique X est dit :*

1. *Un espace T_0 si pour tous x, y deux points distincts de X, il existe un voisinage de x ne contenant pas y ou bien un voisinage de y ne contenant pas x.*
2. *Un espace T_1 si pour tous x, y deux points distincts de X, il existe un voisinage de x ne contenant pas y et un voisinage de y ne contenant pas x.*
3. *Un espace T_2 ou **séparé** si pour tous x, y deux points distincts de X, il existe deux ouverts U et V, tel que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \phi$. Notons qu'un espace séparé est dit aussi de **Hausdorff**.*

Il vient de la définition que tout espace séparé est un espace T_1, et tout espace T_1 est un espace T_0.

Proposition 1.4.1 *un espace topologique X est T_1 si et seulement si tout singleton $\{x\} \subset X$ est un fermé.*

Démonstration. Supposons que X est un espace T_1. Soit $x \in X$. Montrons que $\overline{\{x\}} = \{x\}$. Supposons qu'il existe $y \in \overline{\{x\}}$, tel que $y \neq x$. Donc pour tout voisinage V de y, on a $V \cap \{x\} \neq \phi$. Alors $x \in V$, ce qui absurde car X est T_1.

Inversement. Soient x et y deux points distincts de X. On a $\{x\}$ est fermé , alors $X \setminus \{x\}$ est un ouvert et donc c'est un voisinage de y ne contenant pas x. De même, on a $X \setminus \{y\}$ est un voisinage ouvert de x qui ne contient pas y. D'où X est T_1. ∎

Proposition 1.4.2 *Tout espace métrique est séparé.*

Démonstration. Soit X un espace métrique. On a pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $V = \mathcal{B}(x, \frac{1}{3}d(x,y)) \in \mathcal{V}(x)$, il existe $U = \mathcal{B}(y, \frac{1}{3}d(x,y)) \in \mathcal{V}(y)$ et $U \cap V = \phi$. ∎

Proposition 1.4.3 *Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Alors :*

1. $\prod\limits_{i \in I} X_i$ *est T_1 si et seulement si X_i est $T_1, \forall i \in I$.*
2. $\prod\limits_{i \in I} X_i$ *est séparé si et seulement si X_i est séparé, $\forall i \in I$.*

Démonstration.

1. Supposons que $\prod\limits_{i \in I} X_i$ est T_1. Alors pour tout $x \in \prod\limits_{i \in I} X_i$, le sous ensemble $\{x\}$ est fermé dans $\prod\limits_{i \in I} X_i$, et

$$\begin{aligned} \{x\} = \prod_{i \in I} \{x_i\} \text{ est fermé dans } \prod_{i \in I} X_i &\Longleftrightarrow \{x_i\} \text{ fermé dans } X_i, \forall i \in I. \\ &\Longleftrightarrow X_i \textit{ est } T_1, \forall i \in I. \end{aligned}$$

2. Supposons que $\prod\limits_{i \in I} X_i$ est séparé. Soit $i_0 \in I$ et soient $x_{i_0}, y_{i_0} \in X_{i_0}$ tels que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Prenons un point $x_j \in X_j, j \in I$, et posons $x = (z_j)_{j \in I}, y = (z'_j)j \in I$ avec

$$z_j = x_j, \forall j \in I$$

et

$$z'_j = \begin{cases} x_j, & si\ j \in I - \{i_0\}. \\ y_{i_0}, & si\ j = i_0. \end{cases}$$

Alors $x \neq y$, donc il existe un voisinage V de x et un voisinage U de y tels que $U \cap V = \phi$ alors

$$U \cap V = (\prod_{i \in I} V_i) \cap (\prod_{i \in I} U_i) = \prod_{i \in I} (V_i \cap U_i = \phi)$$
$$\Longrightarrow V_{i_0} \cap U_{i_0} = \phi.$$

Donc X_{i_0} est séparé.

Inversement. Supposons que X_i est séparé pour tout i. Soient $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ tels que $x \neq y$, alors il existe $i_1 \in I$ tel que $x_{i_1} \neq y_{i_1}$. Comme X_{i_1} est séparé alors :

$$\exists V_{i_1} \in \mathcal{V}(x_{i_1}), \exists W_{i_1} \in \mathcal{V}(y_{i_1}).$$

tels que $V_{i_1} \cap W_{i_1} = \phi$. Posons :

$$V = \prod_{i \in I} V_i \textit{ avec } V_i = X_i \textit{ pour tout } i \neq i_1$$

et

$$W = \prod_{i \in I} W_i \textit{ avec } w_i = X_i \textit{ pour tout } i \neq i_1.$$

Alors V est un voisinage de x, W et un voisinage de y, et $V \cap W = \phi$. D'où $\prod_{i \in I} X_i$ est séparé .

■

Proposition 1.4.4 *Soient X un ensemble et τ_1, τ_2 deux topologies sur X. Supposons que τ_1 est moins fine que τ_2. Si (X, τ_1) est un espace T_i $(i = 0, 1, 2)$ alors (X, τ_2) est aussi un espace T_i.*

Démonstration. Montrons le cas $i = 2$, les autres cas se démontrent de la même façon. Supposons que (X, τ_1) est un espace séparé, et montrons que (X, τ_2) est séparé.
Soit $x, y \in X$ tel que $x \neq y$. Il existe $U, V \in \tau_1$ avec $x \in U, y \in V$ et $U \cap V = \phi$. Mais $\tau_1 \subset \tau_2$ alors $U, V \in \tau_2$. Donc l'espace (X, τ_2) est séparé. ■

Définition 1.4.2 *Un espace topologique X est dit T_3 ou régulier s'il est T_1 et si pour tout $x \in X$ et tout fermé F de X, tel que $x \notin F$, il existe deux ouverts U et V tel que $x \in U$, $F \subset V$ et $U \cap V = \phi$.*

Définition 1.4.3 *Un espace topologique X est dit complétement régulier ou de Tychonoff s'il est T_1 et si pour tout $x \in X$ et tout fermé F de X, tel que $x \notin F$, il existe une fonction continue f de X dans $[0, 1]$ avec $f(x) = 0$ et $f(y) = 1, \forall y \in F$.*

Exemple 1.4.1 $(\mathbb{R}, |.|)$ *est un espace complètement régulier.*

Proposition 1.4.5 *Tout espace complètement régulier est régulier.*

Démonstration. Soient X un espace complètement régulier, $x \in X$ et F un fermé de X tel que $x \notin F$. Il existe alors une fonction continue $f : \longrightarrow [0,1]$, tel que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$, pour tout $y \in F$. Les deux ensembles $U = f^{-1}([0, 1/2[)$ et $V = f^{-1}(]1/2, 1])$ sont deux ouverts disjoints de X avec $x \in U$ et $F \subset V$. Cela montre que X est régulier. ■

Proposition 1.4.6 *Soit X un espace topologique. Alors X est régulier si et seulement si pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage V de x, il existe un ouvert U tel que :*

$$x \in U \subset \bar{U} \subset V.$$

Démonstration. Supposons que X est régulier. Soit $\mathcal{B}_0$ une sous base de X. Soit $x \in X$ et $V \in \mathcal{B}_0$ un voisinage de x. Alors il existe deux ouverts U_1, U_2 tels que $x \in U_1$ et $X \backslash V \subset U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \phi$. Donc

$$U_1 \subset X \backslash U_2 \subset V.$$

D'où

$$U_1 \subset \bar{U_1} \subset \overline{X \backslash U_2} = X \backslash U_2 \subset V.$$

Inversement. Supposons que la condition est vérifié. Soit $x \in X$ et F un fermé de X tel que $x \notin F$. D'après la définition de la sous base, il existe $V_1, V_2, ..., V_k \in \mathcal{B}_0$ tels que $x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subset X \backslash F$. Choisissons pour tout $i \in I$ un voisinage W_i de x tels que $\bar{W}_i \subset V_i$. Alors $U_1 = \bigcap_{i=1}^{k} W_i$ et $U_2 = X \backslash \bigcap_{i=1}^{k} \bar{W}_i$ sont deux ouverts disjoints et

$$F \subset X \backslash \bigcap_{i=1}^{k} V_i \subset X \backslash \bigcap_{i=1}^{k} \bar{W}_i = U_2.$$

D'où X est régulier. ■

1.5 Espaces compacts

Définition 1.5.1 *Soit X un espace topologique et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X. On dit que $(\Omega_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de X si $X = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.*
un recouvrement est dit ouvert si tout membre de cet recouvrement est un ouvert.

Définition 1.5.2 *Un espace topologique X est dit compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*
Un sous-espace $A \subset X$ est compact si tout recouvrement ouvert de A admet un sous-recouvrement fini.

Exemple 1.5.1

1. $[a, b]$ *est compact, tels que* $a; b \in \mathbb{R}$.
2. $]0, 1]$ *n'est pas compact. Puisque la famille* $\{]\frac{1}{n}, 1] : n \in \mathbb{N}^*\}$ *est un recouvrement ouvert dont on ne peut pas extraire un sous recouvrement fini.*

Proposition 1.5.1 *Soit X un espace topologique.*

1. *Si X est compact et $A \subset X$ est fermé, alors A est compact.*
2. *Si X est séparé et $A \subset X$ est compact, alors A est fermé.*
3. *Si X est fini, alors il est compact.*
4. *Si X est compact , alors de toute suite infinie de points de X on peut extraire une sous suite convergente.*

Proposition 1.5.2 *Soient X un espace séparé et $\{F_1, F_2, ..., F_k\}$ une famille finie de parties fermées de X. Le sous-espace $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ de X est compact si seulement si F_i est compact pour tout i.*

Proposition 1.5.3 *Soit (X, d) un espace métrique. Alors tout sous-ensemble compact de X est borné.*

Démonstration. Soit $A \subset X$ un compact. Alors la famille $\{\mathcal{B}(x, 1)/x \in A\}$ est un recouvrement ouvert de A. Comme A est compact alors $\exists x_1, x_2, ..., x_p \in A$ tel que $A \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}(x_i, 1)$. Soient $x, y \in A \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}(x_i, 1)$ donc $\exists i_0, i_1 \in \{1, 2, ...p\}$, tels que $x \in \mathcal{B}(x_{i_0}, 1), y \in \mathcal{B}(x_{i_1}, 1)$, alors

$$d(x, y) \leq d(x, x_{i_0}) + d(x_{i_0}, x_{i_1}) + d(x_{i_1}, y) \leq d(x_{i_0}, x_{i_1}) + 2.$$

D'où

$$d(x, y) \leq \max_{1 \leq i \leq j \leq p} d(x_i, x_j) + 2 < +\infty.$$

■

Proposition 1.5.4 *Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors A est compact si et seulement si A est borné fermé.*

Proposition 1.5.5 *L'image d'un compact par une application continue dans un espace séparé est compact.*

Démonstration. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, et $A \subset X$ est compact. Supposons que $f(A) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, où $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$. On trouve alors que

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset \ f^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i) \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i).$$

Puisque f est continue, alors $f^{-1}(U_i)$ est ouvert dans X, pour tout $i \in I$. Donc $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de A. Alors on peut extraire un sous-recouvrement fini car A est compact. C'est à dire, il existe $\{i_1, i_2, ...i_k\} \subset I$, où $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}(U_{i_j})$. Alors $f(A) \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$ et ce qui montre que $f(A)$ admet un sous-recouvrement fini. D'où $f(A)$ est compact. ■

Définition 1.5.3 *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous ensembles de X. On dit que $(F_i)_{i\in I}$ est **centrée** ou bien vérifie la condition de l'intersection fini, si $\bigcap_{i\in J} F_i \neq \phi$, pour tout J fini.*

Proposition 1.5.6 *Soit X un espace topologique séparé. Alors X est compact si et seulement si toute famille centrée de fermées de X a une intersection non vide.*

Exemple 1.5.2 $\mathbb{R}$ *n'est pas compact. Puisque $\{[n, +\infty[: n \in \mathbb{Z}\}$ est une suite décroissante de fermées dont l'intersection est vide.*

Théorème 1.5.7 (Théorème de Tychonoff) *L'espace produit $X = \prod_{s\in S} X_s$, où $X \neq \phi$, pour tout $s \in S$ est compact si et seulement si les espaces X_s sont tous compacts.*

Définition 1.5.4 *Un espace topologique X est dit localement compact, s'il est séparé et si tout point de X admet un voisinage compact.*

Exemple 1.5.3 $(\mathbb{R}, |.|)$ *est localement compact.*

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset [x - \epsilon, x + \epsilon].$$

Proposition 1.5.8 *Un espace séparé est localement compact si et seulement si tout point de cet espace possède un voisinage U tel que $\bar{U}$ soit compact.*

Théorème 1.5.9 *Tout espace localement compact est complètement régulier.*

Chapitre 2

Topologies sur les espaces de fonctions continues

2.1 Topologie de la convergence simple

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ une famille finie d'ensembles, et $x \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Donc $x = (x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in X_i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Le point x peut être interprété comme suit :

$$x : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} X_i$$
$$j \longmapsto x(j) = x_j$$

Inversement, si

$$f : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} X_i$$
$$j \longmapsto f(j) \in X_j$$

Alors il existe un point unique $x_f \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, telle que

$$f(1, 2, ..., n) = x_f = (f(1), f(2), ..., f(n)).$$

A l'aide de cette interprétation, on définit le produit cartésien d'une famille arbitraire d'ensembles comme suit

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i / f(i) \in X_i, \forall i \in I\}$$

Soit X ,Y deux espaces topologiques. On note

$$Y^X = \{f : X \to Y/f \text{ une application } \}$$

Alors, on munit $Y^X = \prod_{x\in X} Y_x, Y_x = Y$, pour tout $x \in X$, de la topologie produit. On considère $C(X,Y)$, l'ensemble de toutes les fonctions continues de X dans Y.

- Si $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$, alors on note

$$[A, B] = \{f \in C(X, Y) : f(A) \subseteq B\}$$

.

- Si $A = \{x\}$ alors on écrit $[x, B]$ au lieu de $[\{x\}, B]$.

2.2 Définitions

On donne les propriétés suivantes.

Proposition 2.2.1

Soient X et Y deux espaces topologiques, $A, A_1, ..., A_n$ des sous ensembles de X et $B, B_1, ..., B_n$ des sous ensembles de Y. Alors

(1) $\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, B\right] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [A_i, B]$.

(2) $\left[A, \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i\right] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [A, B_i]$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}.\ \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i, B\right] &= \{f \in C(X,Y) : f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \subset B\} \\
&= \{f \in C(X,Y) : \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i) \subset B\} \\
&= \{f \in C(X,Y) : f(A_i) \subset B, \forall i \in \{1, ..., n\}\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{f \in C(X,Y) : f(A_i) \subset B\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} [A_i, B].
\end{aligned}$$

$$\mathbf{2}.\ \left[A, \bigcap_{i=1}^{n} B_i\right] = \{f \in C(X,Y) : f(A) \subset \bigcap_{i=1}^{n} B_i\}$$
$$= \{f \in C(X,Y) : f(A) \subset B_i, \forall i \in \{1,...,n\}\}$$
$$= \bigcap_{i=1}^{n} \{f \in C(X,Y) : f(A) \subset B_i\}$$
$$= \bigcap_{i=1}^{n} [A, B_i].$$

■

Définition 2.2.1 *La famille* $B_p = \{\bigcap_{i=1}^{n} [x_i, U_i] : x_i \in X, U_i \in \tau_Y, \forall i = 1, ..., n\}$ *est une base pour une topologie sur* $C(X,Y)$ *appelée la topologie de la convergence simple, qu'on la note par* τ_p *et l'espace obtenu sera noté* $C_p(X,Y)$.

Proposition 2.2.2 *Soit* $x \in X$, *et* $U \subset Y$ *et considérons la projection*

$$P_x : Y^X \longrightarrow Y$$
$$f \longmapsto P_x(f) = f(x)$$

Alors $[x, U] = C(X,Y) \cap P_x^{-1}(U)$.

Démonstration. On a

$$[x, U] = \{f \in C(X,Y) : f(x) \in U\}$$
$$= \{f \in C(X,Y) : P_x(f) \in U\}$$
$$= \{f \in C(X,Y) : f \in P_x^{-1}(U)\}$$
$$= C(X,Y) \cap P_x^{-1}(U).$$

■

Proposition 2.2.3 *La topologie* τ_p *coïncide avec la topologie induite sur* $C(X,Y)$ *par la topologie produit de* Y^X.

Démonstration. Soit τ_1 la topologie induite sur $C(X,Y)$ par la topologie produit de l'espace produit Y^X et soit $W \in \tau_1$. Alors $W = A \cap C(X,Y)$, où A est un ouvert de Y^X. (On peut prendre A un ouvert élémentaire de Y^X). On a donc

$$A = P_{x_1}^{-1}(U_{x_1}) \cap P_{x_2}^{-1}(U_{x_2}) \cap ... \cap P_{x_n}^{-1}(U_{x_n})$$

avec $x_i \in X_i$ et $U_{x_i} \in \tau_Y$. Donc

$$A \cap C(X,Y) = [x_1, U_{x_1}] \cap ... \cap [x_n, U_{x_n}]$$

Alors $A \cap C(X,Y) \in \tau_p$. D'où $\tau_1 \subset \tau_p$.
Inversement, montrons que $\tau_p \subset \tau_1$. Soit $W \in \tau_p$. Alors $W = \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$, $\Omega_i \in B_p$. Alors ils existent $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, et $U_1, U_2, ..., U_n \in \tau_Y$ telle que

$$\Omega_i = \bigcup_{j=1}^{n} [x_j, U_j], \forall i \in I.$$

On a donc

$$[x_j, U_j] = C(X,Y) \cap P_{x_j}^{-1}(U_j)$$

Alors pour tout i on a

$$\Omega_i = C(X,Y) \cap P_{x_1}^{-1}(U_1) \cap ... \cap P_{x_n}^{-1}(U_n)$$

Donc $\bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i \in \tau_1$. D'où $W \in \tau_1$ et donc $\tau_p \subset \tau_1$. ∎

Théorème 2.2.4 *Soient X et Y deux espaces topologiques. Si Y est un espace T_i $(i = 0, 1, 2, 3)$, alors $C_p(X,Y)$ l'est aussi.*

Démonstration. Supposons que Y est un espace T_i, $(i = 0, 1, 2, 3)$. Alors $Y^X = \prod_{x\in X} Y_x, Y_x = Y$ est aussi un espace T_i. Donc $C_p(X,Y)$ comme un sous espace de $\prod_{x\in X} Y_x$ est un espace T_i.
∎

Proposition 2.2.5 *Soit X, Y deux espaces topologiques et B_Y une base de Y. Alors la famille $B_p' = \{\bigcap\limits_{i=1}^{n} [x_i, U_i]; x_i \in X; U_i \in B_Y\}$ est une base de $C_p(X,Y)$.*

Démonstration. Soit $W = \bigcap\limits_{i=1}^{k} [x_i, V_i] \in B_p$ avec $x_i \in X$ et V_i ouvert de Y pour tout $i = 1, ..., k$. Soit $f \in W = \bigcap\limits_{i=1}^{k} [x_i, V_i]$; alors $f(x_i) \in V_i$, $\forall i = 1, ..., k$. Pour tout $i = 1, ..., k$, comme B_Y est une base de Y, il existe $W_i \in B_Y$ tel que $f(x_i) \in W_i \subset V_i$. Donc

$$f \in \bigcap_{i=1}^{k} [x_i, W_i] \subset \bigcap_{i=1}^{k} [x_i, V_i].$$

Posons

$$\bigcap_{i=1}^{k} [x_i, W_i] = A_f \in B_p'.$$

Alors

$$\bigcap_{i=1}^{k}[x_i, V_i] = \bigcup_{f \in \bigcap_{i=1}^{k}[x_i,V_i]} A_f = \bigcup_{f \in W} A_f.$$

Donc tout ouvert de $C_p(X, Y)$ s'écrit comme réunion d'éléments de $B_p^{'}$. D'où $B_p^{'}$ est une base de $C_p(X, Y)$. ■

2.3 Topologie de la convergence uniforme sur $C(X, \mathbb{R})$

Soit X un espace topologique et $\mathbb{R}$ l'espace des nombres réels muni de la topologie usuelle. Rappelons qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^X$ converge uniformément vers une fonction f si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \forall n \geq \delta : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ou d'une manière équivalente, si :

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

On écrit dans ce cas

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

.

Définition 2.3.1 *Soient $A \subset C(X, \mathbb{R})$ et $f \in C(X, \mathbb{R})$. On définit l'ensemble $\overline{A}$ comme suit*

$$f \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A, \lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

Proposition 2.3.1 *Soit A,B deux parties de $C(X, \mathbb{R})$. Alors*

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
2. $A \subset \overline{A}$.
3. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
5. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Démonstration.

1. évident.
2. Si $f \in A$, alors la suite constante $f_n = f$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers f. Donc $f \in \overline{A}$. D'où $A \subset \overline{A}$.
3. Soit $f \in \overline{A}$, alors $\exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tel que : $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Mais $A \subset B$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ et comme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ alors , $f \in \overline{B}$.
4. On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ donc d'après (3) on aura $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. D'où $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Inversement, soit $f \in \overline{A \cup B}$ alors il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \cup B$ tel que : $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, alors il existe une sous suite $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que $\lim\limits_{i\to\infty} f_{n_i} = f$. D'où $f \in \overline{A}$, ce qui nous donne $f \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
5. D'après (2), on a $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $f \in \overline{\overline{A}}$, alors il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{A}$. prenons $\varepsilon = \frac{1}{2k}$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $\delta > 0$, telles que pour tout $x \in X$ on a
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2k}.$$
Prenons $n(k) > \delta$, alors
$$|f_{n(k)} - f(x)| < \frac{1}{2k}.$$
Pour tout $k > 0$, il existe $n(k) \in \mathbb{N}$ tel que
$$|f_{n(k)}(x) - f(x)| < \frac{1}{2k}, \forall x \in X.$$
Comme $f_{n(k)} \in \overline{A}$, alors $f_{n(k)} = \lim\limits_{i\to\infty} g_i^k$ où $(g_i^k)_{i\in\mathbb{N}} \subset A$. Donc
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0, \forall i \geq \delta' : |f_{n(k)}(x) - g_i^k(x)| < \varepsilon.$$
Pour $\varepsilon = \frac{1}{2k}, \exists \delta' > 0, \forall i \geq \delta' : |f_{n(k)}(x) - g_i^k(x)| < \frac{1}{2k}$
Prenons $i = i(k) \geq \delta'$, alors
$$\forall k \in \mathbb{N}^* : |f_{n(k)}(x) - g_{i(k)}^k(x)| < \frac{1}{2k}.$$
Posons $g_k = g_{i(k)}^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$\forall k \in \mathbb{N}^* : |f(x) - g_k(x)| < \frac{1}{k}, \forall x \in X.$$
D'où $\lim\limits_{k\to\infty} g_k = f$ et $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A \Rightarrow f \in \overline{A} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. D'où $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

■

Définition 2.3.2 *La famille $\tau_u = \{W \subset C(X, \mathbb{R}) : \overline{C^W} = C^W\}$ est une topologie sur $C(X, \mathbb{R})$ appelée la topologie de la convergence uniforme. On note $C_u(X) = C_u(X, \mathbb{R})$ l'ensemble $C(X, \mathbb{R})$ munit de la topologie τ_u.*

Proposition 2.3.2 *Soit X un espace topologique. Alors la topologie de la convergence simple sur $C(X, \mathbb{R})$ est moins fine que la topologie de la convergence uniforme, c-à-d, $\tau_p \subset \tau_u$ et on écrit $C_p(X) \leq C_u(X)$.*

Démonstration. On a

$$\tau_p \subset \tau_u \Leftrightarrow id : C_u(X, \mathbb{R}) \longrightarrow C_p(X, \mathbb{R}) \text{ est continue} \Leftrightarrow id(\overline{F}) \subset \overline{id(F)}, \forall F \subset C(X, \mathbb{R})$$

. Soit $F \subset C(X, \mathbb{R})$. Notons par $\overline{F}^u$ et $\overline{F}^p$ les fermetures de F par rapport aux topologies τ_u et τ_p, respectivement. Donc on va montrer que $\overline{F}^u \subset \overline{F}^p$. Soit $f \in \overline{F}^u$. Alors il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$. On sait que

$$f \in \overline{F}^p \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}_p(f) : U \cap F \neq \emptyset.$$

Soit $U \in \mathcal{V}_p(f)$, alors $U = C(X, \mathbb{R}) \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{n} P_{x_i}^{-1}(U_i))$ où U_i est un ouvert de $\mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Comme U_i est un ouvert de $\mathbb{R}$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$]f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon[\subset U_i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Comme $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ alors

$$\exists j \in \mathbb{N}^* : |f(x) - f_j(x)| < \varepsilon, \forall x \in X.$$

En particulier,

$$|f(x_i) - f_j(x_i)| < \varepsilon \Rightarrow f_j(x_i) \in \,]f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon[\, \subset U_i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Donc

$$f_j \in \bigcap_{i=1}^{n} [x_i, U_i] = U \Rightarrow f_j \in U \cap F \Rightarrow U \cap F \neq \emptyset.$$

D'où $f \in \overline{F}^p$ c-à-d $\overline{F}^u \subset \overline{F}^p$. ■

Corollaire 2.3.3 *L'espace $C_u(X)$ est un espace $T_i, (i = 0, 1, 2)$.*

Démonstration. Il suffit de voir que $\tau_p \subset \tau_u$ et $C_p(X)$ est un espace $T_i, i = 0, 1, 2$. ■

2.4 Topologie Set-Open

Soit X ,Y deux espaces topologiques et α une famille de sous ensembles de X.

Définition 2.4.1 *On appelle topologie set-open sur $C(X,Y)$ la topologie notée τ_α et qui a comme base la famille*

$$B_\alpha = \{\cap_{i=1}^{n}[B_i, U_i]/B_i \in \alpha, U_i \in \tau_Y\}.$$

On note $C(X,Y)$ muni de τ_α par $C_\alpha(X,Y)$.

Remarque 2.4.1
(1) Si α est la famille de toutes les parties finies de X, alors $\tau_\alpha = \tau_p$.
(2) Si $\alpha = K(X)$, la famille de toutes les parties compactes de X, alors $\tau_\alpha = \tau_k$ est appelée dans ce cas la topologie compact-open et $C_\alpha(X,Y) = C_k(X,Y)$.

Proposition 2.4.1 *Soit X un espace T_2. La topologie de la convergence simple est moins fine que la topologie compact-open sur $C(X,Y)$, c-à-d, $\tau_p \subset \tau_k$.*

Démonstration. On a $B_p \subset B_k$ puisque toute partie finie est compacte. D'où $\tau_p \subset \tau_k$. ■

Proposition 2.4.2 *Soit X un espace topologique complètement régulier et Y un espace T_1 qui contient un chemin γ tel que $\gamma(0) \neq \gamma(1)$. Alors $C_p(X,Y) = C_k(X,Y)$ si et seulement si toute partie compacte de X est finie.*

Démonstration. Supposons que toute partie compacte est finie, alors on a $B_p = B_k$, d'où $\tau_p = \tau_k$.
Inversement, Supposons que $\tau_p = \tau_k$ et montrons que toute partie finie de X est compacte. Soit K un compact de X et $\gamma : [0,1] \to Y$ un chemin de Y tel que $\gamma(0) \neq \gamma(1)$. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto g(x) = \gamma(1), \forall x \in X \end{aligned}$$

Posons $U = Y \setminus \{\gamma(0)\}$. Comme Y est un espace T_1, alors $\{\gamma(0)\}$ est un fermé. Donc U est un ouvert. De plus $g(K) = \{\gamma(1)\} \subset U$, alors $g \in [K,U] \in \tau_k = \tau_p$. Donc il existe un ouvert de base dans $C_p(X,Y)$ de la forme

$$W = [x_1, U_1] \cap [x_2, U_2] \cap ... \cap [x_n, U_n]$$

où $x_1, ..., x_n \in X$ et $U_1, ..., U_n \in \tau_Y$ tel que

$$g \in W \subset [K, U] ...(*)$$

Posons $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et montrons que $K \subset B$. Supposons que $K \nsubseteq B$, donc il existe $x_0 \in K$ telle que $x_0 \notin B$. Il est claire que B est fermé dans X car X est T_1. Comme X est complètement régulier, il existe $f : X \longrightarrow [0,1]$ une application continue telles que $f(x_0) = 0$ et $f(B) = \{1\}$. Alors $\gamma \circ f \in C(X, Y)$ et

$$(\gamma \circ f)(x_i) = \gamma(1) = g(x_i) \in U_i, \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Donc $\gamma \circ f \in W$. D'autre part

$$(\gamma \circ f)(x_0) = \gamma(0) \notin U \Longrightarrow (\gamma \circ f)(K) \nsubseteq U \Longrightarrow (\gamma \circ f) \notin [K, U].$$

Ce qui est contradictoire avec $(*)$. Donc $K \subset B$ et donc K est fini. ■

Exemple 2.4.1 *Considérons l'espace $C_p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, où $\mathbb{N}$ est muni de la topologie induite de $\mathbb{R}$. On a*

$$\{n\} = \mathbb{N} \cap]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $\mathbb{N}$ est un espace discret et donc toute partie compacte sera finie. D'où

$$C_p(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = C_k(\mathbb{N}, \mathbb{R}).$$

Mais $C_k(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \neq C_u(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

Définition 2.4.2 *Soit α une famille de sous ensembles d'un espace topologique X. On dit que α est un réseau de X si*

$$\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists A \in \alpha : x \in A \subset V.$$

Si tous les éléments de α sont fermés (compacts) on dit alors que α est un réseau fermé (compact).

Exemple 2.4.2

1. *Toute base est un réseau.*

2. *La famille, $F(X)$, des parties finies d'un espace topologique X est un réseau fermé. En effet,*

$$\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists \{x\} \in F(X) : x \in \{x\} \subset V$$

Si de plus X est séparé, alors $F(X)$ est un réseau compact.

3. *La famille $K(X)$ est un réseau compact de X.*

Proposition 2.4.3 *Soient X,Y deux espaces topologiques et f une application continue surjective. Si α est un réseau de X, alors $f(\alpha)$ est un réseau de Y, où $f(\alpha) = \{f(A)/A \in \alpha\}$.*

Démonstration. Supposons que α est un réseau de X et montrons que $f(\alpha)$ est un réseau de Y. *i.e.*,

$$\forall y \in Y, \forall U \in \mathcal{V}(y), \exists B \in f(\alpha) : y \in B \subset U.$$

Soit $y \in Y$ et $U \in \mathcal{V}(y)$. Alors il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$ et $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x)$ car f est continue surjectif. Comme α est un réseau alors,

$$\exists A \in \alpha : x \in A \subset f^{-1}(U),$$

alors $f(x) \in f(A) \subset U$, et donc $y \in f(A) \subset U$. Il suffit de poser $B = f(A)$. D'où $f(\alpha)$ est un réseau de Y. ■

Proposition 2.4.4 *Soit X un espace topologique et α un réseau de X. Soit V un fermé d'un espace topologique Y. Alors $[B, V]$ est un fermé de $C_\alpha(X, Y)$, pour tout $B \in \alpha$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $C_\alpha(X, Y)\backslash[B, V]$ est un ouvert de $C_\alpha(X, Y)$. Soit $f \in C_\alpha(X, Y)\backslash[B, V]$. On a

$$f \notin [B, V] \Rightarrow f(B) \nsubseteq V \Rightarrow \exists x_0 \in B \text{ tel que } f(x_0) \notin V \Rightarrow f(x_0) \in Y\backslash V \Rightarrow x_0 \in f^{-1}(Y\backslash V).$$

Comme α est un réseau, alors

$$\exists B_0 \in \alpha : x_0 \in B_0 \subset f^{-1}(Y\backslash V) \Rightarrow f \in [B_0, Y\backslash V].$$

Montrons que $[B_0, Y\backslash V] \subset C_\alpha(X, Y)\backslash[B, V]$. Soit $g \in [B_0, Y\backslash V]$. ALors $g(x_0) \notin V$ et comme $x_0 \in B$, alors

$$g(B) \nsubseteq V \Rightarrow g \notin [B, V] \Rightarrow g \in C_\alpha(X, Y)\backslash[B, V].$$

D'où $[B_0, Y\backslash V] \subset C_\alpha(X, Y)\backslash[B, V]$. Donc $C_\alpha(X, Y)\backslash[B, V]$ s'écrit comme réunion d'ouverts de $C_\alpha(X, Y)$. Donc $[B, V]$ est un fermé .

■

Définition 2.4.3 *Soient X et Y deux espaces topologiques. Un sous-espace B de X est dit Y-**compact** si pour toute application continue $f : X \longrightarrow Y$, l'ensemble $f(B)$ est compact dans Y.*

Exemple 2.4.3 *Toute partie compacte d'un espace topologique X est $\mathbb{R}$-compcate.*

Proposition 2.4.5 *Pour X et Y deux espaces topologiques et α un réseau de X, on a les propriétés suivantes :*

- *Si Y est un espace T_i, alors $C_\alpha(X,Y)$ est lui aussi un espace T_i, pour $i \leq 2$.*
- *Si α est une famille de Y-compacts, et si Y est un espace complètement régulier, alors $C_\alpha(X,Y)$ est lui aussi complètement régulier.*

Démonstration. On va montrer que si Y est un espace T_1, alors $C_\alpha(X,Y)$ est aussi T_1. Notons que les autres cas où Y est un espace T_0 ou T_2 se démontrent d'une façon similaire. Soit $f, g \in C_\alpha(X,Y)$ tel que $f \neq g$, c'est à dire il existe $x \in X$ où $f(x) \neq g(x)$. Comme Y est T_1, alors il existe un voisinage ouvert U de $f(x)$ tel que $g(x) \notin U$ et un voisinage ouvert V de $g(x)$ tel que $f(x) \notin V$. Par ailleurs, α est un réseau, donc il existe $B_1, B_2 \in \alpha$ tels que $x \in B_1 \subset f^{-1}(U)$ et $x \in B_2 \subset g^{-1}(V)$. D'où $[B_1, U]$ et $[B_2, V]$ sont deux voisinages ouverts de f et g respectivement et on a $g \notin [B_1, U]$ et $f \notin [B_2, V]$, et donc $C_\alpha(X,Y)$ est T_1.
Maintenant, supposons que α est un réseau de Y-compacts, et Y est un espace complètement régulier. Il suffit de montrer que pour tout $f \in C_\alpha(X,Y)$ et tout voisinage $[B,U]$ de f, où $B \in \alpha$ et U un ouvert de Y, il existe une fonction continue $G : C_\alpha(X,Y) \longrightarrow [0,1]$ tels que $G(f) = 0$ et $G(h) = 1$, pour tout $h \in C_\alpha(X,Y) \backslash [B,U]$. Donc soit $f \in C_\alpha(X,Y)$ et $[B,U]$ un voisinage de f de la sous-base dans $C_\alpha(X,Y)$. On a $f(B)$ est un compact de Y, et puisque Y est un espace complètement régulier, alors il existe une fonction continue $g : Y \longrightarrow [0,1]$ tels que $g(f(B)) = \{0\}$, et $g(y) = 1, \forall y \in Y \backslash U$. Définissons l'application de $C_\alpha(X,Y)$ dans $[0,1]$ par

$$G(h) = sup_{x \in B}(g \circ h)(x)$$

pour tout $h \in C_\alpha(X,Y)$. Il est clair que $G(f) = 0$, et pour tout $h \notin [B,U]$, il existe $x \in B$ tel que $h(x) \in Y \backslash U$, ce qui implique que $g(h(x)) = 1$ et ceci signifie que $G(h) = 1$. Et pour conclure il nous reste à justifier que G est continue. Pour cela on doit montrer que pour tout intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, l'image réciproque $G^{-1}([0,1] \cap]a,b[)$ est ouvert dans $C_\alpha(X,Y)$. Prenons les deux ensembles $V = \{x \in [0,1], x \leq a\}$ qui est un fermé de $[0,1]$ et $W = \{x \in [0,1], x < b\}$ qui est ouvert dans $[0,1]$. On a

$$G^{-1}([0,1] \cap]a,b[) = \{C_\alpha(X,Y) \backslash [B, g^{-1}(V)]\} \cap [B, g^{-1}(W)].$$

En effet,

$$\begin{aligned}
G^{-1}([0,1]\cap]a,b[) &= \{h \in C_\alpha(X,Y) : G(h) \in [0,1]\cap]a,b[\} \\
&= \{h \in C_\alpha(X,Y) : sup_{x\in B}\ g(h(x)) \in [0,1]\ et\ a < sup_{x\in B}\ g(h(x)) < b\} \\
&= \{h \in C_\alpha(X,Y) : sup_{x\in B}\ g(h(x)) \in [0,1]\ et\ sup_{x\in B}\ g(h(x)) > a\} \cap \\
&\quad \{h \in C_\alpha(X,Y) : sup_{x\in B}\ g(h(x)) \in [0,1]\ et\ sup_{x\in B}\ g(h(x)) < b\}.
\end{aligned}$$

Posons

$$E = \{h \in C_\alpha(X,Y) : sup_{x\in B}\ g(h(x)) \in [0,1]\ et\ sup_{x\in B}\ g(h(x)) > a\},$$

et

$$F = \{h \in C_\alpha(X,Y]) : sup_{x\in B}\ g(h(x)) \in [0,1]\ et\ sup_{x\in B}\ g(h(x)) < b\}.$$

En utilisant le fait qu'une fonction continue sur un compact à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes, on peut facilement déduire que pour tout $h \in C_\alpha(X,Y)$, on a $sup_{x\in B}\ g(h(x)) < b$ (resp. $sup_{x\in B}\ g(h(x)) \leq a$) si et seulement si $g(h(x)) < b$ (resp. $g(h(x)) \leq a$), pour tout $x \in B$. On a alors

$$\begin{aligned}
E &= C_\alpha(X,Y)\backslash\{h \in C_\alpha(X,Y) : sup_{x\in B}\ g(h(x)) \in [0,1]\ et\ sup_{x\in B}\ g(h(x)) \leq a\} \\
&= C_\alpha(X,Y)\backslash\{h \in C_\alpha(X,Y) : g(h(x)) \in [0,1]\, et\, g(h(x)) \leq a, \forall x \in B\} \\
&= C_\alpha(X,Y)\backslash\{h \in C_\alpha(X,Y) : g(h(x)) \in V, \forall x \in B\} \\
&= C_\alpha(X,Y)\backslash\{h \in C_\alpha(X,Y) : h(x) \in g^{-1}(V), \forall x \in B\} \\
&= C_\alpha(X,Y)\backslash\{h \in C_\alpha(X,Y) : h(B) \subset g^{-1}(V)\} \\
&= C_\alpha(X,Y)\backslash[B, g^{-1}(V)].
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F &= \{h \in C_\alpha(X,Y) : g(h(x)) \in [0,1]\, et\, g(h(x)) < b, \forall x \in B\} \\
&= \{h \in C_\alpha(X,Y) : g(h(x)) \in W, \forall x \in B\} \\
&= \{h \in C_\alpha(X,Y) : h(x) \in g^{-1}(W), \forall x \in B\} \\
&= \{h \in C_\alpha(X,Y) : h(B) \subset g^{-1}(W)\} \\
&= [B, g^{-1}(W)].
\end{aligned}$$

D'où

$$G^{-1}([0,1]\cap]a,b[) = E \cap F = \{C_\alpha(X,Y)\backslash[B, g^{-1}(V)]\} \cap [B, g^{-1}(W)].$$

D'après la Proposition 2.4.4, $[B, g^{-1}(V)]$ est un fermé, et donc $C_\alpha(X,Y)\backslash[B, g^{-1}(V)]$ est un ouvert. D'où $G^{-1}([0,1]\cap]a,b[)$ est ouvert dans $C_\alpha(X,Y)$. ■ Nous savons que tout espace compact est un Y-compact. Ainsi, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 2.4.6 *Pour tout espace topologique X et tout espace complètement réguier Y, on a $C_p(X,Y)$ et $C_k(X,Y)$ sont aussi complètement réguliers.*

Bibliographie

[1] R. Engelking, " *General topology* ". Revised and completed edition. Herldermann Verlag, Berlin, 1989.

[2] John L. Kelley , " *General topology* ". Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1955.

[3] R. A. McCoy, I. Ntantu, " *Topological properties of spaces of continuous functions*". Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.

[4] S. E. Nokhrin, A. V. Osipov, " *On the Coincidence of Set-Open and Uniform Topologies*". ISSN 0081-5438, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2009, Suppl. 3, pp. S184-S191.